JIEXIJIHE
XITI XUANJIE

王运达 主编

解析几何 习题选解

解析几何习题选解

王运达　主编

辽宁人民出版社
一九八〇年·沈阳

解析几何习题选解
王运达　主编
*
辽宁人民出版社出版
（沈阳市南京街6段1里2号）
辽宁省新华书店发行
朝阳六六七厂印刷
*
开本：787×1092 1/32　印张　9 3/4
字数　220,000　印数　1—300,000
1980年3月第1版　1980年3月第1次印刷
统一书号：7090·75　定价：0.68元

前　言

本书收集了解析几何习题近五百道。这些习题是从几千道习题中精选出来的，主要是几何证明题和轨迹题。可供大学生和中学教师参考；也可供中学生学习提高用。

书中一部分材料选自国外书刊，难度较大。为了便于读者自学，习题都作了解答或给了答案。

本书由王运达主编。傅文章参加了全部编写工作。第一章有赵宝泽参加编写；第二、三章有李可弼参加编写。因我们水平有限，不妥之处一定不少，请同志们批评指正。

本书在编写过程中，得到东北工学院数学教研室的支持。初稿请李芳华副教授和辽宁省实验中学刘国才老师审校过一部分内容。书中插图由张国忠老师绘制。在此，谨向他们表示谢意。

编　者

1979年8月于东北工学院

目　录

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

第一章　平面坐标和直线

§1　平 面 坐 标

提　　要

Ⅰ　直角坐标系

（1）两点间的距离　如果已知两个点 $P_1(x_1,y_1)$，$P_2(x_2,y_2)$，则它们之间的距离为

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} \tag{1·1}$$

（2）分线段成已知比　已知两点$M_1(x_1,y_1)$，$M_2(x_2,y_2)$，点$M(x,\ y)$分线段 M_1M_2 的比为$\frac{M_1M}{MM_2}=\lambda$，则

$$\begin{cases} x=\dfrac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda} \\ y=\dfrac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda} \end{cases} \tag{1·2}$$

若$\lambda>0$，则M为线段 M_1M_2 的内分点；若$\lambda<0$，则M为线段 M_1M_2 的外分点．

当$\lambda=1$时，则M为M_1M_2的中点，从而有

$$\begin{cases} x=\dfrac{x_1+x_2}{2} \\ y=\dfrac{y_1+y_2}{2} \end{cases} \tag{1·3}$$

（3）三角形面积　已知三角形三个顶点为 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，$C(x_3,y_3)$，且 A，B，C 按逆时针顺序排列，则三角形的面积按下面公式计算

$$\Delta=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \tag{1·4}$$

当 C 在原点时，有

$$\Delta=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \tag{1·5}$$

Ⅱ　极坐标系

（1）点的极坐标与直角坐标之间的关系　以极点做原点，取极轴为横轴，设点 M 的直角坐标为 $(x,\ y)$，极坐标为 (ρ,θ)，则有

$$\begin{cases} x=\rho\ \cos\theta \\ y=\rho\ \sin\theta \end{cases} \tag{1·6}$$

和

$$\begin{cases} \rho=\sqrt{x^2+y^2} \\ \theta=\operatorname{arc\,tg}\dfrac{y}{x} \end{cases} \tag{1·7}$$

（2）两点间的距离　已知两点 $A(\rho_1,\ \theta_1)$，$B(\rho_2,\ \theta_2)$，则它们之间的距离为[1]

$$d=\sqrt{\rho_1^2+\rho_2^2-2\rho_1\rho_2\cos(\theta_2-\theta_1)} \tag{1·8}$$

Ⅲ　斜角坐标系

两坐标轴如果不互相垂直，则叫做斜角坐标系，而 x 轴正向和 y 轴正向的夹角 ω 叫做坐标角。

1）　没学过斜角坐标系的读者可不读这一段。

（1）两点间的距离　已知二点$M_1(x_1,y_1)$，$M_2(x_2,y_2)$；则它们之间的距离为

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+2(x_2-x_1)(y_2-y_1)\cos\omega}\quad(1\cdot 9)$$

（2）分线段成已知比　把已知二点 $M_1(x_1,y_1)$ 和 $M_2(x_2,y_2)$ 间的线段分成比为$\frac{M_1M}{MM_2}=\lambda$的点的坐标为

$$\begin{cases}x=\dfrac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}\\ y=\dfrac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}\end{cases}\quad(1\cdot 10)$$

