

高等学校试用教材

结构力学

下 册

清华大学结构力学教研组编
龙驭球 包世华 主编

人民教育出版社

高等学校试用教材

结 构 力 学

下 册

清华大学结构力学教研组编

龙驭球 包世华 主编

人 民 教 育 出 版 社

内 容 提 要

本书是根据一九七七年十一月教育部委托召开的高等学校工科力学教材会议讨论的《结构力学》编写大纲编写的,适用于五年制土建、水利类专业。

全书共十三章,分上、下两册。上册讨论静定结构和超静定结构的基本计算方法,包括:绪论和构造分析、静定结构的受力分析、虚功原理和结构的位移计算、力法、位移法、渐近法和近似法、影响线以及结构的计算简图和计算方法等八章。下册讨论结构分析中的能量方法、矩阵方法和几个专题,包括:能量原理、结构矩阵分析、结构的动力计算、结构的稳定计算以及结构的塑性分析和极限荷载等五章。关于弹性地基梁的计算的内容,考虑到教学上的方便,将单独成册,另行出版。

本书作为五年制土建、水利类专业的试用教材,也可供其他专业和有关工程技术人员参考。

高等学校试用教材

结 构 力 学

下 册

清华大学结构力学教研组编

龙驭球 包世华 主编

*

人民教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

肇东印刷厂印装

*

开本 787×1092 1/16 印张 23 字数 520,000

1981年3月第1版 1981年8月第1次印刷

印数 00,001—18,500

书号 15012·0311 定价 1.90 元

目 录

第九章 能量原理	1
§ 9-1 概述.....	1
§ 9-2 应变能和应变余能.....	1
§ 9-3 势能驻值原理和卡氏第一定理.....	8
§ 9-4 势能驻值原理和位移法.....	14
§ 9-5 瑞雷-里兹法.....	16
§ 9-6 余能偏导数公式和克罗第-恩格塞定理.....	23
§ 9-7 余能驻值原理和力法.....	27
* § 9-8 混合能量原理和混合法.....	31
习题.....	38
第十章 结构矩阵分析	43
§ 10-1 概述.....	43
§ 10-2 单元分析.....	43
§ 10-3 矩阵位移法的基本概念.....	49
§ 10-4 平面刚架矩阵分析.....	57
§ 10-5 平面刚架矩阵分析举例.....	75
* § 10-6 空间刚架矩阵分析.....	88
§ 10-7 应用能量原理进行单元分析.....	93
§ 10-8 应用能量原理进行整体分析.....	99
* § 10-9 子结构的应用.....	103
* § 10-10 刚架-剪力墙结构的计算.....	112
习题.....	122
第十一章 结构的动力计算	129
§ 11-1 概述.....	129
§ 11-2 单自由度体系的自由振动.....	133
§ 11-3 单自由度体系的强迫振动.....	140
§ 11-4 阻尼对振动的影响.....	150
§ 11-5 多自由度体系的自由振动.....	156
1. 刚度法.....	157
2. 柔度法.....	166
§ 11-6 多自由度体系主振型的正交性和正则坐标.....	170
1. 主振型的正交性.....	170
*2. 频率方程具有重根的情况.....	174
3. 主振型矩阵和正则坐标.....	174
§ 11-7 多自由度体系的强迫振动.....	177

1. 简谐荷载下的振动	177
2. 一般荷载下的振动——主振型叠加法	179
* § 11-8 无限自由度体系的自由振动	183
1. 梁的弯曲自由振动	184
2. 杆件的剪切、轴向、扭转自由振动	187
3. 主振型的正交性	190
* § 11-9 无限自由度体系的强迫振动	192
1. 简谐荷载下的振动	192
2. 一般荷载下的振动——主振型叠加法	196
§ 11-10 能量法求自振频率	200
1. 能量法求第一频率——瑞雷法	200
2. 能量法求最初几个频率——瑞雷-里兹法	205
§ 11-11 集中质量法求自振频率	209
1. 静力等效的集中质量法	209
*2. 动能等效的集中质量法	210
*3. 转移质量法	211
§ 11-12 迭代法求自振频率和主振型	213
1. 迭代法求第一主振型和第一频率	214
*2. 收敛性的证明	215
*3. 迭代法求高阶主振型和高阶频率	216
* § 11-13 刚架的振动	219
1. 简谐弯曲振动时杆件的刚度方程(精确形式)	219
2. 简谐弯曲振动时杆件的刚度方程(近似形式)	220
3. 简谐轴向振动时杆件的刚度方程(近似形式)	222
4. 用位移法求刚架的自振频率	223
5. 用有限元位移法求刚架的自振频率	224
* § 11-14 弹塑性体系的振动	227
1. 弹塑性振动基本方程的建立	227
2. 逐步积分法	230
* § 11-15 结构抗震计算概述	234
1. 单自由度体系地震荷载的计算原理	234
2. 多质点体系地震荷载的近似算法	239
3. 多自由度体系地震荷载的确定	240
习题	243
附录	251
*第十二章 结构的稳定计算	254
§ 12-1 单自由度体系的稳定计算	254
§ 12-2 多自由度体系的稳定计算	256
§ 12-3 静力法分析压杆稳定	260
§ 12-4 能量法分析压杆稳定	264
§ 12-5 压杆的刚度方程	270
§ 12-6 刚架的稳定	276
1. 位移法	276

