山东省中学课本

数学复习提纲

SHUXUE FUXI TIGANG

山东省中学课本

数学复习提纲

山东省教学研究室编

*

山东人民出版社出版
山东新华印刷厂潍坊厂印刷
山东省新华书店发行

*

开本 787×1092 1/32 印张 19.125 字数 380,000
1980年12月第2版 1981年1月第2次印刷

书号 K7099·456 定价 1.20元

目　　录

第一篇　代　　数

第二篇　平面几何

第三篇　立体几何

第四篇　三角函数

第五篇　平面解析几何

第六篇　总　复　习

第七篇　补充内容

第一篇 代 数

第一章 数

在中学数学里，我们所学过的数，可归纳成下列的数系表：

$$
\text{复数}\begin{cases}
\text{实数}\begin{cases}
\text{有理数}\begin{cases}
\text{整数}\begin{cases}\text{自然数(正整数)}\\ \text{零}\\ \text{负整数}\end{cases}\\
\text{分数(正、负)}\begin{cases}\text{有限小数}\\ \text{无限循环小数}\end{cases}
\end{cases}\\
\text{无理数(正、负)——无限不循环小数}
\end{cases}\\
\text{虚数}
\end{cases}
$$

一、自 然 数

1．定义 数 1，2，3，……，n，……，叫做自然数，也叫正整数．

2．主要性质

（1）自然数有无限多个，1 是最小的自然数，但没有最大的自然数；

(2) 任意两个自然数，都可以比较大小；

(3) 在自然数集合内，可以施行加法和乘法运算；

(4) 在自然数集合内，除1以外只能被1和这个数本身整除的数，叫做质数(或素数)；还能被其他数整除的数，叫做合数. 数1既不是质数，也不是合数.

二、有理数

1. 定义 正、负整数及正、负分数和零统称为有理数. 有理数总可以表示为$\frac{p}{q}$(p、q为整数，且$q\neq0$)的形式.

2. 主要性质

(1) 有理数没有最小的数，也没有最大的数；

(2) 任意两个有理数都能比较大小；

(3) 在有理数集合内，可以施行加、减、乘、除(除数不为零)四种运算，即任意两个有理数的和、差、积、商仍为有理数。

三、实数

1. 无理数 无限不循环小数叫做无理数.

2. 实数 有理数和无理数统称实数.

3. 实数的主要性质

(1) 实数中没有最小数，也没有最大数；

(2) 任意两个实数可以比较大小；

（3）实数与数轴上的点之间具有一一对应的关系；

（4）在实数集合内，可以施行加、减、乘、除（除数不为零）四种运算。

4．实数的绝对值

$$|a|=\begin{cases}a,（当 a>0 时）\\0,（当 a=0 时）\\-a,（当 a<0 时）\end{cases}$$

四、复　　数

1．虚数单位

（1）定义：$i^2=-1$，i 叫做虚数单位。

（2）-1 的两个平方根分别是 $\pm i$。

（3）i 的乘方具有周期性：

$i^{4n}=1$，$i^{4n+1}=i$，$i^{4n+2}=-1$，$i^{4n+3}=-i$。（n 是整数）

2．复数

（1）定义：形式为 $a+bi$ 的数叫做复数。（其中 a、b 都是实数）若 $b=0$，这个复数就是实数 a；若 $b\neq0$，这个复数叫做虚数；若 $a=0$，$b\neq0$，这个复数就叫做纯虚数 bi。

（2）对于两个复数，如果其中至少有一个虚数，则它们不能比较大小。

（3）复数相等和复数等于零：

当且仅当 $a=c$，$b=d$ 时，$a+bi=c+di$；

当且仅当 $a=0$，$b=0$ 时，$a+bi=0$。

(4) 复数平面和复数的几何表示法：

表示复数的坐标平面叫做复数平面.横坐标轴叫实数轴，纵坐标轴叫虚数轴(如图1—1). 复数 $a+bi$ 和复数平面上的点 (a,b) 是一一对应的. 很明显，当 $b=0$ 时，复数 $a+bi$ 即为实数 a，它与 x 轴上的点是一一对应的；当 $a=0$ 时，复数 $a+bi$ 即为纯虚数 bi，它与 y 轴上的点是一一对应的.

