

研究生规划教材

高聚物的结构与性能

陈 平 唐传林 编 ●

化学工业出版社
教材出版中心

研究生规划教材

高聚物的结构与性能

陈平 唐传林 编



化学工业出版社
教材出版中心

·北京·

(京) 新登字 039 号

图书在版编目 (CIP) 数据

高聚物的结构与性能/陈平, 唐传林编. —北京: 化学工业出版社, 2005. 6

研究生规划教材

ISBN 7-5025-6716-X

I. 高… II. ①陈…②唐… III. ①高聚物-结构
②高聚物-性能 IV. 0631

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2005) 第 015327 号

研究生规划教材
高聚物的结构与性能
陈平 唐传林 编
责任编辑: 杨菁
文字编辑: 张双进
责任校对: 陶燕华
封面设计: 潘峰

化学工业出版社
出版发行
教材出版中心
(北京市朝阳区惠新里 3 号 邮政编码 100029)
购书咨询: (010) 64982530
(010) 64918013
购书传真: (010) 64982630
<http://www.cip.com.cn>

*

新华书店北京发行所经销
北京市昌平振南印刷厂印刷
三河市宇新装订厂装订

开本 787mm×1092mm 1/16 印张 12½ 字数 265 千字

2005 年 7 月第 1 版 2005 年 7 月北京第 1 次印刷

ISBN 7-5025-6716-X/G · 1729

定 价: 28.00 元

版权所有 违者必究

该书如有缺页、倒页、脱页者, 本社发行部负责退换

前 言

高聚物可以是坚硬的塑料，也可以是富有弹性的橡胶，或是高强度的薄膜和纤维，这皆是由于不同高聚物具有不同的结构所决定的。任何高聚物材料在应用中都要受到外界的作用，高聚物的性能强烈地依赖于外界的温度和作用时间，这与高聚物的分子结构和聚集态的结构有密切的关系，研究高聚物的性能有助于深入了解高聚物的微观结构和大分子运动的特征，从而有助于研究高聚物的结构与性能的关系，揭示高聚物结构与性能之间的内在联系及基本规律，以其对高聚物材料的合成、加工成型、测试与选材等提供理论依据。相信通过本书的学习，对了解和运用该领域的成果将有所裨益。

本书在编写时参考了大量的国内外文献资料，谨此向文献资料的作者致以深切的谢意。在本书出版的过程中得到了大连理工大学研究生院教材出版基金的资助，在此表示感谢。

由于作者水平有限，书中的缺点与不足之处在所难免，热诚欢迎广大读者批评指正。

致谢：本书编写过程中，在计算机排版、图表制作等方面得到了我的研究生陆春、于祺、唐忠朋、孙明等同学的帮助，在此深表谢意。

作者

2005 年 1 月

内 容 提 要

全书共分8章,第1章介绍高聚物的应力与应变,第2章介绍高聚物在橡胶态的力学行为,第3章介绍高聚物的结构转变与分子运动,第4章和第5章分别介绍高聚物的黏弹性力学模型、实验和黏弹性的分子理论,第6章介绍高聚物的屈服与断裂,第7章介绍高聚物的各向异性,第8章介绍高聚物的电学性能。本书适用于高分子材料与工程专业的研究生,也可供从事高分子材料及相关领域科学研究、生产实践和应用开发各方面的工作者参考。

目 录

第 1 章 高聚物的应力与应变	1
1.1 弹性固体和高聚物的力学行为	1
1.2 应力状态	2
1.3 应变状态	8
1.4 应力与应变的关系	15
第 2 章 高聚物在橡胶态的力学行为	19
2.1 大应变的弹性理论	19
2.2 唯象分析	21
2.3 应变储能函数分析	23
2.4 橡胶弹性的热力学分析	29
2.5 橡胶态的分子统计分析	34
2.6 影响橡胶弹性的因素	46
第 3 章 高聚物的结构转变与分子运动	49
3.1 概述	49
3.2 玻璃化转变	51
3.3 玻璃态的次级松弛	59
3.4 位置模型理论与松弛活化能	62
3.5 结晶高聚物的转变与松弛	66
第 4 章 高聚物的黏弹性	67
4.1 概述	67
4.2 线性黏弹行为	68
4.3 Boltzmann 叠加原理	72
4.4 线性黏弹性的力学模型	76
4.5 高聚物的黏弹性实验	93
4.6 化学应力松弛	103
第 5 章 高聚物黏弹性的分子理论	111
5.1 线性高聚物黏弹性的分子理论	111
5.2 RBZ 理论向本体聚合物的推广	119
5.3 FWL 理论	120
5.4 蛇链理论	126