2. 有限元位移法	280
§ 12-7 组合杆的稳定	283
* § 12-8 拱的稳定	288
* § 12-9 梁的侧向稳定	295
* § 12-10 弹性极限后的稳定	300
习题	306
附录	311
*第十三章 结构的塑性分析和极限荷载	317
§ 13-1 概述	317
§ 13-2 静定梁的弹塑性计算	318
1. 理想弹塑性材料——纯弯曲	318
2. 理想弹塑性材料——横向弯曲	321
3. 一般非线性材料	324
§ 13-3 超静定梁的极限荷载	327
§ 13-4 比例加载时判定极限荷载的一般定理	331
§ 13-5 刚架的极限荷载	333
§ 13-6 矩阵位移法求刚架的极限荷载	336
§ 13-7 轴力和剪力对极限弯矩的影响	343
习题	345
附录 习题答案	348

第九章 能量原理

§ 9-1 概 述

在结构分析中,有两种解法:

第一种解法是直接应用平衡条件、几何变形条件和物理条件来求解结构的内力和位移。这种解法叫做物理-几何方法,在静力分析中也叫做静力法。

第二种解法是把平衡条件或几何条件用相应的功能原理来代替。这种解法叫做功能方法或叫做能量法。

能量法在结构力学中占有重要地位。在第三章中应用虚功原理求内力和位移,在第七章中应用机动法作影响线,这些都是在结构分析中成功地运用能量法的例子。在后面几章中,我们还将运用能量法来讨论动力和稳定问题,并推导有限元法中的刚度矩阵。

在静力法中有两个基本方法:位移法(又叫做平衡法、刚度法)和力法(又叫做协调法、柔度法)。与此对应,在能量原理中也有两类基本原理:与位移法相关的是势能原理(与卡氏第一定理),与力法相关的是余能原理(与卡氏第二定理)。除此之外,还有混合法以及与之相关的混合能量原理。在这些能量原理的基础上还可以提出更具有一般性的广义变分原理。

本章先由虚位移原理导出势能原理,并与位移法相对照;然后由虚力原理导出余能原理,并与力法相对照。最后简略地提一下混合能量原理。

能量原理除用来求精确解外,最适合于用来求复杂问题的近似解。为此,本章将介绍一种基于能量原理的近似解法,即瑞雷-里兹法。

§ 9-2 应变能和应变余能

在讨论各种能量原理之前,先说明弹性体的应变能与应变余能的概念。

关于弹性的含义,需要说明两点。第一,弹性体的应力-应变关系应是单值函数关系。如果物体在卸载时的变形特性与加载时的不同,则应力与应变之间已不是单值函数关系,这种非弹性情况我们在这里不予考虑。第二,弹性体的应力-应变关系可以是线性的或非线性的,前者称为线性弹性体,后者称为非线性弹性体。

设弹性体在加载过程中,动能和热能都没有变化,则荷载所做的功全部以应变能的形式贮存在物体中;因此弹性体中贮存的应变能即等于荷载所作的功。

1. 线性弹性体的应变能

在材料力学中已经讨论过线性弹性体的应变能。现将杆件承受拉、压、弯、剪、扭等变形时应变能 U 的表示式整理如下(设杆长为 l , 截面面积为 A , 弹性模量为 E 和 G):

(1) 拉伸应变能

$$U = \frac{l}{2EA} N^2 = \frac{EA}{2l} \lambda^2 \quad (9-1)$$

式中 N 是轴力, λ 是伸长量, EA 是截面抗拉刚度。

(2) 弯曲应变能

$$U = \int_0^l \frac{M^2}{2EI} dx = \int_0^l \frac{EI \kappa^2}{2} dx \quad (9-2)$$

式中 M 是弯矩, κ 是曲率, EI 是截面抗弯刚度。

(3) 剪切应变能

梁受横向弯曲时, 除有弯曲应变能外, 还有剪切应变能如下:

$$U = \int_0^l \frac{kQ^2}{2GA} dx = \int_0^l \frac{GA \gamma_0^2}{2k} dx \quad (9-3)$$

式中 Q 是剪力, γ_0 是平均剪应变, $\frac{GA}{k}$ 是截面抗剪刚度, k 是与截面上剪应力分布规律有关的系数。

梁中的剪切应变能比弯曲应变能要小, 通常可以忽略不计。

(4) 圆轴扭转应变能

$$U = \frac{l}{2GI_p} M_n^2 = \frac{GI_p}{2l} \varphi^2 \quad (9-4)$$

式中 M_n 是扭矩, φ 是扭转角, GI_p 是圆轴截面抗扭刚度, I_p 是截面极惯性矩。

2. 非线性弹性体的应变能

现在讨论弹性体的应力与应变之间为非线性关系的情况。先考虑图 9-1a 所示的单向受力状态。设微小单元的长度为 dx , 截面面积为 dA , 截面上作用正应力 σ , 应力-应变曲线如图 9-1b 所示。当应变有微小增量 $d\varepsilon$ 时, 外力所做的功为

