

山东省中学课本

数学复习提纲

SHUXUE

FUXI

TIGANG

数学

复习

提纲

PDG

山东省中学课本
数学复习提纲

山东省教学研究室编

*

山东人民出版社出版
山东新华印刷厂潍坊厂印刷
山东省新华书店发行

*

开本 787×1092 1/32 印张 19.125 字数 386,000
1980年12月第2版 1981年1月第2次印刷

书号 K7099·456 定价 1.20 元

目 录

第一篇 代 数

第一章 数	1
一 自然数	1
二 有理数	2
三 实数	2
四 复数	3
复习题一	10
第二章 代数式	15
一 代数式的基本概念	15
二 整式	16
三 因式分解	17
四 分式	18
五 根式	19
复习题二	28
第三章 代数方程	31
一 方程的一般理论	31
二 整式方程	35
三 几种特殊类型的高次方程	42
四 分式方程和无理方程	44
五 方程组	53

六 列方程(组)解应用题.....	59
复习题三.....	62
第四章 不等式.....	67
一 不等式和它的性质.....	67
二 不等式的解法.....	68
三 不等式的证明.....	78
复习题四.....	84
第五章 函数.....	87
一 函数的基本概念.....	87
二 几种常见的代数函数.....	93
复习题五.....	100
第六章 指数和对数.....	103
一 指数.....	103
二 指数函数.....	105
三 对数.....	108
四 对数函数.....	109
五 指数方程和对数方程.....	117
复习题六.....	127
第七章 数列与极限.....	131
一 数列的概念.....	131
二 等差数列和等比数列.....	132
三 数列的极限.....	139
四 无穷递缩等比数列.....	142
复习题七.....	144
第八章 排列、组合、二项式定理.....	148

一 乘法原理	148
二 排列、组合	148
三 数学归纳法	149
四 二项式定理	150
复习题八	156

第二篇 平面几何

第一章 线段、角、平行线	160
一 直线、射线、线段	160
二 角	161
三 两条直线的位置关系	163
四 命题和定理	165
五 基本作图	166
复习题一	171
第二章 三角形	173
一 三角形的分类	173
二 三角形中的角和主要线段	173
三 三角形的性质	176
四 全等三角形和相似三角形	178
复习题二	195
第三章 四边形	202
一 轴对称图形和中心对称图形	202
二 四边形	202
三 特殊四边形的性质及其判定	203
复习题三	213

第四章 圆	217
一 圆及其基本性质	217
二 与圆有关的角	219
三 点与圆、直线与圆、圆与圆的位置关系	219
四 圆和多边形的关系	221
五 基本轨迹	224
六 与圆有关的作图	225
复习题四	239

第三篇 立体几何

第一章 直线和平面	246
一 直线与直线的位置关系	246
二 直线与平面的位置关系	247
三 平面与平面的位置关系	249
四 有关距离的概念	251
复习题一	261
第二章 多面体	266
一 棱柱	266
二 棱锥	267
三 棱台	268
复习题二	275
第三章 旋转体	279
一 圆柱	279
二 圆锥	280
三 圆台	281

四 球	282
复习题三	286

第四篇 三角函数

第一章 三角函数的定义及其性质	291
一 角的概念	291
二 三角函数的定义、性质	292
复习题一	315
第二章 三角恒等式	322
一 和角与倍角公式	322
二 半角公式	323
三 积与和差的互化	323
复习题二	351
第三章 反三角函数和三角方程	358
一 反三角函数	358
二 三角方程	360
复习题三	370
第四章 解三角形	375
一 解直角三角形	375
二 解任意三角形	378
三 解三角形法的应用	391
复习题四	404

第五篇 平面解析几何

第一章 平面直角坐标系	409
-------------------	-----

一 平面直角坐标系	409
二 两点间的距离公式	409
三 线段的定比分点	410
复习题一	415
第二章 曲线与方程	418
一 曲线与方程的关系	418
二 由曲线求方程	418
三 由方程画曲线	419
四 曲线与曲线的交点	420
复习题二	424
第三章 直线	427
一 直线的倾斜角与斜率	427
二 直线方程的特殊形式	428
三 直线方程的一般形式	429
四 两条直线的相对位置	430
五 直线系	431
复习题三	439
第四章 圆锥曲线	443
一 抛物线	443
二 椭圆	444
三 双曲线	445
四 圆锥曲线的切线和法线	447
五 圆锥曲线	448
复习题四	467
第五章 坐标轴的平移	472

