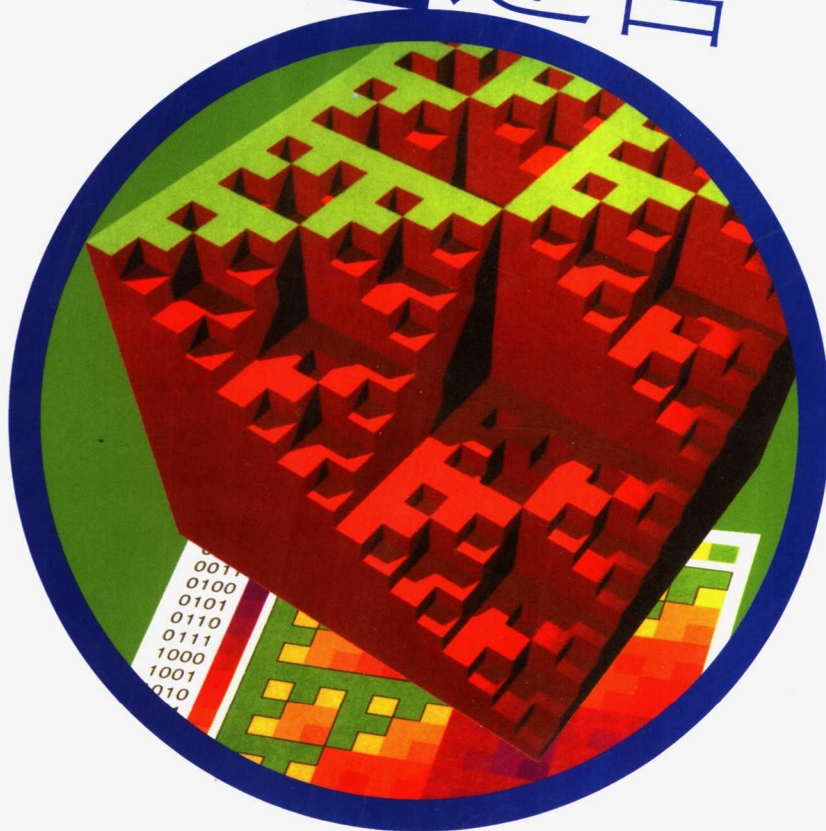


科学新知

求 索 从 书
KEXUE XINZHI QIUSUO CONGSHU

郭凯声 王元凯 编著

数学迷宫



 科学技术文献出版社

Scientific and Technical Documents
Publishing House

科学新知求索丛书

数学迷宫

郭凯声 王元凯 编著

科学技术文献出版社

Scientific and Technical Documents Publishing House

北 京

图书在版编目(CIP)数据

数学迷宫/郭凯声,王元凯编著.-北京:科学技术文献出版社,2006.1(重印)
(科学新知求索丛书)

ISBN 7-5023-5024-1

I. 数… II. ①郭 ②王… III. 数学-普及读物 IV. 01-49

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 031305 号

出 版 者 科学技术文献出版社
地 址 北京市复兴路 15 号(中央电视台西侧)/100038

图书编务部电话 (010)58882909,(010)58882959(传真)

图书发行部电话 (010)68514009,(010)68514035(传真)

邮 购 部 电 话 (010)58882952

网 址 <http://www.stdph.com>

E-mail: stdph@istic.ac.cn

策 划 编 辑 科 文

责 任 编 辑 科 文

责 任 校 对 唐 炜

责 任 出 版 王芳妮

发 行 者 科学技术文献出版社发行 全国各地新华书店经销

印 刷 者 北京正豪彩色印刷有限责任公司

版 (印) 次 2006 年 1 月第 1 版第 2 次印刷

开 本 787×960 16 开

字 数 247 千

印 张 14.25

印 数 5001~8000 册

定 价 20.00 元

© 版权所有 违法必究

购买本社图书,凡字迹不清、缺页、倒页、脱页者,本社发行部负责调换。

(京)新登字 130 号

内 容 简 介

本书精选了一批数学游戏与计算机游戏问题,通过生动有趣的故事,让读者领略到数学的无穷乐趣,起到启迪思维、开阔视野,激发想像力和创造力的作用。本书适合广大中学生和大学生阅读,同时对于广大数学爱好者也有很强的吸引力。