$$(\sigma dA)(d\varepsilon \cdot dx) = \sigma d\varepsilon \cdot dV$$

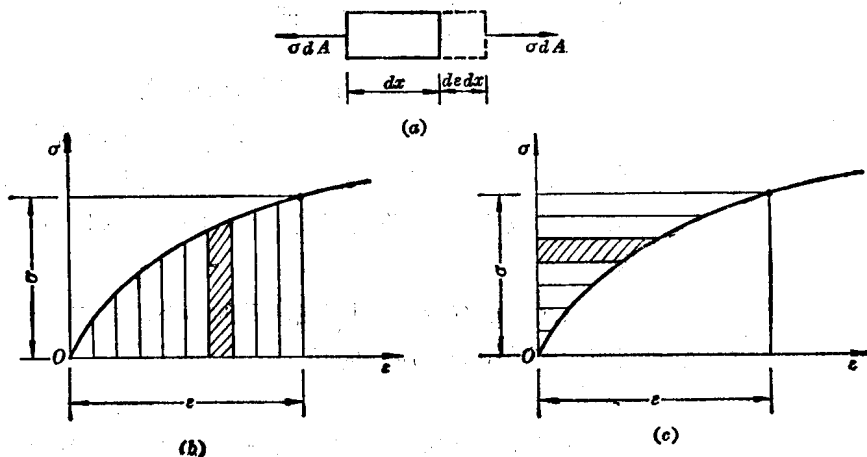


图 9-1

这里 dV 是单元的体积。在应变由零增到 ε 的过程中,单元中贮存的应变能为

$$dU = \left(\int_0^\varepsilon \sigma d\varepsilon \right) \cdot dV$$

令 u 表示单位体积内的应变能(称为应变能密度),则

$$u = \frac{dU}{dV} = \int_0^\varepsilon \sigma d\varepsilon \quad (9-5)$$

上式中的积分表示图 9-1b 中应力-应变曲线与横坐标之间的面积。

根据应变能密度 u , 可求得整个弹性体的应变能如下:

$$U = \int_V u dV = \int_V \left(\int_0^\varepsilon \sigma d\varepsilon \right) dV \quad (9-6)$$

如果弹性体处于复杂应力状态,则应变能应为各应力分量引起的应变能的总和,即

$$U = \int_V \left(\sum \int_0^\varepsilon \sigma d\varepsilon \right) dV \quad (9-7)$$

下面给出杆件拉伸和弯曲时应变能的表示式。

(1) 拉伸应变能

设杆件的轴力为 N , 伸长量为 λ , 则 $\sigma = \frac{N}{A}$, $\varepsilon = \frac{\lambda}{l}$, 代入式(9-6), 得

$$U = \int_0^l \int_A \left(\int_0^\varepsilon \sigma d\varepsilon \right) dA dx = \int_0^l \int_A \left(\int_0^\lambda \frac{N}{A} \frac{d\lambda}{l} \right) dA dx = \int_0^l N d\lambda \quad (9-8)$$

(2) 弯曲应变能

设梁的截面弯矩为 M , 曲率为 κ , 则:

$$\varepsilon = \kappa y, \quad \int_A \sigma y dA = M$$

由式(9-6), 得

$$\begin{aligned} U &= \int_0^l \int_A \left(\int_0^\varepsilon \sigma d\varepsilon \right) dA dx = \int_0^l \left[\int_A \left(\int_0^\varepsilon \sigma y d\kappa \right) dA \right] dx \\ &= \int_0^l \left[\int_0^\varepsilon \left(\int_A \sigma y dA \right) d\kappa \right] dx = \int_0^l \left(\int_0^\varepsilon M d\kappa \right) dx \end{aligned} \quad (9-9)$$

3. 应变余能

应变余能又称作应力能, 用 U^* 表示。单位体积的应变余能称作应变余能密度, 用 u^* 表示。

仿照应变能密度 u 的定义(式(9-5)), 应变余能密度可定义为

$$u^* = \int_0^\sigma \varepsilon d\sigma \quad (9-10)$$

上式中的积分代表图 9-1c 中应力-应变曲线与纵坐标之间的面积。由图 9-1b 和 c 看出, 面积 u 与面积 u^* 正好合成一个矩形面积, 即

$$u + u^* = \sigma \varepsilon$$

因此, 对于矩形面积 $\sigma \varepsilon$ 来说, u^* 是 u 的余数, 这就是“余能”这个名称的由来。

根据应变余能密度 u^* , 即可求得整个杆件的应变余能 U^* :

$$U^* = \int_V u^* dV = \int_V \left(\int_0^\sigma \varepsilon d\sigma \right) dV \quad (9-11)$$

在复杂应力状态下, 则

$$U^* = \int_V \left(\Sigma \int_0^\sigma \varepsilon d\sigma \right) dV \quad (9-12)$$