第 6 章 高聚物的屈服与断裂	130
6.1 高聚物的应力-应变试验	130
6.2 固体高聚物的屈服行为	135
6.3 高聚物的断裂	145
第 7 章 高聚物的各向异性	148
7.1 概述	148
7.2 高聚物的力学各向异性	150
7.3 高聚物的光学各向异性	159
第 8 章 高聚物的电学性能	166
8.1 恒定电场下高聚物的极化	166
8.2 交变电场下高聚物的极化和介电损耗	168
8.3 高聚物的电老化	180
8.4 高聚物的电击穿	190
主要参考文献	192

第 1 章 高聚物的应力与应变

任何高聚物材料在应用中都要受力的作用，因此研究高聚物的力学性能有重要的意义。

高聚物可以是坚硬的塑料，也可以是富有弹性的橡胶，或是高强度的薄膜和纤维，这皆是由于不同高聚物具有不同的力学性能所决定的。

高聚物的力学性能强烈地依赖于温度和力的作用时间，这与高聚物的分子结构和聚集态的结构有密切的关系，研究高聚物的力学性能还有助于深入了解高聚物的微观结构和大分子运动的特征，从而有助于研究高聚物的结构与性能的关系。

1.1 弹性固体和高聚物的力学行为

完全刚性的材料是不存在的，任何固体在外力作用下总是要变形的，即总是表现有一定的弹性，故称为弹性固体，弹性力学就是要研究固体形状的变化和引起这种变化的力之间的关系，其中最简单的本构方程（Constitutive equation）就是虎克定律（适于小变形）。

$$\sigma = Ee \quad (1-1)$$

式（1-1）是理想弹性体单轴变形时应力 σ 与应变 e 的关系， E 为弹性模量。

1.1.1 弹性力学中的基本假定

① 假定物体是连续的。物体内部由连续介质组成，其中无空隙，这样物体中的应力、形变和位移等量是连续的，可用坐标的连续函数来表示。

② 假定物体是均匀的。各部分弹性相同，如不同材料颗粒很小，且分布均匀，也认为是均匀的。

③ 假定物体是各向同性的。金属、陶瓷等其中各向异性的晶体很微小，且无规律分布，故在足够大的范围内是各向同性的。

④ 假定物体是完全弹性的。服从虎克定律，弹性模量与应力、应变的大小无关。符合以上四条的称理想弹性体。

⑤ 假定物体的变形是很小的。在研究物体受力后的平衡状态时可不考虑物体尺寸的改变，即用变形以前的尺寸代替变形后的尺寸，而不致引起显著的误差。在考察物体形变及位移时，应变和转角的二次幂或乘积可忽略不计，从而使弹性力学中的代数方程和微分方程可简化为线性方程。

⑥ 物体内无初应力。认为物体是处于自然状态，一般用退火方法消除内应力。

1.1.2 高聚物的力学行为

高聚物力学性能的特点是除了在 T_g 以下的普弹性以外，还有 T_g 以上的高弹性，以及在转变区所表现的明显的黏弹性。

普弹变形是有内能改变（键角、键长）引起的；而高弹性则是由于大分子链构象熵的改变引起的，其中内能的改变并不重要。

① 高聚物的高弹变形是由于大分子链中链段的运动引起的，链段运动需克服内摩擦力（黏性），故与时间、温度有关。

② 高聚物本身应是非线性黏弹性的，只是在很小的应变范围内，才可看成是线性弹性的，其最简单的本构方程应包括时间或频率，如

$$\varepsilon = \varepsilon_0 (1 - e^{-t/\tau}) \quad (1-2)$$

$$\sigma = \sigma_0 e^{-t/\tau} \quad (1-3)$$

③ 高弹变形不总是很小的，当研究大变形时则需用由广义应力和广义应变关系的大变形弹性理论。

1.2 应力状态

1.2.1 定义

(1) 外力 对物体所施加的，使物体发生变形的力。又分为体力和面力。

a. 体力 分布在物体体积内的力，如重力，惯性力。

b. 面力 分布在物体表面的力，如流体压力。

(2) 内力 物体受外力变形时，其中各部分相对位置改变而引起的相互作用力。内力的表面密度的极限，称为某点的应力，即为单位面积上的力。

与物体的形变及材料强度直接有关的是应力在其作用截面的法向和切向分量。

物体内各点的应力一般来说是不同的。

物体内同一点 P 在不同截面上的应力也是不同的。

1.2.2 物体内任一点的应力状态

在某点从物体中取出一微小的平行六面体，其棱边平行于坐标轴，将各面上的应力分解为一个正应力和两个剪应力，即 $\sigma_{xx}, \tau_{xy}, \tau_{xx}; \sigma_{yy}, \tau_{yz}, \tau_{yx}$ 和 $\sigma_{zz}, \tau_{zy}, \tau_{zx}$ (见图 1-1，注意图中所有力的方向均为正)。