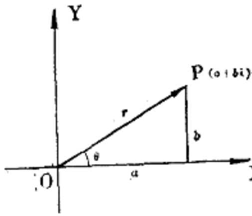

图 1—1

复数 $a+bi$ 与平面上以坐标原点为起点，以点 (a,b) 为终点的向量是一一对应的(图1—1).

(5) 复数的模数　非负的数 $\sqrt{a^2+b^2}$ 叫做复数 $a+bi$ 的模数，也叫做它的绝对值，记做 $|a+bi|$. 它的几何意义是复数 $a+bi$ 的对应点 P 到原点的距离 $|OP|$.

(6) 复数的三角函数式

$a+bi=r(\cos\theta+i\sin\theta)$，其中 $r=\sqrt{a^2+b^2}$，

$$\cos\theta=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\qquad \sin\theta=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

幅角 θ 一般取最小正角.

(7) 复数的运算

进行复数的加减法运算时，一般用代数式表示复数比较方便；进行乘除法运算时，用三角函数式表示比较方便，特别在乘方和开方运算时，一般用三角函数式表示.

① 加减法

$$(a_1+b_1i)\pm(a_2+b_2i)=(a_1\pm a_2)+(b_1\pm b_2)i.$$

② 乘法

$$(a_1+b_1i)\cdot(a_2+b_2i)=(a_1a_2-b_1b_2)+(a_1b_2+a_2b_1)i.$$

虚数 $a+bi$ 与 $a-bi$ 叫做共轭虚数或共轭复数，两个共轭虚数的绝对值相等。

③ 除法

$$\frac{a_1+b_1i}{a_2+b_2i}=\frac{(a_1+b_1i)(a_2-b_2i)}{(a_2+b_2i)(a_2-b_2i)}$$

$$=\frac{(a_1a_2+b_1b_2)}{a_2^2+b_2^2}+\frac{(a_2b_1-a_1b_2)}{a_2^2+b_2^2}i.\ (a_2+b_2i\neq 0)$$

④ 利用三角函数式进行乘、除运算

乘法：$r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)\cdot r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$

$$=r_1r_2[\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)].$$

除法：$\dfrac{r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)}{r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)}$

$$=\frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1-\theta_2)+i\sin(\theta_1-\theta_2)].$$

⑤ 利用三角函数式进行乘方与开方运算(棣美弗定理)

乘方：$[r(\cos\theta+i\sin\theta)]^n=r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)$.

开方：$\sqrt[n]{r(\cos\theta+i\sin\theta)}$

$$=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right).$$

(k 取 $0,1,2,\cdots,n-1$)

范　　例

【例 1】两个无理数的和、差、积、商（除数不为零）是不是无理数？

答：两个无理数的和、差、积、商（除数不为零）可能是无理数，也可能是有理数。例如，$(2+\sqrt{3})+(2-\sqrt{3})=4$；$\lg 20-\lg 2=1$；$\sin 15^\circ\cos 15^\circ=\frac{1}{4}$；$\frac{\sin 225^\circ}{\cos 135^\circ}=1$；$\sqrt{3}+\sqrt{3}=2\sqrt{3}$；$\sqrt{5}-2\sqrt{5}=-\sqrt{5}$；$\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}=\sqrt{6}$；$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}}{2}$.

【例 2】 $|a|$和 $3a$ 谁大？

答：若 $a>0$，则$|a|<3a$；

若 $a<0$，则$|a|>3a$；

若 $a=0$，则$|a|=3a$。

【例 3】计算：$\sqrt{5}+\frac{1}{7}-4.375+\frac{4}{3}$.（精确到 0.01）

解：$\sqrt{5}+\frac{1}{7}-4.375+\frac{4}{3}$

$$\approx 2.236+0.143-4.375+1.333$$

$$=-0.663$$

$$\approx -0.66.$$

【例 4】不用绝对值符号，化简下列各式：

（1）$|a|+|-a|+|a^2|+|-a^2|$；

（2）$|2x-1|+|x+1|$.