下面给出杆件拉伸和弯曲时应变余能的表示式。

(1) 拉伸应变余能

$$U^* = \int_0^N \lambda dN \quad (9-13)$$

(2) 弯曲应变余能

$$U^* = \int_0^l \left(\int_0^M \kappa dM \right) dx \quad (9-14)$$

如果材料是线性弹性, 图 9-1b 和 c 中的应力-应变曲线为一直线, 则 u 与 u^* 彼此相等, U 与 U^* 彼此也相等。应当注意, 这时两个能量虽然在数值上彼此相等, 但在概念上却仍然不同, 在应用时仍须加以区别。

4. 具有初应变的情况

仍考虑单向受力状态。设材料具有初应变, 应力-应变曲线如图 9-2 所示。当应力为零时, 初应变为 ε_0 ; 当应力为 σ 时, 由应力引起的应变为 ε , 总应变为 $e = \varepsilon_0 + \varepsilon$ 。

图 9-2 中的应力-应变曲线与横坐标之间的面积定义为应变能密度 u , 应力-应变曲线与纵坐标之间的面积定义为应变余能密度 u^* , 即:

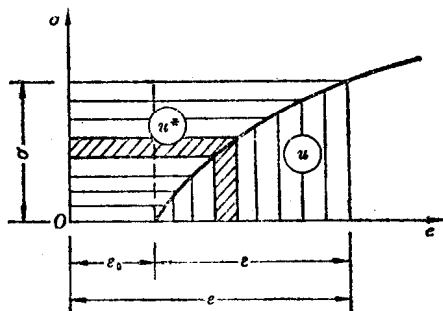


图 9-2

$$u = \int_0^\varepsilon \sigma d\varepsilon \quad (9-15)$$

$$u^* = \varepsilon_0 \sigma + \int_0^\sigma \varepsilon d\sigma \quad (9-16)$$

由此可得出整个弹性体的应变能和应变余能如下:

$$U = \int_V \left(\int_0^\varepsilon \sigma d\varepsilon \right) dV \quad (9-17)$$

$$U^* = \int_V \left(\varepsilon_0 \sigma + \int_0^\sigma \varepsilon d\sigma \right) dV \quad (9-18)$$

将式(9-17)、(9-18)与无初应变时的式(9-6)、(9-11)比较, 可知初应变对应变能 U 没有影响, 只对应变余能 U^* 有影响。因此, 下面只对应变余能作进一步的讨论。

在复杂应力状态下,

$$U^* = \int_V \Sigma \left(\varepsilon_0 \sigma + \int_0^\sigma \varepsilon d\sigma \right) dV \quad (9-19)$$

在线性弹性体中,

$$U^* = \int_V \Sigma \left(\epsilon_0 \sigma + \frac{\epsilon \sigma}{2} \right) dV \quad (9-20)$$

杆件拉伸和弯曲时, 初应变对应变余能的影响可给出如下:

(1) 拉伸应变余能

$$U^* = \lambda_0 N + \int_0^N \lambda dN \quad (9-21)$$

式中 λ_0 是杆件的初始伸长量, λ 是由轴力 N 引起的杆件伸长量。对于线性弹性体来说, 则为

$$U^* = \lambda_0 N + \frac{N^2 l}{2EA} \quad (9-22)$$

(2) 弯曲应变余能

$$U^* = \int_0^l \left(\kappa_0 M + \int_0^M \kappa dM \right) dx \quad (9-23)$$

式中 κ_0 是截面的初始曲率, κ 是由弯矩 M 引起的曲率。对于线性弹性体来说, 则为

$$U^* = \int_0^l \left(\kappa_0 M + \frac{M^2}{2EI} \right) dx \quad (9-24)$$

例 9-1 试求图 9-3 所示结构在荷载 P_1 作用下的应变能 U 和应变余能 U^* 。

(1) 设材料为线性弹性, $\sigma = E\epsilon$, $N = \frac{AE}{l}\lambda$;

(2) 设材料为非线性弹性, $\sigma = B\sqrt{\epsilon}$, $N = \frac{AB}{\sqrt{l}}\sqrt{\lambda}$ 。

解: 由平衡条件可知两杆轴力相等, 其值为

$$N_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} P_1 \quad (a)$$

(1) 线性弹性情况

这时 $U = U^*$, 结构的应变能等于两个杆件的应变能的总和, 由式(9-1)得

$$U = U^* = 2 \times \frac{N_1^2 l}{2EA} = \frac{P_1^2 l}{2EA} \quad (b)$$

(2) 非线性弹性情况

两杆应变能总和可由式(9-8)求出:

$$U = 2 \int_0^{N_1} N d\lambda$$

由于 $N = \frac{AB}{\sqrt{l}}\sqrt{\lambda}$, $\lambda = \frac{N^2 l}{A^2 B^2}$, 故

$$U = \frac{2AB}{\sqrt{l}} \int_0^{N_1} \sqrt{\lambda} d\lambda = \frac{4AB}{3\sqrt{l}} \lambda_1^{3/2} = \frac{4l}{3A^2 B^2} N_1^3 = \frac{\sqrt{2} l}{3A^2 B^2} P_1^3 \quad (c)$$

两杆应变余能总和可由式(9-13)求出:

$$U^* = 2 \int_0^{N_1} \lambda dN = \frac{2l}{A^2 B^2} \int_0^{N_1} N^2 dN = \frac{2l}{3A^2 B^2} N_1^3 = \frac{\sqrt{2} l}{6A^2 B^2} P_1^3 \quad (d)$$