因在无外力作用时，该点处于平衡状态，且无转动，于是

$$\frac{2\tau_{yz} \Delta z \Delta x \Delta y}{2} - \frac{2\tau_{xy} \Delta y \Delta x \Delta z}{2} = 0$$

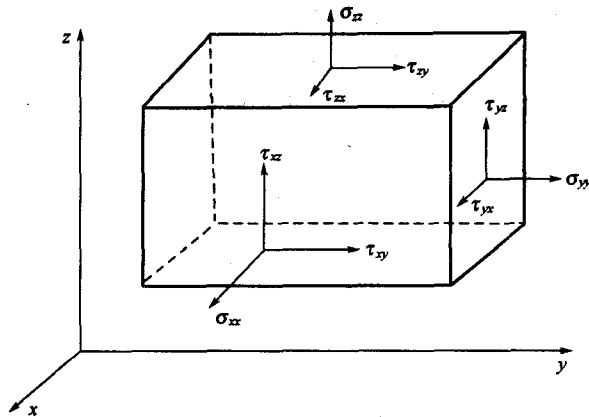


图 1-1 物体内任一点应力状态示意

得

$$\tau_{yz} = \tau_{zy}$$

同样得

$$\tau_{zx} = \tau_{xz}; \tau_{xy} = \tau_{yx}$$

这样 P 点的应力可用 σ_{xx} , σ_{yy} , σ_{zz} , τ_{xy} , τ_{yz} 和 τ_{zx} 6 个分量来描述, 以张量表示则为

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{12} & \sigma_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{13} & \tau_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \quad (1-4)$$

张量应力分量虽然随坐标而变, 但其特征值不变, 该特征值即为式 (1-4) 主应力, 与坐标无关。

已知某点的上述 6 个应力分量, 就可以求得经过该点的任意截面上的正应力和剪应力, 故以上 6 个分量可以确定该点的应力状态。

如图 1-2 所示, N 为经过 P 点任一斜面 $\triangle ABC$ 的外法线, 其方向余弦为: l 、 m 、 n , 相应的三角形的面积为 ΔS 、 $l\Delta S$ 、 $m\Delta S$ 和 $n\Delta S$, 体积为 ΔV 。

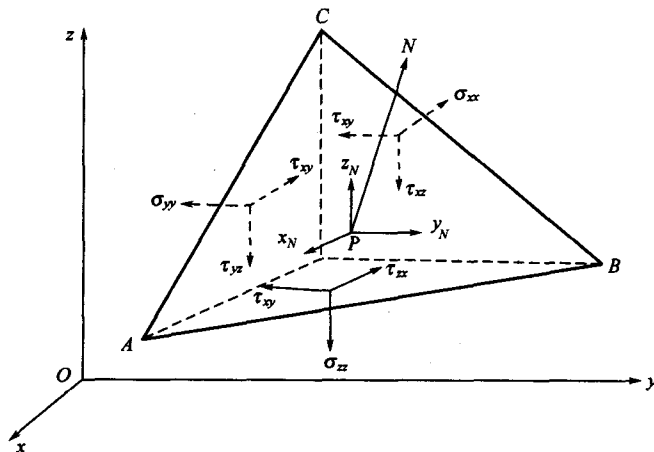


图 1-2 截面应力示意

令在 $\triangle ABC$ 上的应力为 S_N ，其分量为 X_N 、 Y_N 和 Z_N ，按平衡条件 $\Sigma F_X=0$ ，得

$$X_N \Delta S - \sigma_{xx} l \Delta S - \tau_{yx} m \Delta S - \tau_{zx} n \Delta S + X \Delta V = 0$$