Ⅳ　解析几何证题法

解决解析几何的问题，通常要经过下列几个步骤：

（1）适当地选取坐标系，让已知点、已知直线等的表达式尽量简单；

（2）把已知条件用坐标表达出来；

（3）写出求证的结论；

（4）从已知条件出发，以求证的结论为目标，利用公式，通过运算、变形、整理，使之得到求证的结论。

习　　题

1．分三角形各中线为2:1(从顶点到分点，再到对边中点）的点必重合；即三角形的三中线交于一点，试证之。

〔证〕　设三角形的顶点为$A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,$C(x_3,y_3)$，中线分别为AL、BM、CN．则BC的中点 L 的坐标为

$$\left(\frac{x_2+x_3}{2},\ \frac{y_2+y_3}{2}\right)$$

从而，分 AL 为 2:1 的点的坐标为

$$\begin{cases} x = \dfrac{x_1 + 2\cdot\dfrac{x_2 + x_3}{2}}{1+2} = \dfrac{x_1 + x_2 + x_3}{3} \\ y = \dfrac{y_1 + 2\cdot\dfrac{y_2 + y_3}{2}}{1+2} = \dfrac{y_1 + y_2 + y_3}{3} \end{cases} \qquad (1\cdot11)$$

同理，分 BM和CN为 2:1 的点的坐标与以上结果相同，所以三点重合，即三中线交于一点。

这个点叫做三角形的重心。此题还有别种证法，例如可用三线共点法（参照公式(2·22)。此题结论(1·11)常常用到，应该记住）。

2。证明连接四边形对边中点的二直线与连接两对角线中点的直线三线共点，且互相平分。

〔证〕 设四边形的顶点分别为 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，$C(x_3,y_3)$，$D(x_4,y_4)$，则两对角线中点分别为

$$M\left(\frac{x_1+x_3}{2},\ \frac{y_1+y_3}{2}\right)\text{和}\ N\left(\frac{x_2+x_4}{2},\ \frac{y_2+y_4}{2}\right)$$

AB边的中点为

$$E\left(\frac{x_1+x_2}{2},\ \frac{y_1+y_2}{2}\right)$$

CD边的中点为

$$G\left(\frac{x_3+x_4}{2},\ \frac{y_3+y_4}{2}\right)$$

BC边的中点为

$$F\left(\frac{x_2+x_3}{2},\ \frac{y_2+y_3}{2}\right)$$

DA边的中点为

$$H\left(\frac{x_1+x_4}{2},\ \frac{y_1+y_4}{2}\right)$$

由中点坐标公式(1·3)得EG的中点为

$$\left(\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4},\ \frac{y_1+y_2+y_3+y_4}{4}\right)$$

FH的中点为

$$\left(\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4},\ \frac{y_1+y_2+y_3+y_4}{4}\right)$$

MN的中点为

$$\left(\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4},\ \frac{y_1+y_2+y_3+y_4}{4}\right)$$

三中点的坐标相同，说明三直线 EG、FH、MN 相交于一点，且彼此平分。

3．由任意六边形各边中点每隔一个连以线段做成的两个三角形有同一重心，试证之。

〔证〕 设六边形顶点分别为 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，$C(x_3,y_3)$，$D(x_4,y_4)$，$E(x_5,y_5)$，$F(x_6,y_6)$。因此AB边中点为 $M_1\left(\frac{x_1+x_2}{2},\ \frac{y_1+y_2}{2}\right)$，其他各边中点依次为 $M_2\left(\frac{x_2+x_3}{2}、\frac{y_2+y_3}{2}\right)$，$M_3\left(\frac{x_3+x_4}{2},\ \frac{y_3+y_4}{2}\right)$，$M_4\left(\frac{x_4+x_5}{2},\ \frac{y_4+y_5}{2}\right)$，$M_5\left(\frac{x_5+x_6}{2},\ \frac{y_5+y_6}{2}\right)$，$M_6\left(\frac{x_6+x_1}{2},\ \frac{y_6+y_1}{2}\right)$。

根据式(1·11)得，$\Delta M_1M_3M_5$的重心为

$$\left(\frac{x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6}{6},\frac{y_1+y_2+y_3+y_4+y_5+y_6}{6}\right)$$

而 $\Delta M_2M_4M_6$ 的重心为

$$\left(\frac{x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6}{6},\frac{y_1+y_2+y_3+y_4+y_5+y_6}{6}\right)$$