科学技术文献出版社是国家科学技术部系统惟一——
家中央级综合性科技出版机构,我们所有的努力都是为
了使您增长知识和才干。

科学新知求索丛书

编 委 会

主 任 严东生

副主任 邹大挺

委 员 (按姓氏笔画排列)

丁 峻 王大珩 王元凯

王大庆 李振声 李国杰

金 磊 赵玉芬 段金龙

贺德馨 顾方舟 郭凯声

程天民 崔 宁

总 编 王元凯 金 磊

总 序

时代的列车正飞奔在勃勃生机、春色明媚的希望的原野上,风驰电掣地从“甲申”站驶向新的目的地……

时代在前进,社会在发展。昔日刀耕火种的地球人,现已能“九天揽月”遨游太空,直步青云迈入了知识经济新时代。马克思曾说过:“科学是历史的有力杠杆。”无疑,这种天翻地覆的变化,与当今被誉为第一生产力的科学技术的崛起密不可分。当今科学技术的发展迅猛异常,气势如虹:在宇观上已探测到 140 亿年前大爆炸留下的微波背景辐射,窥探到由 2 000 多亿颗恒星等组成的银河系以及由 1 400 亿个河外星系组成的宇宙;在微观上,发现了由 4 个夸克组成的新粒子“x3872”,可在 DNA 上制造纳米晶体管;数字化、网络化、智能化和信息化已融入人类社会的各个领域。这些辉煌的成就给人类创造了极丰厚的物质财富和精神财富。人类



在认识自然、改造自然和征服自然中,在求索创新、发展自我和挑战自我上取得了伟大的进步。

“忆往昔峥嵘岁月稠。”回首人类漫长发展的历程,并非都是一帆风顺的,而是在与大自然、与自我的抗争搏斗中才走到今天的。就是跨入新千年的今天,也是机遇和挑战并存。人类有许多挑战要面对:浩瀚宇宙、五彩缤纷大自然的玄奥,种种不解谜团,如宇宙的创生、生命的起源、脑与生命意识、物质结构以及古迹迷津等诸多光怪陆离的事物和现象仍需认识、求索和诠释。人类发展高度文明造成生存环境恶化,生态失衡,臭氧层变薄,水土流失,沙漠化,地震,海啸,洪涝灾害以及人为失控的耕地锐减、人口猛增等诸多问题;又如 2003 年春爆发的伊拉克战争、突如其来的世界性 SARS 疫情、艾滋病灾难、以暴抑暴的恐怖事件此起彼伏……凡此种种天灾人祸,无时不危及人们的生命财产安全,这都要靠人类的睿智、才能和力量去解决。虽然,人类在认识大自然、改造大自然的征途中有了长足的进步,然而人类面临的挑战依然很多,许多事物要深入地认识求索,许多不解之谜要破译,许多人为灾祸要遏制,人类求索之路还很漫长。

2

“路漫漫其修远兮,吾将上下而求索。”这是春秋战国楚国屈原写的壮丽诗句。自古以来,有多少仁人志士,为人类的生息繁衍和社会的进步,为国家的兴盛而奋斗抗争着。英国大哲学家弗朗西斯·培根说“知识就是力量”。为了弘扬前人伟业,传承拼搏求索精神,启迪读者的求知探索和创新思维,我们从大科学技术视野、大知识文化观出发组织编写了“科学新知求索”丛书,包括《宇宙探索路》、《数学迷宫》、《让人们生活更安全》、《中外建筑与文化》、《思维世界探幽》、《行为与优生趣观》,奉献给为中华民族伟大



复兴而奋斗的科教工作者、莘莘学子和广大青少年读者。

这套丛书的作者大多为活跃在国内学术界并具有扎实基础和独创研究成果的中、青年著名学者。为保证这套丛书的学术质量,我们邀请了部分院士和资深专家学者对丛书文稿内容进行认真审阅和修改指导。愿本丛书成为开辟新时代、创造新财富的精神力量!希望它能拓宽人们的科学新知视野,成为提高科学文化素质、求是创新、促进经济发展的动力。希望广大的中学生、大学生、科教工作者及科普爱好者阅读它,喜爱它!