X 为体力分量，除以 ΔS ，因 ΔV 比 ΔS 为更高阶微量， $\Delta V/\Delta S \rightarrow 0$ ，故得

$$\begin{aligned} X_N &= l\sigma_{xx} + m\tau_{yx} + n\tau_{zx} \\ \text{相应地有} \quad Y_N &= l\tau_{xy} + m\sigma_{yy} + n\tau_{xy} \\ Z_N &= l\tau_{zx} + m\tau_{yz} + n\sigma_{zz} \end{aligned} \quad (1-5)$$

再求 $\triangle ABC$ 面上的正应力 σ_N 和剪应力 τ_N

$$\begin{aligned} [\text{将式 (1-5) 代入}] \quad \sigma_N &= lX_N + mY_N + nZ_N \\ &= l^2\sigma_{xx} + m^2\sigma_{yy} + n^2\sigma_{zz} + 2mn\tau_{yz} + 2nl\tau_{zx} + 2lm\tau_{xy} \end{aligned} \quad (1-6)$$

因 $S_N^2 = \sigma_N^2 + \tau_N^2 = X_N^2 + Y_N^2 + Z_N^2$ ，故

$$\tau_N^2 = X_N^2 + Y_N^2 + Z_N^2 - \sigma_N^2 \quad (1-7)$$

1.2.3 主应力与应力主向

经过 P 点的某一斜面上的剪应力为0，则此斜面上的正应力称为 P 点的一个主应力（又称全应力），此斜面称应力主面，其法线方向为 P 点的一个应力主向。参考图1-2，主应力 σ 在坐标轴上的投影为

$X_N = l\sigma$ ， $Y_N = m\sigma$ ， $Z_N = n\sigma$ ，代入式(1-5)，得

$$\begin{aligned} (\sigma_{xx} - \sigma)l + \tau_{yx}m + \tau_{zx}n &= 0 \\ \tau_{xy}l + (\sigma_{yy} - \sigma)m + \tau_{zy}n &= 0 \\ \tau_{xz}l + \tau_{yz}m + (\sigma_{zz} - \sigma)n &= 0 \end{aligned} \quad (1-8)$$

因 $l^2 + m^2 + n^2 = 1$ ，故 l 、 m 、 n 不能全为0，故式(1-8)的系数行列式为0

$$\begin{vmatrix} \sigma_{xx} - \sigma & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} - \sigma & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{zz} - \sigma \end{vmatrix} = 0 \quad (1-9)$$

展开得

$$\sigma^3 - I_1\sigma^2 + I_2\sigma - I_3 = 0 \quad (1-10)$$

式中

$$\begin{aligned} I_1 &= \sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz} \\ I_2 &= \begin{vmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{yz} & \sigma_{zz} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_{zz} & \tau_{zx} \\ \tau_{zx} & \sigma_{xx} \end{vmatrix} \\ I_3 &= \begin{vmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{zz} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

式(1-10)的解 σ_1 ， σ_2 ， σ_3 就是所求的三个主应力。

$$(\sigma - \sigma_1)(\sigma - \sigma_2)(\sigma - \sigma_3) = 0$$

即

$$\sigma^3 - (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)\sigma^2 + (\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1)\sigma - \sigma_1\sigma_2\sigma_3 = 0 \quad (1-11)$$

式 (1-11) 与式 (1-10) 相比得

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = \sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz} \\
 I_2 &= \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1 \\
 &= \sigma_{xx}\sigma_{yy} + \sigma_{yy}\sigma_{zz} + \sigma_{zz}\sigma_{xx} - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2 \\
 I_3 &= \sigma_1\sigma_2\sigma_3 \\
 &= \sigma_{xx}\sigma_{yy}\sigma_{zz} - \sigma_{xx}\tau_{yz}^2 - \sigma_{yy}\tau_{zx}^2 - \sigma_{zz}\tau_{xy}^2 + 2\tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{zx}
 \end{aligned} \tag{1-12}$$

在一定压力状态下, 物体内任一点的主应力一定, 它是不随坐标系的改变而变化 (应力分量是随坐标系而改变的)。

因此式 (1-12) 中 I_1 , I_2 , I_3 三个量也是不随坐标系变化的, 称为应力状态的不变量。

由其中 I_1 的表达式看出, 物体内任意一点, 它的任意三个互相垂直面上的正应力之和是常数, 且等于该点的三个主应力之和。

根据式 (1-8) 及 $l^2 + m^2 + n^2 = 1$ 的关系可分别求出三个主应力 σ_1 , σ_2 , σ_3 各自的方向余弦 (l_1, m_1, n_1) ; (l_2, m_2, n_2) ; (l_3, m_3, n_3) 。因为 $l_1l_2 + m_1m_2 + n_1n_2 = 0$, 说明 σ_1 与 σ_2 互相垂直, 同样也可证得 σ_1 , σ_2 和 σ_3 三者是互相垂直的。