注：此式也可用三线共点公式(2·22)作。

因此两个三角形有同一重心。

4．已知$A(1,\ 1)$，$B(2,\ 2)$，$C(3,\ -1)$是一个平行四边形的三个顶点，求第四个顶点。

〔证法一〕如图1—1，以A、B、C为三个顶点的平行四边形有三个．设其第四个顶点分别为$D_1(x_1,y_1)$，$D_2(x_2,y_2)$，$D_3(x_3,y_3)$．因为A是D_1D_3的中点，所以有

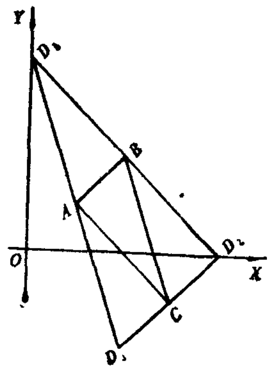

图 1—1

$$\begin{cases}\frac{1}{2}(x_1+x_3)=1\\ \frac{1}{2}(y_1+y_3)=1\end{cases}$$

即
$$\begin{cases}x_1+x_3=2\\ y_1+y_3=2\end{cases} \qquad (1)$$

类似的有

$$\begin{cases}x_1+x_2=4\\ y_1+y_2=4\end{cases} \qquad (2)$$

和

$$\begin{cases}x_2+x_3=6\\ y_2+y_3=2\end{cases} \qquad (3)$$

由（1）、（2）、（3）解得　$D_1(0,4)$，$D_2(4,0)$，$D_3(2,-2)$．

〔证法二〕∵$BD_2 \parallel AC$，$AD_3 \parallel BC$，故通过求BD_2、AD_3的交点也可求得D_1．

〔证法三〕　若AB为对角线时，则CD_1是另一对角线，AB的中点也是CD_1的中点，易得$D_1(0,4)$．同理可得D_2，D_3．

5．求以(4，－1)，(－1，1)，(－2，－5)为各边中点的三角形的各顶点．

〔提示〕　参照前题

答：(5，5)，(3，－7)，(－7，－3)．

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

6. 在直角三角形 ABC 中，角 C 为直角，若 D、E 将斜边 AB 三等分，试证

$$CD^2+CE^2+DE^2=\frac{2}{3}AB^2$$

〔证〕 取 CA 为 x 轴，CB 为 y 轴，C 为原点；又设 A 点为 $(a,\ 0)$，B 点为 $(0,\ b)$，则 E、D 两点坐标分别为

$$\left(\frac{1}{3}a,\quad \frac{2}{3}b\right)和\left(\frac{2}{3}a,\quad \frac{1}{3}b\right)$$

所以

$$CD^2=\left(\frac{2}{3}a\right)^2+\left(\frac{1}{3}b\right)^2=\frac{4}{9}a^2+\frac{1}{9}b^2$$

$$CE^2=\left(\frac{1}{3}a\right)^2+\left(\frac{2}{3}b\right)^2=\frac{1}{9}a^2+\frac{4}{9}b^2$$

$$DE^2=\left(\frac{2}{3}a-\frac{1}{3}a\right)^2+\left(\frac{1}{3}b-\frac{2}{3}b\right)^2=\frac{1}{9}a^2+\frac{1}{9}b^2$$

$$AB^2=(a-0)^2+(0-b)^2=a^2+b^2$$

而 $$CD^2+CE^2+DE^2=\frac{2}{3}(a^2+b^2)$$

故得

$$CD^2+CE^2+DE^2=\frac{2}{3}AB^2$$

7. 设三角形 ABC 的边 BC 的中点为 M，试证 $AB^2+AC^2=2(AM^2+MC^2)$

〔证〕 如图 1—2，取边 BC 在 x 轴上，过 BC 中点 M 的垂线为 y 轴，又设各点坐标为 $B(-l,0)$，$C(l,0)$，$A(a,b)$，则

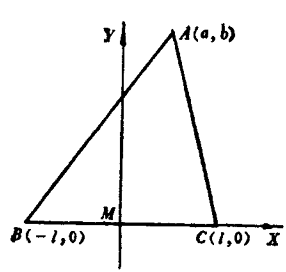

图 1—2

$$AB^2 + AC^2 = 2(a^2 + b^2 + l^2)$$
$$AM^2 + MC^2 = a^2 + b^2 + l^2$$

所以

$$AB^2 + AC^2 = 2(AM^2 + MC^2)$$

8．若四边形$ABCD$对角线的中点为M，N，试证

$$AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = AC^2 + BD^2 + 4MN^2.$$

〔证〕 设四边形$ABCD$的四个顶点坐标分别为$A(0,0)$，$B(x_1,\ y_1)$，$C(x_2,\ y_2)$，$D(x_3,\ y_3)$，则M、N的坐标分别为$\left(\frac{x_2}{2},\ \frac{y_2}{2}\right)$，$\left(\frac{x_1+x_3}{2},\ \frac{y_1+y_3}{2}\right)$．进而得

