高等院校数学教材同步辅导及考研复习用书

Spark 星火书业

# 概率论与数理统计辅导及习题精解

（与人大修订本教材配套）

中国人民大学 鞠方舟 主编

**联系考研，渗透精讲历年考研真题**

- 知识图表 清晰梳理考点重点难点
- 典型例题 深入讲解思路方法技巧
- 习题答案 权威提供详尽准确解析
- 同步自测 快速升华应用应试能力

中国社会出版社

高等院

Spark 星火书业

# 概率论与数理统计辅导及习题精解

（与人大修订本教材配套）

主　编　鞠方舟

副主编　王光臣　张云峰

中国社会出版社

**图书在版编目(CIP)数据**

**概率论与数理统计辅导及习题精解 / 鞠方舟主编. —北京:中国社会出版社, 2005.8**

ISBN 7-5087-0721-4

Ⅰ. 概...　Ⅱ. 鞠...　Ⅲ. ①概率论—高等学校—教学参考资料②数理统计—高等学校—教学参考资料
Ⅳ. 021

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 090010 号

**概率论与数理统计辅导及习题精解:人大修订本**

鞠方舟　主编

*

中国社会出版社出版发行

(北京市西城区二龙路甲 33 号新龙大厦　邮编:100032)

新 华 书 店 经 销

山东省文登市印刷厂有限公司印刷

*

880×1230 毫米　32 开本　11.50 印张　280 千字

2005 年 8 月第 1 版　2005 年 8 月第 1 次印刷

ISBN 7-5087-0721-4/O・13　定价:13.80 元

# 前 言

概率论与数理统计是高等院校理工科专业和部分文科专业一门重要的基础课程，也是历年硕士研究生入学考试的重点科目。

中国人民大学经济信息管理系编写的《概率论与数理统计》是一套深受广大教师和学生欢迎的、被全国很多高校普遍采用的优秀教材。经过修订后的第二版，更是结构严谨、逻辑清晰、层次分明、行文流畅，在讲授基础知识的同时又注意提炼和渗透数学思想方法，质量、体例臻于炉火纯青。

为了帮助广大高校在校生和正在准备考研的学子学好、复习好概率论与数理统计这门课程，我们本着"选好教材、做好辅导"的宗旨，以上述的中国人民大学经济信息管理系编写的《概率论与数理统计》(修订版)为针对教材，编写了这本与之章节、内容完全同步的《概率论与数理统计辅导及习题精解》配套辅导用书，给您系统梳理教材知识结构、清晰提炼教材重点考点、深入讲解题型例题方法、权威提供课后习题答案，让您学深、吃透教材知识，打好基础，同时，又注意紧密联系考研、精讲历年真题，设计同步自测、提供高效练习，让您学好教材的同时积极备考考研。

全书内容章、节设置基本上与教材完全同步，共分十一章，每一章又分为若干节，循着教材顺序对每一章每一节内容清晰梳理、深入讲解，每一章内容讲完后，再对整章内容重点做一回顾和加深，然后给出该章教材上的习题答案详解，设计该章同步自测题。十一章教材内容辅导完毕以后，书的最后附上了 2005 年考研数学真题，共您演练自测。

**每一章中每节内容讲解** 这部分由三块组成：该节知识结构图表、该节重点考点提炼、该节题型例题方法。

一、知识结构图表 这一部分用直观、形象的图表形式，将该节知识结构、相互联系、逻辑关系清晰的展示给读者，让读者一节内容了然于胸。

二、重点考点提炼 这一部分将该节一些重要的知识点、考点清晰、准确的提炼出来，并用简洁的语言对这些重点、考点需要注意的问题一一点明，让读者一下子抓住重点、针对复习。

三、题型例题方法 这一部分是每一节讲解中的核心内容，也是全书的核心内容。作者基于多年的教学经验和研究生入学考试试题研究经验，将该节教材内容中学生需要掌握的、考研中经常考到的重点、难点、考点，归纳为一个一个的在考试中可能出现的基本题型，然后针对每一个基本题

型，举出大量的精选例题、考研真题，举一反三、深入讲解，务必使您对每一个考查点扎实掌握、悟透吃透，并能熟练运用在具体解题中，可谓基础知识梳理、重点考点深讲、联系考试解题三重互动、一举突破，获得实际应用应试能力的全面提升。

每一例题讲解中穿插出现的“思路探索”、“方法点击”、“提醒贴士”，更是巧妙点拨处处呵护，让您举一反三、触类旁通。



**每一章后教材习题答案**　这一部分对该章教材上的全部习题给出详细、准确的答案解析，解析中同时给出思路点拨、知识链接，让您做好习题的同时，回顾、巩固、深化前面的内容讲解。

**每一章后同步自测练习**　这一部分是作者基于自己多年的教学经验并结合历年考研数学试题特点科学设计的，目的是给读者提供进一步的练习机会，让读者进一步消化知识、夯是考点、提高能力。这部分紧跟着练习答案详解。

**2005 考研数学试题解析**　书的最后，附上了 2005 年考研数学试题及解析，是为了让那些将来准备或正在准备考研的读者感受最新考研试题、自我检测能力水平，找出差距、调整复习。

全书内容编写系统、新颖、清晰、独到，充分体现了如下三大特色：

**一、知识梳理清晰、简洁**　直观、形象的图表总结，精炼、准确的考点提炼，权威、独到的题型归纳，将教材内容三下五除二、简明扼要的一下子梳理的一清二白，便于读者快速复习、高效掌握、形成稳固、扎实的知识结构，是后面提高解题能力和数学思维水平的基础。