一 平移公式.....	472
二 利用移轴公式化简二次方程.....	472
三 二次方程 $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ 的讨论.....	473
复习题五.....	477
第六章 参数方程.....	479
一 参数方程.....	479
二 几种常见曲线的参数方程.....	480
三 化参数方程为普通方程.....	480
复习题六.....	486

第六篇 总 复 习

范例.....	488
总复习题.....	544

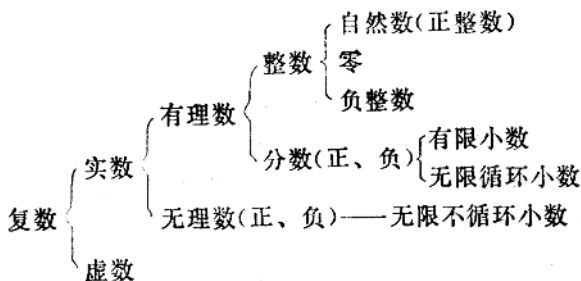
第七篇 补 充 内 容

一 集合与对应.....	562
二 线性方程组.....	571
三 极坐标.....	589
四 函数的极限.....	601

第一篇 代 数

第一章 数

在中学数学里，我们所学过的数，可归纳成下列的数系表：



一、自 然 数

1. 定义 数 $1, 2, 3, \dots, n, \dots$, 叫做自然数，也叫正整数。

2. 主要性质

(1) 自然数有无限多个；1是最小的自然数，但没有最大的自然数；

- (2) 任意两个自然数，都可以比较大小；
- (3) 在自然数集合内，可以施行加法和乘法运算；
- (4) 在自然数集合内，除 1 以外只能被 1 和这个数本身整除的数，叫做质数(或素数)；还能被其他数整除的数，叫做合数。数 1 既不是质数，也不是合数。

二、有 理 数

1. 定义 正、负整数及正、负分数和零统称为有理数。

有理数总可以表示为 $\frac{p}{q}$ (p, q 为整数，且 $q \neq 0$) 的形式。

2. 主要性质

- (1) 有理数没有最小的数，也没有最大的数；
- (2) 任意两个有理数都能比较大小；
- (3) 在有理数集合内，可以施行加、减、乘、除(除数不为零)四种运算，即任意两个有理数的和、差、积、商仍为有理数。

三、实 数

1. 无理数 无限不循环小数叫做无理数。

2. 实数 有理数和无理数统称实数。

3. 实数的主要性质

- (1) 实数中没有最小数，也没有最大数；
- (2) 任意两个实数可以比较大小；

(3) 实数与数轴上的点之间具有一一对应的关系；

(4) 在实数集合内，可以施行加、减、乘、除（除数不为零）四种运算。

4. 实数的绝对值

$$|a| = \begin{cases} a, & (\text{当 } a > 0 \text{ 时}) \\ 0, & (\text{当 } a = 0 \text{ 时}) \\ -a, & (\text{当 } a < 0 \text{ 时}) \end{cases}$$

四、复数

1. 虚数单位

(1) 定义： $i^2 = -1$ ， i 叫做虚数单位。

(2) -1 的两个平方根分别是 $\pm i$ 。

(3) i 的乘方具有周期性：

$$i^{4n} = 1, i^{4n+1} = i, i^{4n+2} = -1, i^{4n+3} = -i. \quad (n \text{ 是整$$

数)

2. 复数

(1) 定义：形式为 $a+bi$ 的数叫做复数。（其中 a, b 都是实数）若 $b=0$ ，这个复数就是实数 a ；若 $b \neq 0$ ，这个复数叫做虚数；若 $a=0, b \neq 0$ ，这个复数就叫做纯虚数 bi 。

(2) 对于两个复数，如果其中至少有一个虚数，则它们不能比较大小。

(3) 复数相等和复数等于零：

当且仅当 $a=c, b=d$ 时， $a+bi=c+di$ ；

当且仅当 $a=0, b=0$ 时， $a+bi=0$ 。

(4) 复数平面和复数的几何表示法:

表示复数的坐标平面叫做复数平面.横坐标轴叫实数轴,纵坐标轴叫虚数轴(如图 1-1).复数 $a+bi$ 和复数平面上的点 (a,b) 是一一对应的.很明显,当 $b=0$ 时,复数 $a+bi$ 即为实数 a ,它与 x 轴上的点是一一对应的;当 $a=0$ 时,复数 $a+bi$ 即为纯虚数 bi ,它与 y 轴上的点是一一对应的.