由此看出, 如将原来的 x, y, z 坐标系经适当的旋转变换后, 与三个主应力的方向一致, 于是所有的剪应力为 0。这就是使式 (1-4) 所表示的应力张量的特征多项式为 0, 便得式 (1-9), 三个特征值便是三个主应力。

1.2.4 最大与最小应力

已知某点的应力状态, 即 6 个应力分量, 便可求出通过该点任一斜面上的正应力和剪应力, 其中也包括三个应力主面上的主应力。现求其中最大和最小的正应力和剪应力。

为简便起见, 将三个坐标轴与三个主应力重合, 则

$$\tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0, \sigma_{xx} = \sigma_1, \sigma_{yy} = \sigma_2, \sigma_{zz} = \sigma_3$$

(1) 求最大与最小正应力 由式 (1-6) 任一斜面上的正应力是

$$\sigma_N = l^2\sigma_1 + m^2\sigma_2 + n^2\sigma_3 \tag{1-13}$$

l, m, n 为斜面外法线 N 对应力主向的方向余弦, 用 $l^2 + m^2 + n^2 = 1$ 消去上式的 l , 得

$$\sigma_N = (1 - m^2 - n^2)\sigma_1 + m^2\sigma_2 + n^2\sigma_3$$

求 σ_N 的极值, 令 $d\sigma_N/dm = 0$, $d\sigma_N/dn = 0$, 得 $m = n = 0$, $l = \pm 1$, 代入式 (1-13) 得 $\sigma_N = \sigma_1$ 。

再用 $l^2 + m^2 + n^2 = 1$ 的关系, 消去式 (1-13) 中的 m 和 n , 又可得到 σ_N 另外两个极值 σ_2, σ_3 。

因此 σ_N 的三个极值不外乎 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, 其中最大为最大正应力, 最小的为最小正应力。

(2) 求最大与最小剪应力 按式 (1-5), 斜面上全应力在坐标轴上的投影

$$X_N = l\sigma_1, Y_N = m\sigma_2, Z_N = n\sigma_3 \quad (1-14)$$

将式 (1-13), 式 (1-14) 代入式 (1-7) 得

$$\tau_N^2 = l^2 \sigma_1^2 + m^2 \sigma_2^2 + n^2 \sigma_3^2 - (l^2 \sigma_1 + m^2 \sigma_2 + n^2 \sigma_3)^2$$

由 $l^2 + m^2 + n^2 = 1$, 消去 l^2 , 再求 τ_N^2 的极值, 令 $d(\tau_N^2)/dm = 0, d(\tau_N^2)/dn = 0$, 化简得

$$\begin{aligned} m \left[\frac{(\sigma_2 - \sigma_1)m^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)n^2 - 1}{2(\sigma_2 - \sigma_1)} \right] &= 0 \\ n \left[\frac{(\sigma_2 - \sigma_1)m^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)n^2 - 1}{2(\sigma_3 - \sigma_1)} \right] &= 0 \end{aligned} \quad (1-15)$$

求解 ① $m=0, n=0$,

求得 $l = \pm 1, \tau_N = 0$

② $m=0, n = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$

求得 $l = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \tau_N^2 = \left[\frac{(\sigma_3 - \sigma_1)}{2} \right]^2$

或 $n=0, m = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$

求得 $l = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \tau_N^2 = \left[\frac{(\sigma_1 - \sigma_2)}{2} \right]^2$

再由 $l^2 + m^2 + n^2 = 1$, 消去 m^2 和 n^2 , 共得 τ_N^2 极值的六组解, 如表 1-1 所示。

表 1-1 剪应力的极值

l	± 1	0	0	0	$\pm \frac{1}{\sqrt{2}}$	$\pm \frac{1}{\sqrt{2}}$
m	0	± 1	0	$\pm \frac{1}{\sqrt{2}}$	0	$\pm \frac{1}{\sqrt{2}}$
n	0	0	± 1	$\pm \frac{1}{\sqrt{2}}$	$\pm \frac{1}{\sqrt{2}}$	0
τ_N^2	0	0	0	$[(\sigma_2 - \sigma_3)/2]^2$	$[(\sigma_3 - \sigma_1)/2]^2$	$[(\sigma_1 - \sigma_2)/2]^2$