严东生

前言

数学游戏 其乐无穷

《科学美国人》杂志从 1952 年起开辟“数学游戏”专栏,著名游戏数学专家马丁·加德纳及其他数学家与计算机科学家先后为该专栏撰稿,数十年来已发表几百篇有关趣味数学及计算机游戏的文章。该专栏的内容广涉数学游戏与计算机游戏的各种问题和各个领域,集知识性、趣味性和娱乐性为一体。作者深入浅出地把一些复杂的数学和计算机问题通过人们熟悉的例子介绍给广大读者,行文浅显易懂,叙述生动活泼,没有深奥的公式和抽象的论证。具有高中数学水平的读者一般都能看懂。

趣味数学与严正数学之间并不存在一条截然分明的界线。许多专业数学家都认为他们的研究工作是某种形式的娱乐。一般地说,如果某个数学问题含有充满趣味的内容,能够被不是专门搞数学的人所理解并欣赏,那么它就被认为是娱乐性的。趣味数学包括许多其解法往往出人意外的初等问题,但也包括一些非常考人的难题、有独创性的游戏,令人迷惑的魔

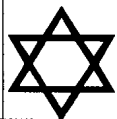


术把戏以及拓扑学上的各种新奇东西(例如墨比乌斯带和克莱因瓶等)。实际上,比微积分学初等的几乎每一个数学分支都有一些可视为娱乐性的领域。

数学游戏对于培养人们(特别是中小学学生)对数学的兴趣、开拓他们的思路以及激发他们的数学创造力和想像力可以发挥极好的作用,是对正规数学教育的一种极有价值的补充。但数学游戏的这种作用现在还远未被人们充分认识到。许多数学教师仍然忽视娱乐性的数学问题,不愿意向他们的学生介绍这方面的东西,也不鼓励学生们进行这方面的探索。马丁·加德纳先生曾举了他亲身经历过的一件事情来作为例子。他在上高中时,有一次在数学课上完成了规定的数学作业后拿出一张纸来想要解决他一直感兴趣的一个问题——在三子棋游戏中,先走的一方是否能稳操胜券。他的老师看见他在纸上涂写什么,便走过来一把抢走纸条并警告他应该专心学习数学而不要搞别的东西。其实三子棋问题可以作为一种极好的数学课堂练习,它是向学生们介绍组合数学、对策论、对称性和概率等观念的绝佳途径。此外,这个游戏也是每一位学生都经历过的东西——谁在童年时代没有玩过三子棋呢?然而看来几乎没有哪位数学教师曾把此类游戏纳入到他们的教学中。

6

加德纳还建议数学教师们通过下面这个小实验来认识趣味数学的作用。把学生们分为若干组,让每个小组想出任一个三位数——姑且称之为ABC。然后学生们把这个三位数的数字向袖珍计算器连续输入两次,得到ABCABC这个数。例如,如果学生们想出的数是237,那么输入计算器的数就是237237。现在告诉学生们说如果他们把自己的那个数除以13,那么



将不会有余数。学生们只要在计算器上按几下马上就可以证明这一点。接下来你要学生们把所得的结果再除以 11, 这一除法仍然没有余数。最后要学生们接着再除以 7——怪了, 这下计算器显示屏上得出的是 ABC, 即最先输入的那个数。学生们一开始可能对这个数学把戏的奥妙大惑不解, 但仔细思索一下就可以知道它的道理其实非常简单: $ABCABC = ABC \times 1001 = ABC \times 7 \times 11 \times 13$ 。加德纳认为, 这是向学生们介绍数论和素数性质的一种非常巧妙的方法。