**二、能力提升迅速、互动**　所有重点、难点、考点，统统归纳为一个一个的在考试中可能出现的基本题型，然后针对每一个基本题型，举出大量的精选例题、考研真题，举一反三、深入讲解，真正将知识掌握和解题能力高效结合、浑然一体，一举完成。

**三、联系考研密切、实用**　本书是一本教材同步辅导，也是一本考研复习用书，书中处处联系考研，例题中有考研试题，同步自测中也有考研试题，最后还附上了 2005 年考研数学试题及解析，更不用说讲解中处处渗透考研经常考到的考点、重点等，为的就是让同学们同步完成考研备考，达到考研要求的能力。

本书注意博采众家之长，参考了多本同类书籍，吸取了不少养分，在此向这些书籍的作者表示感谢。同时，由于作者水平所限，不足之处，在所难免，诚恳希望读者提出宝贵意见，以便再版时改进、修正。

# 目　录

# 第一章 随机事件及其概率

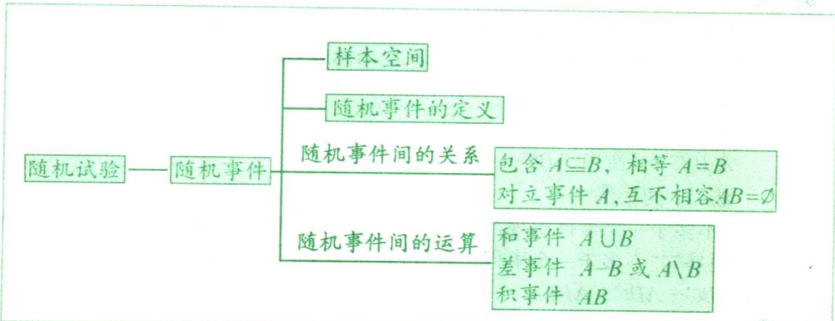
本章介绍了随机试验、随机事件的概念，事件间的关系及其运算，主要介绍了古典概率、条件概率的定义，概率的加法法则、乘法法则，全概率定理和贝叶斯定理，同时对古典概型和贝努里概型也做了重点论述.



## 第一节 随机事件

### 一、内容简析

【知识结构】




【重要知识点和考点分析】

1. 正确理解随机事件的相关概念

(1) 随机试验：在概率论中将具备下列三个条件的试验称为随机试验，简称试验：

1°. 在相同条件下可重复进行；

2°. 每次试验的结果具有多种可能性；

3°. 在每次试验之前不能准确预言该次试验将出现何种结果，但是所有结果明确可知.

(2) 随机事件：大量随机试验中具有某种规律性的事件.

(3) 基本事件：不能分解为其它事件组合的最简单的随机事件.

(4) 必然事件：每次试验中一定发生的事件，常用$\Omega$表示.

(5) 不可能事件：每次试验中一定不发生的事件，常用$\varnothing$表示.

2. 准确理解互斥事件与对立事件的区别与联系

(1) 互斥事件：在试验中，若事件 $A$ 与 $B$ 不能同时发生，而 $A\cap B=\varnothing$，则称 $A$、$B$ 为互斥事件. 显然，基本事件间是互斥的.

(2) 对立事件：每次试验中，“事件 $A$ 不发生”的事件称为事件 $A$ 的对立事件. $A$ 的

对立事件常记为 $\bar{A}$.

容易看出:对立事件一定是互斥事件,但互斥事件不一定是对立事件.

3. 事件的运算律:

(1) 交换律 $A\cup B=B\cup A$, $AB=BA$.

(2) 结合律 $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$,$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$.

(3) 分配律 $(A\cup B)C=(AC)\cup(BC)$,$A\cup(BC)=(A\cup B)(A\cup C)$.

(4) 摩根律 $\overline{A\cup B}=\bar{A}\cap\bar{B}$,$\overline{A\cap B}=\bar{A}\cup\bar{B}$.

(5) 对减法运算满足 $A-B=A\bar{B}$.

上述五条运算规律非常重要,特别是(4),(5)两条,希望读者熟练掌握.对于较复杂的事件运算,可采用文氏图帮助分析和理解.