表中前三组解对应于应力主面, τ_N 均为 0; 后三组解对应于经过应力主轴之一而平分, 其余二应力主轴的夹角的三个平面和与其相垂直的另外三个平面, 所对应的剪应力包含了最大与最小剪应力。

显然, 最大剪应力在树脂上等于最大主应力与最小主应力之差的一半, 作用在通过中间主应力并且平分最大主应力与最小主应力夹角的平面上。

单轴拉伸时, 见图 1-3。则 $\sigma_1 = \sigma_0, \sigma_2 = \sigma_3 = 0$ 。

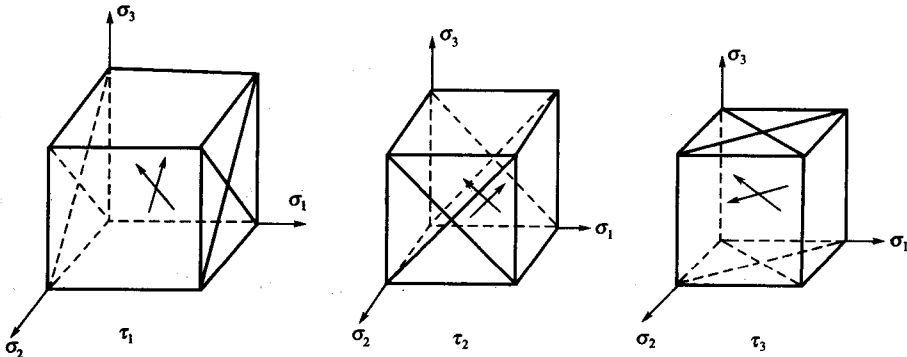


图 1-3 三轴应力作用下最大剪切应力的方向

于是，最大正应力为 $\sigma_N = \sigma_0$ ；最大剪应力为 $\tau_N = \frac{\sigma_0}{2}$ ；可见， $\sigma_N(\max) > \tau_N(\max)$ 。

但是，对聚乙烯、聚丙烯和聚碳酸酯等塑性材料，拉伸时 τ_N 较易达到材料本身的最大抗剪应力，即比法向应力 σ_N 达到材料本身的最大抗拉应力的时间要快得多，所以往往首先发生剪切滑移形变（称屈服现象），或在材料内部酝酿着剪切形变的“迹象”，通常出现与试样轴成约 45° 的“剪切带”，如图 1-4 所示。剪切带常以交叉形式出现，乃是由于在 $(\frac{\pi}{2} + 45^\circ)$ 的斜面上，也有同样的剪切应力存在所致。

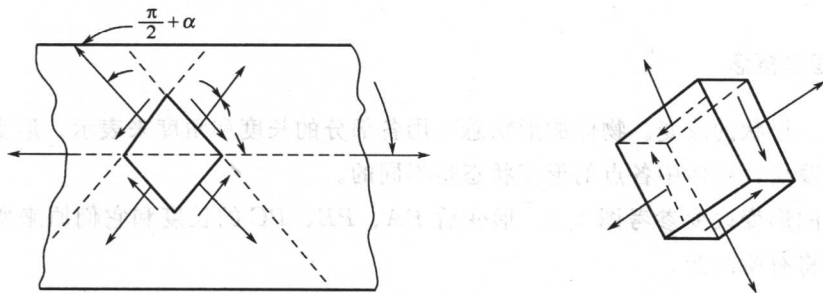
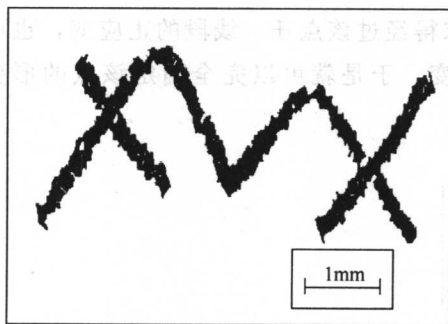
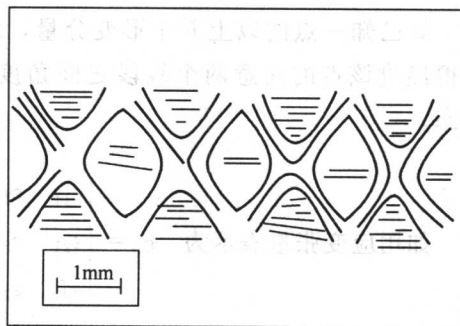