$$\begin{aligned}
&AC^2 + BD^2 + 4MN^2\\
&= x_2^{\ 2} + y_2^{\ 2} + (x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2\\
&\quad + 4\left[\left(\frac{x_1 + x_3 - x_2}{2}\right)^2 + \left(\frac{y_1 + y_3 - y_2}{2}\right)^2\right]\\
&= 2x_1^{\ 2} + 2x_2^{\ 2} + 2x_3^{\ 2} - 2x_1x_2 - 2x_2x_3 + 2y_1^{\ 2} + 2y_2^{\ 2}\\
&\quad + 2y_3^{\ 2} - 2y_1y_2 - 2y_2y_3 \qquad (1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2\\
&= x_1^{\ 2} + y_1^{\ 2} + (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (x_3 - x_2)^2\\
&\quad + (y_3 - y_2)^2 + x_3^{\ 2} + y_3^{\ 2}\\
&= 2x_1^{\ 2} + 2x_2^{\ 2} + 2x_3^{\ 2} - 2x_1x_2 - 2x_2x_3 + 2y_1 + y_2^{\ 2}\\
&\quad + 2y_3^{\ 2} - 2y_1y_2 - 2y_2y_3 \qquad (2)
\end{aligned}$$

由（1）和（2）得

$$AC^2 + BD^2 + 4MN^2 = AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2$$

9．若三角形的两中线相等，则它们所对应的二边也相等，试证之。

〔证〕 如图1—3，设三角形为ABC，二中线AM、BN相等，取边AB为x轴，取从C点向AB引的垂线为y轴，又设

$OA=a$，$OB=b$，$OC=c$，则各顶点为$A(a,0)$，$B(-b,0)$，$C(0,c)$。因此 AC、BC 的中点分别为 $N\left(\frac{a}{2},\ \frac{c}{2}\right)$，$M\left(-\frac{b}{2},\ \frac{c}{2}\right)$，故

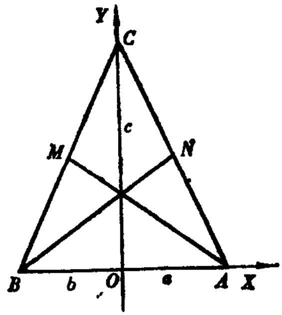

图 1—3

$$AM^2$$
$$=\left(a+\frac{b}{2}\right)^2+\left(0-\frac{c}{2}\right)^2$$
$$=a^2+ab+\frac{1}{4}b^2+\frac{1}{4}c^2.$$

$$BN^2=\left(-b-\frac{a}{2}\right)^2+\left(0-\frac{c}{2}\right)^2$$
$$=b^2+ba+\frac{1}{4}a^2+\frac{1}{4}c^2。$$

由题意　$AM^2=BN^2$

$$\therefore\quad a^2-ab+\frac{1}{4}b^2+\frac{1}{4}c^2=b^2-ba+\frac{1}{4}a^2+\frac{1}{4}c^2$$

即得　$a^2=b^2$

又$\because$　$AC^2=a^2+c^2=b^2+c^2=BC^2$

$\therefore$　$AC=BC$

注：把已知直线，已知点尽量取在坐标轴上时，A、B、C的坐标简单，从而M、N的坐标也就简单些。如设各顶点的坐标为 $A(2a,0)$，$B(2b,0)$，$C(0,2c)$，则M、N的坐标就更简单了。

10．设 $\triangle ABC$ 的三个顶点的坐标分别为 $A(8,0)$，$B(5,9)$，$C(-3,11)$，试求此三角形外接圆的圆心。

〔解〕　设外接圆的圆心为$M(x,y)$，由题意得

$$MA^2=MB^2=MC^2$$

$$\begin{cases}(x-8)^2+y^2=(x-5)^2+(y-9)^2 \\ (x-8)^2+y^2=(x+3)^2+(y-11)^2\end{cases}$$