诸如此类的例子不胜枚举。为了让读者们——特别是数学教师和学生——领略到趣味数学中蕴含的无穷乐趣, 我们精选了一批数学游戏与计算机游戏问题呈献给读者们。本书适合于广大中学生和大学生阅读; 对于爱好数学的成人, 本书也有相当大的吸引力。我们希望它能起到启迪思维、开阔视野、激发想像力和创造力的作用。

郭凯声

目 录

- ✱ 古代日本寺庙中的趣味几何学问题 / 1
- ✱ 恐怖庄园的谋杀案 / 6
- ✱ 三子棋分形的奥秘 / 13
- ✱ 大行其道六角棋 / 17
- ✱ 同步闪光的萤火虫 / 21
- ✱ 互联网上的购物凭证 / 24
- ✱ 迷宫中的母牛 / 27
- ✱ 如何保持平衡 / 30
- ✱ 这里面有鬼 / 32
- ✱ 谎言与实话的交替 / 33
- ✱ 红蓝问题 / 34
- ✱ 神灵掷硬币 / 35
- ✱ 方形舞 / 36
- ✱ 双气泡——一个难解的谜 / 37
- ✱ 乒乓球难题的终结 / 40
- ✱ 扫雷扫成百万富翁 / 44
- ✱ 跳跃冠军 / 47



- ✱ 专家级的一种儿童点-框游戏 / 51
- ✱ 确保隐私的多边形围墙 / 55
- ✱ 复活节的准晶体特性 / 59
- ✱ 数数太阳的牛群有多少头牛 / 62
- ✱ 真实雕塑与虚拟雕塑 / 65
- ✱ 圆的排列及包络圆的研究和计算机演示 / 69
- ✱ 把沙丁鱼塞满罐头 / 74
- ✱ 与十二面体共舞 / 79
- ✱ 探索结的奥秘 / 82
- ✱ 无处不在的分形垫片 / 84
- ✱ 锥面的花样 / 88
- ✱ 子集的策略 / 90
- ✱ 发生在下水道中的盗窃案 / 94
- ✱ 用巧克力玩游戏 / 97
- ✱ 在围棋棋盘上下象棋 / 101
- ✱ 挪动桌子的难题 / 108
- ✱ 智闯华容道 / 114
- ✱ 星际奥林匹克运动会 / 120
- ✱ 保卫罗马帝国 / 127
- ✱ 修道士、斑点和常识 / 130
- ✱ 海盗的难题 / 133
- ✱ 挑绷子的算法问题 / 138
- ✱ 最完美的幻方 / 143
- ✱ 重复铺砌平面 / 147
- ✱ 从螺旋粘霉菌看生物的数学奥秘 / 150
- ✱ 砖厂中的交叉线 / 153



- ✱ 计算机推算日期 / 156
- ✱ 悖论消失 / 160
- ✱ “星际旅行”游戏 / 164
- ✱ 无结局的棋 / 171
- ✱ 虚拟股评家 / 175
- ✱ 赛伯空中的花样飞行 / 180
- ✱ 探索数学生物王国 / 186
- ✱ 乌龟几何 / 192
- ✱ 网络图案 / 199
- ✱ 马能走遍棋盘吗? / 204
- ✱ 加德纳四个难题与答案 / 207



古代日本寺庙中的趣味几何学问题

在世界各地数不胜数的各种习俗和传统中,或许没有一种比得上日本的寺庙几何学这一传统那样绝妙,那样精美。在日本的闭关锁国时代(1639 年到 1854 年),日本处于一种与西方世界彻底隔绝的状态中。与所有各种形式的西方文化的接触均受到日本当权者的压制,西方科学思想的流入实际上被切断了。在这段时期中,一类土生土长的数学曾在日本崛起并获得了高度的发展。