(3) 讨论

在线性情况下, $U = U^*$, 并且它们是荷载 P_1 的二次式。

在非线弹性情况下, $U \neq U^*$, 它们都不是荷载 P_1 的二次式。在本例中, $U = 2U^*$, 它们都是 P_1 的三次式。

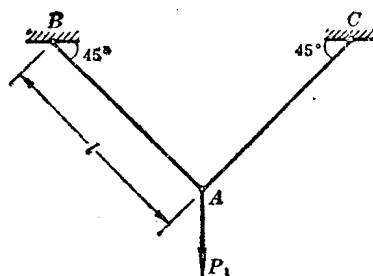


图 9-3

例 9-2 图 9-4 所示为一矩形截面悬臂梁, 在自由端处承受集中荷载 P_1 , 试求此梁的应变能 U 和应变余能 U^* 。

(1) 设材料为线性弹性, $\sigma = E\varepsilon$;

(2) 设材料为非线性弹性, $\sigma = B\sqrt{\varepsilon}$, 对于拉伸和压缩, 此方程均相同 (σ 和 ε 取绝对值)。

解: 任一截面 C 的弯矩为

$$M_1 = P_1 x$$

(1) 线性情况

由式 (9-2), 得

$$U = U^* = \frac{P_1^2}{2EI} \int_0^l x^2 dx = \frac{P_1^2 l^3}{6EI} \quad (b)$$

(2) 非线性情况

已知应力与应变的关系为

$$\sigma = B\sqrt{\varepsilon}$$

又应变与曲率 κ 的关系为

$$\varepsilon = y\kappa$$

因此, 应力、弯矩与曲率的关系为

$$\sigma = B\sqrt{y}\sqrt{\kappa}$$

$$M = 2 \int_0^{h/2} y \sigma b dy = 2Bb\sqrt{\kappa} \int_0^{h/2} y^{3/2} dy = \frac{Bbh^{5/2}}{5\sqrt{2}} \sqrt{\kappa} \quad (c)$$

又

$$\kappa = \frac{5}{B^2 b^2 h^5} M^2 \quad (d)$$

梁的弯曲应变能可由式 (9-9) 计算, 即

$$U = \int_0^l \left[\int_0^{\kappa_1} M d\kappa \right] dx \quad (e)$$

其中

$$\int_0^{\kappa_1} M d\kappa = \frac{Bbh^{5/2}}{5\sqrt{2}} \int_0^{\kappa_1} \sqrt{\kappa} d\kappa = \frac{\sqrt{2}}{15} Bbh^{5/2} \kappa_1^{3/2}$$

利用式 (d) 和 (a), 得

$$\int_0^{\kappa_1} M d\kappa = \frac{100}{3} \frac{M_1^3}{B^2 b^2 h^5} = \frac{100}{3} \frac{P_1^3 x^3}{B^2 b^2 h^5} \quad (f)$$

将式 (f) 代入式 (e), 得

$$U = \frac{25}{3} \frac{P_1^3 l^4}{B^2 b^2 h^5} \quad (g)$$

应变余能可由式 (9-14) 计算, 其中

$$\int_0^{M_1} \kappa dM = \frac{50}{B^2 b^2 h^5} \int_0^{M_1} M^2 dM = \frac{50}{3B^2 b^2 h^5} P_1^3 x^3$$

代入式 (9-14), 得

$$U^* = \frac{25}{6B^2 b^2 h^5} P_1^3 l^4 \quad (h)$$

例 9-3 图 9-5 所示为一线性弹性等截面杆, 线刚度 $i = \frac{EI}{l}$, 两端有角位移 θ_1, θ_2 和相对线位移 Δ , 试求杆件的应变能。

解: 设端点位移分别由零增大至 $\theta_1, \theta_2, \Delta$, 彼此的比值保持不变。与此同时, 相应的力也分别由零增大至 M_1, M_2, Q 。杆件的应变能即等于杆端力在杆端位移上所做的功。在线性弹性的情况下, 其值为

$$U = \frac{1}{2}(M_1\theta_1 + M_2\theta_2 + Q\Delta)$$

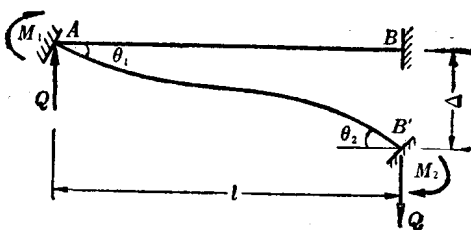


图 9-5

利用下列刚度公式:

$$\left. \begin{aligned} M_1 &= 4i\theta_1 + 2i\theta_2 - 6i\frac{\Delta}{l} \\ M_2 &= 2i\theta_1 + 4i\theta_2 - 6i\frac{\Delta}{l} \\ Q &= -\frac{6i}{l}(\theta_1 + \theta_2) + \frac{12i}{l^2}\Delta \end{aligned} \right\} \quad (9-25)$$