图 1-4 高聚物材料剪切带示意

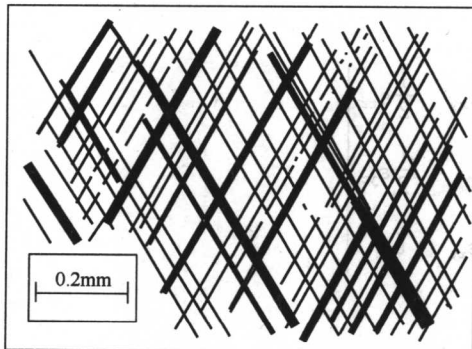
几种高聚物的剪切线带如图 1-5 所示。



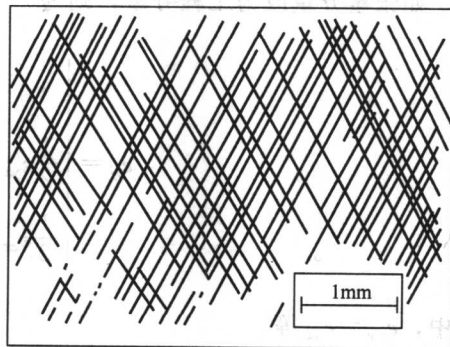
(a) 聚甲基丙烯酸甲酯剪切线带



(b) 聚乙烯剪切线带



(c) 非晶态的聚对苯二甲酸乙二醇酯剪切线带



(d) 聚苯乙烯剪切线带

图 1-5 几种高聚物的剪切线带

双轴拉伸时, (相当于图 1-3 中的 τ_2), 在相应的斜面上的最大剪切应力为 $\pm(\sigma_1 - \sigma_3)/2$ 。

当 $\sigma_1 = \sigma_2$ 时, $\tau_N = 0$, 即在双轴拉伸的应力向同时, 制品平面内无剪切应力, 大分子链单向取向很少, 只引起平面取向, 故吹塑成型的薄膜其单向取向程度一般不如压延薄膜。

1.3 应变状态

1.3.1 基本概念

形变: 形状的改变。物体的形状总可用各部分的长度和角度来表示, 形变即长度和角度的改变, 物体中各点的形变状态是不同的。

P 点的形变改变参考图 1-1。形变后 PA、PB、PC 的长度和它们原来所夹的直角一般都将有所改变。

e_{xx} , e_{yy} , e_{zz} 为正应变, 伸长为正, 收缩为负。

e_{xy} , e_{yz} , e_{zx} 为剪切应变, 如 e_{xy} 表示 PA 与 PB 二线段间直角的变化, 直角变小为正, 增大为负。

如已知一点的以上 6 个形变分量, 就可求得经过该点任一线段的正应变, 也可求得经过该点的任意两个线段之间角度的改变, 于是就可以完全确定该点的形变状态。

$$\text{如用应变张量表示为 } \epsilon_{ij} = \begin{vmatrix} \epsilon_{11} & \epsilon_{12} & \epsilon_{13} \\ \epsilon_{21} & \epsilon_{22} & \epsilon_{23} \\ \epsilon_{31} & \epsilon_{32} & \epsilon_{33} \end{vmatrix}$$

其中, $\epsilon_{12} = \epsilon_{21}$ 等。

如张量分量改为工程分量, 则为

$$e_{ij} = \begin{vmatrix} \epsilon_{xx} & \frac{1}{2}\epsilon_{xy} & \frac{1}{2}\epsilon_{xz} \\ \frac{1}{2}\epsilon_{yx} & \epsilon_{yy} & \frac{1}{2}\epsilon_{yz} \\ \frac{1}{2}\epsilon_{zx} & \frac{1}{2}\epsilon_{zy} & \epsilon_{zz} \end{vmatrix}$$

其中, $e_{xy} = e_{yx}$ 等。

位移: 位置的移动。描述位移有两种方式, 位移示意如图 1-6 所示。

① 采用未变形物体中的坐标。位移 u 取未变形坐标的函数 $r' = r + u = r + u(r)$ 此

法称 Lagranian 法。

② 采用变形后的坐标，它是随形变而变换的，位移 u 取变形后坐标的函数 $r''' = r'' - u = r'' - u(r'')$ ，此法称 Eulerian 法。