复数 $a+bi$ 与平面上以坐标原点为起点,以点 (a,b) 为终点的向量是一一对应的(图 1-1).

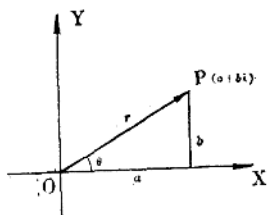


图 1-1

(5) 复数的模数 非负的数 $\sqrt{a^2+b^2}$ 叫做复数 $a+bi$ 的模数,也叫做它的绝对值,记做 $|a+bi|$.它的几何意义是复数 $a+bi$ 的对应点 P 到原点的距离 $|OP|$.

(6) 复数的三角函数式

$$a+bi = r(\cos \theta + i \sin \theta), \text{ 其中 } r = \sqrt{a^2+b^2},$$

$$\cos \theta = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad \sin \theta = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

幅角 θ 一般取最小正角.

(7) 复数的运算

进行复数的加减法运算时,一般用代数式表示复数比较方便;进行乘除法运算时,用三角函数式表示比较方便,特别在乘方和开方运算时,一般用三角函数式表示.

① 加减法

$$(a_1+b_1i) \pm (a_2+b_2i) = (a_1 \pm a_2) + (b_1 \pm b_2)i.$$

② 乘法

$$(a_1 + b_1 i) \cdot (a_2 + b_2 i) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1) i.$$

虚数 $a + bi$ 与 $a - bi$ 叫做共轭虚数或共轭复数，两个共轭虚数的绝对值相等。

③ 除法

$$\begin{aligned} \frac{a_1 + b_1 i}{a_2 + b_2 i} &= \frac{(a_1 + b_1 i)(a_2 - b_2 i)}{(a_2 + b_2 i)(a_2 - b_2 i)} \\ &= \frac{(a_1 a_2 + b_1 b_2)}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{(a_2 b_1 - a_1 b_2)}{a_2^2 + b_2^2} i. \quad (a_2 + b_2 i \neq 0) \end{aligned}$$

④ 利用三角函数式进行乘、除运算

$$\begin{aligned} \text{乘法: } r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1) \cdot r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2) \\ = r_1 r_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)]. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{除法: } \frac{r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)}{r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)} \\ = \frac{r_1}{r_2} [\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \sin(\theta_1 - \theta_2)]. \end{aligned}$$

⑤ 利用三角函数式进行乘方与开方运算(棣美弗定理)

$$\text{乘方: } [r(\cos \theta + i \sin \theta)]^n = r^n (\cos n\theta + i \sin n\theta).$$

$$\begin{aligned} \text{开方: } \sqrt[n]{r(\cos \theta + i \sin \theta)} \\ = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\theta + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\theta + 2k\pi}{n} \right). \\ (k \text{ 取 } 0, 1, 2, \dots, n-1) \end{aligned}$$

范 例

【例1】两个无理数的和、差、积、商(除数不为零)是不是无理数?

答：两个无理数的和、差、积、商（除数不为零）可能是无理数，也可能是有理数。例如， $(2 + \sqrt{3}) + (2 - \sqrt{3})$

$$= 4, \lg 20 - \lg 2 = 1, \sin 15^\circ \cos 15^\circ = \frac{1}{4}, \frac{\sin 225^\circ}{\cos 135^\circ} = 1;$$

$$\sqrt{3} + \sqrt{3} = 2\sqrt{3}; \sqrt{5} - 2\sqrt{5} = -\sqrt{5}; \sqrt{3} \cdot \sqrt{2} =$$