当时,一些爱好数学的人——包括武士、商人和农夫等——常常求解各种各样的几何问题,把他们的成果刻在色彩精致的木制书板上并悬挂于寺庙的屋顶下。这些所谓“算匾”(在日文中此词的字面意义就是数学书匾)可能是表示敬意的行动(感谢指点迷津的神灵),也可能是对其他进庙朝拜者的公开挑战:有本事的话就把它解出来。

大部分算匾涉及的都是通常的欧几里得几何。但是这些问题与通常高中几何课程中的问题明显不同。这些问题中圆和椭圆所占的地位非常突出,包括椭圆内套圆、圆内套椭圆等等。其中有些问题非常简单,高一学生也能解出来。另外一些问题用初等方法几乎无法对付,现代数学家们通常用高等的方法(包括微积分和仿射变换)来求解它们。大多数这类问题在今天可认为属于趣味数学的范畴。本文后面介绍了若干例相当有趣而又有一定难度的算匾问题,供读者们思考。

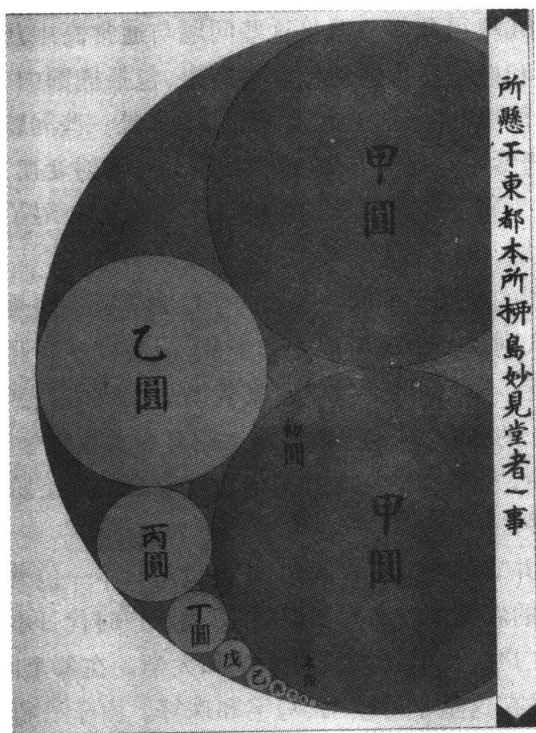
关于算匾的起源,存在着两种不同的观点。一部分人倾向于认为算匾主要是专业数学家及其学生们创作的,但另一些人则认为情况可能并非如此,因为许多算匾问题都属于初等数学,其解法只有寥寥数行,不像是专业数学家发表的那类成果。据研究人员考证,一块算匾上刻的是一位商人的名字,其他一些算匾上则有妇女和儿童(年龄在 12 到 14 岁之间)的名字。他们推断,大多数算匾是由文化程度较高的武士阶层成员创作的,少数算匾可能出自农夫之手。

农夫研习几何问题在当时的日本并非咄咄怪事。例如,十九世纪日本一位著名数学家曾在他的乡间故居向附近村庄中的农夫讲授和算知识(和算是江户时代日本特有的算学)。他的学生多达两千余人。江户时代的日本没有学院和大学。在那个时期,教育是由私立学校或寺庙承担的,平民在这里学习读书、写字和珠算。由于外行人对几何问题的兴趣比对代数问题大,因此这些算匾以极高的艺术水平精致地绘制出来以吸引非数学家的注意就不是什么出人意料的事了。