一般按第一种方式表示。如要考虑发生变形后的平衡条件，则以第二种方式表示较合理，对于微小变形，二者无区别。

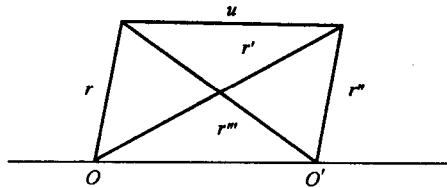


图 1-6 位移示意

1.3.2 应变分量

定义应变时，不考虑整个物体的位移或转动，只考虑形变物体中一点相对于邻近点的位移。

如图 1-7 所示，由 P_1 移到 P'_1 ，其位移分量为 u ， v 和 w ； P_2 为 P_1 的邻近点，由 P_2 移到 P'_2 ，其位移分量为 $u + du$ ， $v + dv$ 和 $w + dw$ ，故两邻近点的相对位移为 du ， dv 和 dw 。

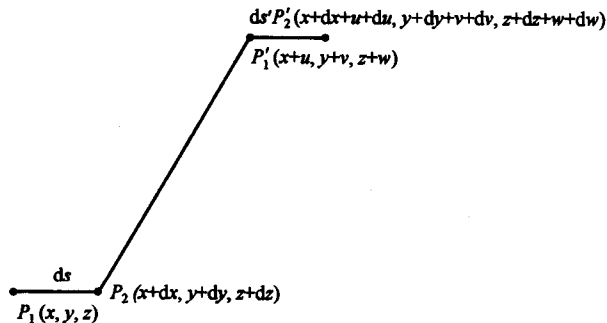


图 1-7 物体位移示意

如 dx ， dy ， dz 是无限小量，则有

$$\begin{aligned} du &= \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz \\ dv &= \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy + \frac{\partial v}{\partial z} dz \\ dw &= \frac{\partial w}{\partial x} dx + \frac{\partial w}{\partial y} dy + \frac{\partial w}{\partial z} dz \end{aligned} \quad (1-16)$$

可看出相对位移决定于 $\frac{\partial u}{\partial x}$ ， $\frac{\partial u}{\partial y}$ ， $\frac{\partial u}{\partial z}$... 等 9 个成分，由上式得

$$\begin{bmatrix} du \\ dv \\ dw \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{bmatrix}$$

位移矩阵 变形矩阵 原始矩阵

现将变形矩阵改写如下

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial v}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix}_I + \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & 0 & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) & 0 \end{bmatrix}_{II} + \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) & 0 & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} \right) & 0 \end{bmatrix}_{III}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e_{xx} = \epsilon_{11}$$

$$\text{矩阵 I 各元素代表线度变形} \quad \frac{\partial v}{\partial y} = e_{yy} = \epsilon_{22} \quad (1-17)$$

$$\frac{\partial w}{\partial z} = e_{zz} = \epsilon_{33}$$

矩阵 II 各元素为剪切形变在 xy , yz 和 zx 三个平面上的分量。

现先研究 xy 平面内的剪切形变分量, 如图 1-8 所示。

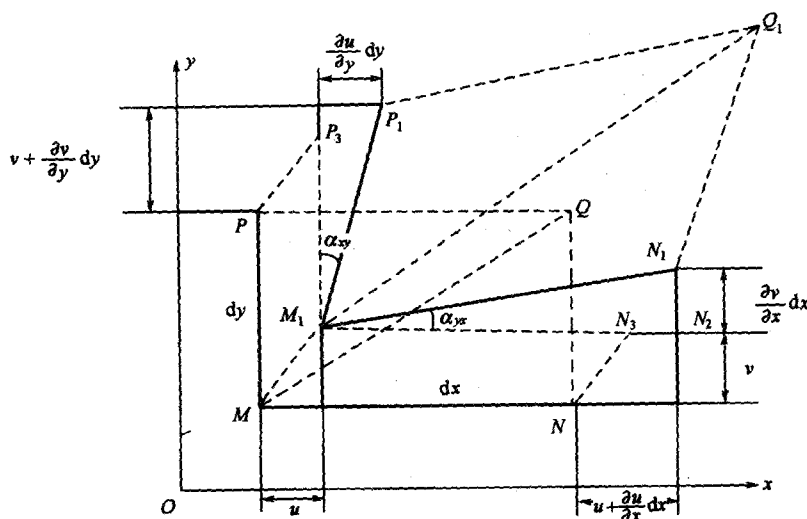


图 1-8 剪切形变示意

MN 与 MP 分别与 x 轴, y 轴平行, 其长度分别为 dx 和 dy , 变形后 MN 移至 M_1N_1 , MP 移至 M_1P_1 , 二线段间直角的改变为 $(\alpha_{yx} + \alpha_{xy})$ 。求这些角时略去在 z 轴方向的位移对它们的影响。