即 $$\begin{cases}x-3y+7=0 \\ x-y+3=0\end{cases}$$

解之得 $x=-1$，$y=2$。故外接圆的圆心为（-1，2）。

注：本题的另一解法是写出 AB、BC 的中垂线方程，求其交点坐标可得外接圆的圆心。

11．求顺次联结点（3，2），（-1，2），（-3，-1），（0，-2），（4,0）所得的五边形的面积。

〔解〕 设已知点为$P_1(3,2)$，$P_2(-1,2)$，$P_3(-3,-1)$，$P_4(0,-2)$，$P_5(4,0)$，在坐标平面上画出五个点 P_1、P_2、P_3、P_4、P_5，则五边形面积为

$$\text{五边形}P_1P_2P_3P_4P_5\text{面积}=(\triangle OP_1P_2+\triangle OP_2P_3+\triangle OP_3P_4+\triangle OP_4P_5+\triangle OP_5P_1)\text{的面积}.$$

应用公式（1·5）得

$$\begin{aligned}\text{五边形}P_1P_2P_3P_4P_5\text{面积}&=\frac{1}{2}\left\{\begin{vmatrix}3 & 2\\ -1 & 2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}-1 & 2\\ -3 & -1\end{vmatrix}\right.\\ &\quad+\begin{vmatrix}-3 & -1\\ 0 & -2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}0 & -2\\ 4 & 0\end{vmatrix}\\ &\quad\left.+\begin{vmatrix}4 & 0\\ 3 & 2\end{vmatrix}\right\}\\ &=\frac{1}{2}\left\{(6+2)+(1+6)+(6-0)\right.\\ &\quad\left.+(0+8)+(8-0)\right\}\\ &=\frac{37}{2}\end{aligned}$$

12．试证平行四边形的对角线互相平分。

〔证法一〕 如图1—4，取A在原点，AB在x轴上，设B的坐标为$(a,0)$，CD的方程是$y=b=$常数；AD的方程为$y=kx$，与它平行的BC的方程为$y=k(x-a)$。由$\begin{cases}y=kx\\y=b\end{cases}$

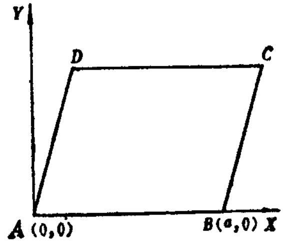

图 1—4

解得 $x=\dfrac{b}{k}$，$y=b$

即 $D\left(\dfrac{b}{k},\ b\right)$

又由 $\begin{cases}y=k(x-a)\\y=b\end{cases}$

解得 $x=a+\dfrac{b}{k}$，$y=b$，即 $C\left(a+\dfrac{b}{k},\ b\right)$。

由中点公式得DB的中点E和AC的中点F为

$$E\left(\frac{ka+b}{2k},\ \frac{b}{2}\right),\quad F\left(\frac{ka+b}{2k},\ \frac{b}{2}\right)$$

得证。

〔证法二〕 设平行四边形$ABCD$的顶点坐标分别为$A(0,0)$，$B(a,0)$，$C(x_1+a,y_1)$，$D(x_1,y_1)$，则AC的中点为$\left(\dfrac{x_1+a}{2},\ \dfrac{y_1}{2}\right)$，$BD$的中点也为$\left(\dfrac{x_1+a}{2},\ \dfrac{y_1}{2}\right)$证毕。

〔证法三〕 如图1—5，设平行四边形为$ABCD$，取AB边在x轴上，AD边在y轴上，建立斜角坐标系，并设$AB=a$，$AD=b$，则顶点为$A(0,0)$，$B(a,0)$，$C(a,b)$，$D(0,b)$，所

以 AC 的中点为$\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right)$，

BD 的中点为

$\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right)$。故得证。

从此题三种证法可以看到，由于方法不同解题的繁简情况。

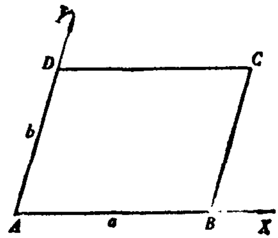

图 1—5

§2 直　　线

提　　要

I　直角坐标系中的直线方程

（1）直线的斜率

若直线的倾角为 α，则此直线的斜率为

$$k = \operatorname{tg}\alpha$$

若直线过两个已知点 $P_1(x_1, y_1)$，$P_2(x_2, y_2)$，则此直线斜率为

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \qquad (2\cdot1)$$

由直线的一般式方程 $Ax + By + C = 0$，可求得斜率为

$$k = -\frac{A}{B} \qquad (B \neq 0)$$

$$k = \infty, \qquad \alpha = \pm\frac{\pi}{2} \qquad (B = 0)$$

（2）直线方程的各种形式

一般式　$Ax + By + C = 0$　　(2·2)

点斜式　$y - y_0 = k(x - x_0)$　　(2·3)

斜截式　$y = kx + b$　　(2.4)

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com