解：（1）$|a|+|-a|+|a^2|+|-a^2|$

$$=\begin{cases} a+a+a^2+a^2=2(a+a^2), & （当\ a>0\ 时）\\ 0, & （当\ a=0\ 时）\\ -a-a+a^2+a^2=2(a^2-a)， & （当\ a<0\ 时）\end{cases}$$

（2）$|2x-1|+|x+1|$

$$=\begin{cases}2x-1+x+1=3x, & (\text{当 } x\geqslant\frac{1}{2}\text{ 时})\\ 1-2x-x-1=-3x, & (\text{当 } x\leqslant-1\text{ 时})\\ 1-2x+x+1=2-x. & (\text{当 }-1<x<\frac{1}{2}\text{ 时})\end{cases}$$

【例 1】计算：

(1) $i^k+i^{k+1}+i^{k+2}+i^{k+3}$ (k 是正整数)；

(2) $i\cdot i^3\cdot i^5\cdot\cdots i^{99}$。

解：(1) $i^k+i^{k+1}+i^{k+2}+i^{k+3}$

$=i^k(1+i+i^2+i^3)$

$=i^k(1+i-1-i)=i^k\cdot 0=0$；

(2) $i\cdot i^3\cdot i^5\cdot\cdots i^{99}=i^{\frac{(1+99)\cdot 50}{2}}=i^{2500}=i^{4\times 625}=1$。

【例 2】求 $\sqrt{-2}\cdot\sqrt{-5}$。

解：原式 $=\sqrt{2}\,i\cdot\sqrt{5}\,i=\sqrt{10}\,i^2=-\sqrt{10}$。

说明：采用 $\sqrt{-2}\cdot\sqrt{-5}=\sqrt{(-2)(-5)}=\sqrt{10}$ 的作法是错误的。因为在等式 $\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{ab}$ 中，a 与 b 必须不小于零才能成立。

【例 3】化简：$\left(\frac{\sqrt{2}}{1+i}\right)^{2584}$。

解：$\because\quad (1+i)^2=1+2i+i^2=2i$，

$\therefore\quad \left(\frac{\sqrt{2}}{1+i}\right)^{2584}=\left(\frac{2}{2i}\right)^{1292}=\left(\frac{1}{i}\right)^{1292}$

$=(-i)^{1292}=i^{1292}$

$=(-1)^{646}=1$。

【例 4】用复数的三角函数式求 $(1+i)(-1+\sqrt{3}\,i)$。

解：原式$=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)\cdot 2\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$

$$=2\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{2\pi}{3}\right)\right]$$

$$=2\sqrt{2}\left(\cos\frac{11\pi}{12}+i\sin\frac{11\pi}{12}\right).$$

【例 5】解方程 $x^3+1=0$。

解：原式变为 $x^3=-1=\cos\pi+i\sin\pi$,

$\therefore\quad x=\cos\frac{\pi+2k\pi}{3}+i\sin\frac{\pi+2k\pi}{3},\quad (k=0,1,2)$

即 $x_1=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i,$

$x_2=\cos\pi+i\sin\pi=-1,$

$x_3=\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i.$

说明：这里 x_1,x_2,x_3 就是 -1 的三个三次方根，其中一个是实数根。

【例 6】求 $\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^3$.

解法 1：按乘法公式：

$$\text{原式}=\left(-\frac{1}{2}\right)^3+3\left(-\frac{1}{2}\right)^2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$+3\left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^3$$

$$=-\frac{1}{8}+\frac{3\sqrt{3}}{8}i+\frac{9}{8}-\frac{3\sqrt{3}}{8}i=1;$$