即得
$$U = 2i\left[\theta_1^2 + \theta_1\theta_2 + \theta_2^2 - 3(\theta_1 + \theta_2)\frac{\Delta}{l} + 3\left(\frac{\Delta}{l}\right)^2\right] \quad (9-26)$$

值得注意, 由于应变能是位移参数的二次式, 故叠加原理一般不适用。例如, 三个位移 $\theta_1, \theta_2, \Delta$ 共同引起的 U 并不等于它们单独引起的 U 的总和。

例 9-4 图 9-5 所示线性弹性等截面杆, 除有杆端位移 $\theta_1, \theta_2, \Delta$ 外, 在跨中还有荷载 P 作用, 求杆件的应变能。

解: 梁中任一截面的弯矩 $M(x)$ 可看作由两部分组成:

$$M(x) = \bar{M}(x) + M_P(x)$$

其中 $\bar{M}(x)$ 是单独由于杆端位移引起的弯矩(图 9-5), $M_P(x)$ 是两端固定梁由跨中荷载 P 引起的弯矩(图 9-6)。

杆件的应变能可按式(9-2)计算:

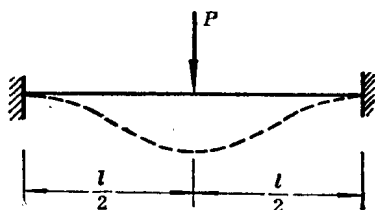


图 9-6

$$U = \frac{1}{2EI} \int_0^l M^2 dx = \frac{1}{2EI} \int_0^l (\bar{M} + M_P)^2 dx = \frac{1}{2EI} \left[\int_0^l \bar{M}^2 dx + \int_0^l M_P^2 dx + 2 \int_0^l \bar{M} M_P dx \right] \quad (i)$$

上式最末一个积分实际上等于零。为了证明这个结果, 可令图 9-5 中的力系在图 9-6 中的位移上作虚功。这里由于图 9-6 中两端位移为零, 故图 9-5 中两端外力所作的外力虚功等于零, 因而内力的变形虚功也应等于零, 即

$$\int_0^l \bar{M} M_P dx = \frac{1}{EI} \int_0^l \bar{M} M_P dx = 0 \quad (j)$$

由于这个积分为零, 故 U 的表示式(i)简化为

$$U = \frac{1}{2EI} \int_0^l \bar{M}^2 dx + \frac{1}{2EI} \int_0^l M_P^2 dx \quad (9-27)$$

虽然计算应变能时, 一般不能应用叠加原理, 但由于式(j)这个特殊条件, 故在式(9-27)中, 计算 U 时仍可采用叠加原理。即由 $M = \bar{M} + M_P$ 所引起的应变能等于分别由 $\bar{M}$ 和 M_P 单独引起的应变能的总和。

式(9-27)右边第一个积分可按式(9-26)计算, 故式(9-27)可写成

$$U = 2i\left[\theta_1^2 + \theta_1\theta_2 + \theta_2^2 - 3(\theta_1 + \theta_2)\frac{\Delta}{l} + 3\left(\frac{\Delta}{l}\right)^2\right] + \frac{1}{2EI} \int_0^l M_P^2 dx \quad (9-28)$$

§ 9-3 势能驻值原理和卡氏第一定理

1. 结构的势能

设结构上作用荷载 $P_1, P_2, \dots, P_n$ 。结构在某一位移状态中与荷载 P_i 相应的位移为 Δ_i ，则结构在此位移状态中的外力势能定义为

$$- \sum_{i=1}^n P_i \Delta_i$$

外力势能与应变能 U 的总和称为结构的势能 Π (或称为总势能):

$$\Pi = U - \sum_{i=1}^n P_i \Delta_i \quad (9-29)$$

势能表示式(9-29)既适用于线性弹性结构,也适用于非线性弹性结构。

例 9-5 图 9-3 所示结构在荷载 P_1 作用下处于平衡,试求结构在平衡状态下的势能。考虑线性弹性和非线性弹性两种情况。

解:

(1) 线性情况

在线性情况下, $\sigma = E\varepsilon$

在荷载 P_1 作用下,杆件的轴力 N_1 和伸长量 λ_1 分别为:

$$N_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} P_1$$

$$\lambda_1 = \frac{N_1 l}{EA} = \frac{\sqrt{2} P_1 l}{2EA}$$

结点 A 的竖向位移 Δ_1 为

$$\Delta_1 = \sqrt{2} \lambda_1 = \frac{P_1 l}{EA}$$

在平衡状态下荷载的势能为

$$-P_1 \Delta_1 = -\frac{P_1^2 l}{EA}$$

内力势能在例 9-1 中已求得为

$$U = \frac{P_1^2 l}{2EA}$$

因此,在平衡状态下结构的势能为

$$\Pi = U - P_1 \Delta_1 = \frac{P_1^2 l}{2EA} - \frac{P_1^2 l}{EA} = -\frac{P_1^2 l}{2EA}$$