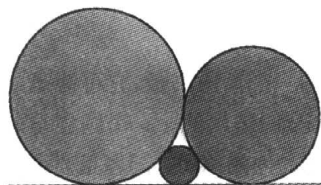
因此可以说,对于“谁创造了寺庙几何学?”这个问题,最好的答案或许是“所有的人”。在那个时期,许多日本平民都喜欢数学、诗歌以及其他形式的艺术,并从中领略到极大的乐趣。情况可能是,一位乡村教师在教了一整天的书以后,或者是一位武士在把他的剑磨锋利之后,将躲进他的书房,点亮一盏油灯,忘掉世上的一切,全神贯注地投入一个涉及球和椭球的复杂数学问题中。或许他将用好几天的时间安安静静地冥思苦想这个问题。当他最终找到答案后,他或许会短暂地休息一下,欣赏自己的艰苦劳动所获得的成果。他相信这一证明值得奉献给他所崇拜的神灵,因此把这个定理刻在木板上,悬挂于当地的寺庙中,然后开始考虑下一个挑战。前来参拜寺庙的人将会注意到这个色彩鲜艳的算匾,并对它的精美赞叹不已。许多人在离去时可能会想,不知算匾的作者是怎样找到这一奇妙的答案的。有些人可能决定尝试一下解这个问题,有些人则打算钻研几何学以便能进行这种尝试。还有少数人可能会这样想,“如果把问题改成这样又如何呢……”

这真是值得我们所有人思索的奥秘。



问题 1

如图所示为一个多重圆内套圆的问题。假设最大圆的半径为 r , 问题是要用 r 表示从“初圆”到“末圆”这一系列圆中第几个圆的半径。注意两个“甲圆”的大小相同, 其半径各为 $r/2$ 。(提示: “戊圆”和“己圆”之间的那个圆(此时 $n=5$) 的半径为 $r/95$ 。) 这个问题最初的解利用了日本式的笛卡尔圆定理(此问题解答请看本文后面)。

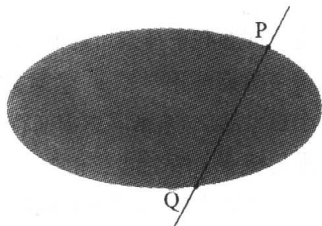


问题 2

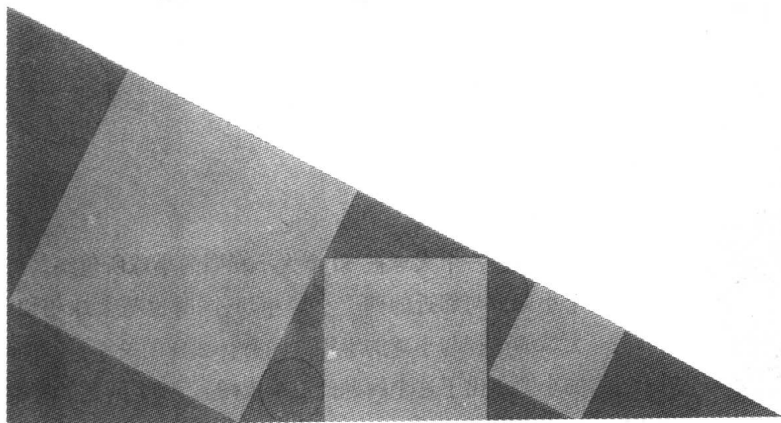
1824 年群马县的一块书板上记载的一个简单的问题流传至今。图中的两个大圆外切于某一点,而且它们还与同一条直线相切。小圆既与两个大圆外切,也与那条直线相切。这三个圆的半径有什么样的关系?

问题 3

这个引人注目的问题是 1912 年写在现存于宫城县的一块书板上的。问题本身起源于何时则无人知道。从椭圆上一点 P 作法线 PQ , 与椭圆另一侧相交于 Q 点。试找出 PQ 的最小值。初看起来这个问题似乎再简单不过了: 长度最小的 PQ 应当是椭圆的短轴。事实上, 如果 $b < a \leq \sqrt{2}b$ (这里 a 和 b 分别为椭圆的长轴和短轴), 则短轴确实是这个问题的解。然而上述书板并没有给出这个解, 而是给了另一个解——当 $2b^2 < a^2$ 时这个问题的解。



3



问题 4

下面这个巧妙的问题写在宫城县 1913 年的一块书板上, 它只需要高中几何学的知识便可解决。如图所示, 在大的直角三角形内画有三个正方形, 试问三个圆的半径之间有何关系?