$$\sqrt{6}; \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

【例 2】 $|a|$ 和 $3a$ 谁大？

答：若 $a > 0$ ，则 $|a| < 3a$ ；

若 $a < 0$ ，则 $|a| > 3a$ ；

若 $a = 0$ ，则 $|a| = 3a$ 。

【例 3】计算： $\sqrt{5} + \frac{1}{7} - 4.375 + \frac{4}{3}$ 。（精确到 0.01）

$$\text{解：} \sqrt{5} + \frac{1}{7} - 4.375 + \frac{4}{3}$$

$$\approx 2.236 + 0.143 - 4.375 + 1.333$$

$$= -0.663$$

$$\approx -0.66.$$

【例 4】不用绝对值符号，化简下列各式：

$$(1) |a| + |-a| + |a^2| + |-a^2|;$$

$$(2) |2x-1| + |x+1|.$$

解：(1) $|a| + |-a| + |a^2| + |-a^2|$

$$= \begin{cases} a + a + a^2 + a^2 = 2(a + a^2), & (\text{当 } a > 0 \text{ 时}) \\ 0, & (\text{当 } a = 0 \text{ 时}) \\ -a - a + a^2 + a^2 = 2(a^2 - a), & (\text{当 } a < 0 \text{ 时}) \end{cases}$$

$$(2) |2x-1| + |x+1|$$

$$= \begin{cases} 2x-1+x+1=3x, & (\text{当 } x \geq \frac{1}{2} \text{ 时}) \\ 1-2x-x-1=-3x, & (\text{当 } x \leq -1 \text{ 时}) \\ 1-2x+x+1=2-x, & (\text{当 } -1 < x < \frac{1}{2} \text{ 时}) \end{cases}$$

【例 1】计算：

(1) $i^k + i^{k+1} + i^{k+2} + i^{k+3}$ (k 是正整数)；

(2) $i \cdot i^3 \cdot i^5 \cdots i^{99}$.

解：(1) $i^k + i^{k+1} + i^{k+2} + i^{k+3}$

$$= i^k(1+i+i^2+i^3)$$

$$= i^k(1+i-1-i) = i^k \cdot 0 = 0;$$

$$(2) i \cdot i^3 \cdot i^5 \cdots i^{99} = i^{\frac{(1+99) \cdot 50}{2}} = i^{2500} = i^{4 \times 625} = 1.$$

【例 2】求 $\sqrt{-2} \cdot \sqrt{-5}$.

解：原式 $= \sqrt{2}i \cdot \sqrt{5}i = \sqrt{10}i^2 = -\sqrt{10}$.

说明：采用 $\sqrt{-2} \cdot \sqrt{-5} = \sqrt{(-2)(-5)} = \sqrt{10}$ 的作法是错误的。因为在等式 $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab}$ 中， a 与 b 必须不小于零才能成立。

【例 3】化简： $\left(\frac{\sqrt{2}}{1+i}\right)^{2564}$.

解： $\because (1+i)^2 = 1+2i+i^2 = 2i,$

$$\begin{aligned} \therefore \left(\frac{\sqrt{2}}{1+i}\right)^{2564} &= \left(\frac{2}{2i}\right)^{1292} = \left(\frac{1}{i}\right)^{1292} \\ &= (-i)^{1292} = i^{1292} \\ &= (-1)^{646} = 1. \end{aligned}$$

【例 4】用复数的三角函数式求 $(1+i)(-1+\sqrt{3}i)$.

$$\begin{aligned}
 \text{解: 原式} &= \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) \cdot 2 \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right) \\
 &= 2\sqrt{2} \left[\cos \left(\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{3} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{3} \right) \right] \\
 &= 2\sqrt{2} \left(\cos \frac{11\pi}{12} + i \sin \frac{11\pi}{12} \right).
 \end{aligned}$$

【例 5】解方程 $x^3 + 1 = 0$.

解: 原式变为 $x^3 = -1 = \cos \pi + i \sin \pi$,

$$\therefore x = \cos \frac{\pi + 2k\pi}{3} + i \sin \frac{\pi + 2k\pi}{3}, \quad (k = 0, 1, 2)$$

$$\text{即 } x_1 = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i,$$

$$x_2 = \cos \pi + i \sin \pi = -1,$$

$$x_3 = \cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

说明: 这里 x_1, x_2, x_3 就是 -1 的三个三次方根, 其中一个实数根.

【例 6】求 $\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^3$.

解法 1: 按乘法公式:

$$\begin{aligned}
 \text{原式} &= \left(-\frac{1}{2}\right)^3 + 3\left(-\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}i \\
 &\quad + 3\left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^3 \\
 &= -\frac{1}{8} + \frac{3\sqrt{3}}{8}i + \frac{9}{8} - \frac{3\sqrt{3}}{8}i = 1,
 \end{aligned}$$