如果用位移表示,则结构势能和应变能分别为:

$$\Pi = -\frac{EA \Delta_1^2}{2l}, \quad U = \frac{EA \Delta_1^2}{2l}$$

还可看出,

$$\Pi = -U$$

这是线性弹性体在平衡状态下所固有的特征。

(2) 非线性情况

在非线性情况下, $\sigma = B\sqrt{\varepsilon}$

在荷载 P_1 作用下, 杆的轴力、应力、应变和伸长量分别为:

$$N_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} P_1, \quad \sigma_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{P_1}{A},$$

$$\epsilon_1 = \left(\frac{\sigma_1}{B} \right)^2 = \frac{P_1^2}{2B^2 A^2}, \quad \lambda = \epsilon_1 l = \frac{P_1^2 l}{2B^2 A^2}$$

结点 A 的竖向位移 Δ_1 为

$$\Delta_1 = \sqrt{2} \lambda_1 = \frac{\sqrt{2} P_1^2 l}{2B^2 A^2}$$

在平衡状态下荷载的势能为

$$-P_1 \Delta_1 = -\frac{\sqrt{2} P_1^3 l}{2B^2 A^2}$$

内力势能在例 9-1 中已求得为

$$U = \frac{\sqrt{2} P_1^3 l}{3B^2 A^2}$$

因此, 在平衡状态下结构的势能为

$$\Pi = U - P_1 \Delta_1 = -\frac{\sqrt{2} P_1^3 l}{6B^2 A^2}$$

U 和 Π 可用位移表示, 由于

$$P_1 = \frac{\sqrt[4]{2} BA}{\sqrt{l}} \sqrt{\Delta_1}$$

故

$$\left. \begin{aligned} U &= \frac{2\sqrt{2}}{3} \frac{BA\sqrt{\Delta_1^3}}{\sqrt{l}} \\ \Pi &= -\frac{\sqrt{2}}{3} \frac{BA\sqrt{\Delta_1^3}}{\sqrt{l}} \end{aligned} \right\} \quad (9-30)$$

例 9-6 结构如图 9-3 所示, 承受荷载 P_1 的作用, 材料假设为线性弹性。设结点 A 有任一竖向位移 Δ , 试求结构在此位移状态下的势能 Π , 并分析 Π 与 Δ 之间的函数特性。

解:

由例 9-5 得知, 在平衡状态下, 位移 $\Delta = \Delta_1 = \frac{P_1 l}{EA}$ 。现把位移 Δ 看作独立变量, 势能 Π 看作变量 Δ 的函数, 这里我们研究当 Δ 变化时结构的各种位移状态, 包括平衡的位移状态 ($\Delta = \Delta_1$) 和不平衡的位移状态 ($\Delta \neq \Delta_1$) 在内。

由于结点 A 的竖向位移为 Δ , 故杆件的伸长量 λ 与轴力 N 分别为:

$$\lambda = \frac{\sqrt{2}}{2} \Delta$$

$$N = \frac{EA\lambda}{l} = \frac{\sqrt{2} EA\Delta}{2l}$$

两杆的总应变能为

$$U = 2 \times \frac{EA\lambda^2}{2l} = \frac{EA\Delta^2}{2l}$$

因此, 结构的势能为

$$\Pi = \frac{EA\Delta^2}{2l} - P_1 \Delta$$

由于 $P_1 = \frac{EA\Delta_1}{l}$, 故

$$\Pi = \frac{EA}{2l}(\Delta^2 - 2\Delta_1\Delta)$$

即
$$\Pi = \frac{EA}{2l}[(\Delta - \Delta_1)^2 - \Delta_1^2] \quad (9-31)$$

式(9-31)就是势能 Π 与位移变量 Δ 之间的函数关系。函数图形如图 9-7 所示。

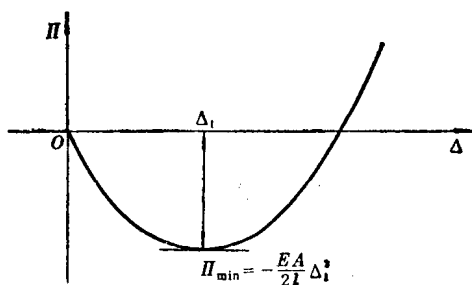


图 9-7

由式(9-31)和图 9-7 可得出 Π 的特性如下:

- 1) 势能 Π 是位移参数 Δ 的二次式。实际上, 线性弹性结构都有此性质。
- 2) 当 $\Delta = \Delta_1$ 时, $\frac{d\Pi}{d\Delta} = 0$ 。实际上, 在平衡状态下, 势能 Π 为驻值。
- 3) 当 $\Delta = \Delta_1$ 时, Π 为极小。实际上, 在稳定平衡状态下, 势能为极小值。

2. 势能驻值原理

势能驻值原理可表述如下:

在弹性结构(线性或非线性)的一切可能位移中, 真实位移使势能 Π 为驻值, 即

$$\delta\Pi = 0 \quad (9-32)$$

这里的“可能位移”是指几何上可能的位移, 即指符合结构的几何边界条件(即位移边界条件)的各种位移。真实位移也是一种可能位移, 但它同时又满足平衡条件。由此可知, 势能驻值条件(9-32)实际上就是用能量形式表示的平衡条件。

既然势能驻值条件就是平衡条件, 因此, 可由虚位移原理直接导出。在推导时为了简便, 我们以梁或刚架为例, 计算应变能时只考虑曲率和弯矩的影响。

首先考虑真实状态。真实力系和相应的真实位移为:

$$\begin{cases} \text{荷载 } P_i, & \text{相应位移 } \Delta_i \\ \text{支座反力 } R_j, & \text{相应支座位移 } c_j \\ \text{截面弯矩 } M, & \text{相应曲率 } \kappa_0 + \kappa \end{cases}$$

其次, 取任一可能位移与真实位移的差值(叫做位移变分)作为虚位移, 即:

$$\begin{cases} \text{荷载相应位移的变分 } \delta\Delta_i \\ \text{支座位移的变分 } \delta c_j = 0 \\ \text{曲率的变分 } \delta\kappa \end{cases}$$

(注意, 支座位移的变分 δc_j 和初始曲率的变分 $\delta\kappa_0$ 都应为零。)

最后, 应用虚位移原理, 令真实力系在位移变分上作虚功, 可写出虚功方程如下:

$$\sum P_i \delta\Delta_i = \sum \int (M \delta\kappa) ds \quad (9-33)$$

这就是用虚功形式表示的平衡方程。式(9-33)还可改写为

$$\delta \left[\sum \int \left(\int_0^s M d\kappa \right) ds - \sum P_i \Delta_i \right] = 0 \quad (9-34)$$

其中第一项就是结构的弯曲应变能 U , 因此, 得

$$\delta[U - \sum P_i \Delta_i] = 0 \quad (9-35)$$

这里括号中的项就是结构的势能 Π [式(9-29)], 而式(9-35)就是势能驻值条件(9-32)。

3. 最小势能原理

可以进一步指出, 对于稳定平衡状态, 真实位移使势能 Π 为极小值。这就是最小势能原理 (或称极小势能原理)。下面结合线性弹性的情况加以证明。为简便计, 在应变能中仍只考虑弯曲的影响。

首先, 考虑真实位移状态。相应的势能为

$$\Pi = \int \frac{EI}{2} \kappa^2 ds - \sum P_i \Delta_i \quad (a)$$

其次, 考虑任一可能位移状态, 曲率为 $\kappa + \delta\kappa$, 荷载 P_i 相应的位移为 $\Delta_i + \delta\Delta_i$, 相应的势能为

$$\Pi' = \int \frac{EI}{2} (\kappa + \delta\kappa)^2 ds - \sum P_i (\Delta_i + \delta\Delta_i) = \Pi + \delta\Pi + \delta^2\Pi \quad (b)$$

这里的 $\delta\Pi$ 由 $\delta\kappa, \delta\Delta_i$ 的一次项组成, 称为一阶变分, 即

$$\delta\Pi = \int EI \kappa \delta\kappa ds - \sum P_i \delta\Delta_i$$

由势能驻值条件(9-32), 可知

$$\delta\Pi = 0 \quad (c)$$

又 $\delta^2\Pi$ 系由 $\delta\kappa$ 的二次项组成, 称为二阶变分, 即

$$\delta^2\Pi = \int \frac{EI}{2} (\delta\kappa)^2 ds$$

如果曲率变分不恒为零, 则 $\delta^2\Pi$ 为恒正, 即

$$\delta^2\Pi > 0 \quad (d)$$

将式(c)和式(d)代入式(b), 即得

$$\Pi' > \Pi \quad (9-36)$$

上式表明: 在结构处于稳定平衡的问题中, 与各种可能的位移状态相比, 真实位移状态的特征是势能为极小值。关于不稳定平衡状态的能量特征, 可参看第十二章中的讨论。

例 9-7 图 9-8a 所示为一桁架, 承受结点荷载 $P_1 = 0, P_2 = P$, 各杆截面面积 A 相同, 设材料为线性弹性, 试用势能驻值原理求桁架的内力。

解:

(1) 用位移参数表示势能

结点 A 共有两个位移分量 Δ_1 和 Δ_2 , 如图 b 所示。利用图 c 和 d, 可求出各杆的伸长量如下:

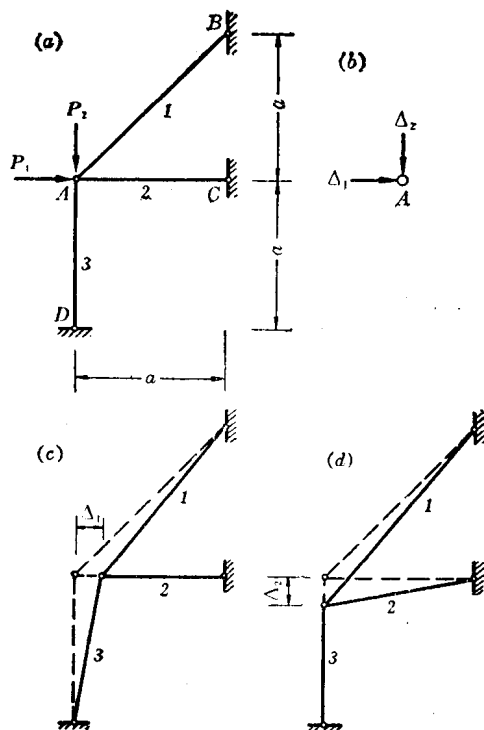


图 9-8