## 二、题型、例题、方法

### 基本题型:与事件关系有关的问题

**【思路探索】** 充分利用事件的定义、事件的关系和运算律.

**例 1** 设 $A,B,C$ 表示三个随机事件,试用其表示下列各事件.

(1) $A$ 出现,$B$、$C$ 都不出现; (2) 三个事件中至少有一个出现;

(3) 不多于一个事件出现; (4) $A,B,C$ 中恰好有两个出现.

**解:**(1) $A\bar{B}\bar{C}$.(2) $A\cup B\cup C$.

(3) 法一:直接法

$\bar{A}\bar{B}\bar{C}+A\bar{B}\bar{C}+\bar{A}B\bar{C}+\bar{A}\bar{B}C$;

法二:间接法

"不多于一个事件出现"的对立事件为"三个事件中至少有两个出现",从而易知"不多于一个事件出现"可表示为 $\overline{AB+AC+BC}$.

(4) $AB\bar{C}+A\bar{B}C+\bar{A}BC$

**例 2** 设 $A,B,C$ 是任意的三个随机事件,试证明:

$ABC+AB\bar{C}+A\bar{B}C+\bar{A}BC=AB+BC+AC$.

**证明:**根据事件并的意义易知,

$$
\begin{aligned}
&ABC+AB\bar{C}+A\bar{B}C+\bar{A}BC\\
&=(ABC+AB\bar{C})+(ABC+A\bar{B}C)+(ABC+\bar{A}BC)\\
&=AB+AC+BC.
\end{aligned}
$$

故得证.

**【方法点击】** 正确运用随机事件并的概念.

**例 3** 设 $A$ 和 $B$ 是任意两个随机事件,则与 $A\cup B=B$ 不等价的是( )(2001 年,研,数学四)

(A) $A\subset B$ (B) $\bar{B}\subset\bar{A}$ (C) $A\bar{B}=\varnothing$ (D) $\bar{A}B=\varnothing$

**解:**根据题干的信息,$A\cup B=B\Leftrightarrow A\subset B\Leftrightarrow\bar{B}\subset\bar{A}\Leftrightarrow A\bar{B}=\varnothing$.所以选项(D)不正确.

**例 4** 设任意两个随机事件 $A$ 和 $B$ 满足条件 $AB=\bar{A}\bar{B}$,则( ).

(A) $A\cup B=\varnothing$ (B) $A\cup B=\Omega$ (C) $A\cup B=A$ (D) $A\cup B=B$

**解:**方法一:排除法

注意到$AB=\overline{A}\,\overline{B}$，那么$A$，$B$的地位是“对等”的，从而(C)，(D)均不成立.(A)不正确是显然的.故(B)正确.

方法二：直接法

运用摩根律，$AB=\overline{A}\,\overline{B}=\overline{A\cup B}$，那么

$A\cup B=(A\cup B)\cup AB=(A\cup B)\cup\overline{A\cup B}=\Omega$.故应该选择(B).

**例 5** 用$A$表示事件“甲种产品畅销，乙种产品滞销”，则其对立事件$\overline{A}$为(　　).(1989 年，研，数学三、四)

(A)“甲种产品滞销，乙种产品畅销”　　(B)“甲、乙两种产品均畅销”

(C)“甲种产品滞销”　　(D)“甲种产品滞销或乙种产品畅销”

**解：**本题考查摩根律

令$B$和$C$分别表示事件“甲种产品畅销”、“乙种产品滞销”，则$A=BC$，$\overline{A}=\overline{BC}=\overline{B}\cup\overline{C}$，即事件$\overline{A}$表示“甲种产品滞销或乙种产品畅销”，应选(D).

**例 6** 对于任意两个随机事件$A$与$B$，其对立的充要条件为(　　).

(A) $A$与$B$至少必有一个发生

(B) $A$与$B$不同时发生

(C) $A$与$B$至少必有一个发生，且$A$与$B$至少必有一个不发生

(D) $A$与$B$至少必有一个不发生

**解：**$A$与$B$对立$\Leftrightarrow A\cup B=\Omega$且$AB=\varnothing\Leftrightarrow\overline{A}\cup\overline{B}=\Omega$且$\overline{A}\,\overline{B}=\varnothing$.由此不难判定(C)正确.

**【方法点击】** 选择题主要考查基本概念、性质、定理，一般来说难度并不太大.选择题大概可分为两类：概念性、理论性选择题和计算性选择题，对于前者，主要运用基本概念、定理、公理、公式、法则及逻辑关系等基本工具对问题进行分析和逻辑推理从而确定正确答案.对于计算性选择题，需要经过计算才能选出正确选项.而有些问题的处理，则需要采用概念和计算相结合的方法.

# 第二节 概　率

## 一、内容简析

**【知识结构】**

随机事件 — 概率
- 统计定义 — 概率客观存在，但不能用来计算$P(A)$
- 古典定义 — 计算$P(A)=\dfrac{m}{n}$

**【重要知识点和考点分析】**

1. 概率的统计定义：在不变的条件下，重复进行$n$次试验，事件$A$发生的频率稳定地在某一常数$p$附近摆动.且一般说来，$n$越大，摆动幅度越小，则称常数$p$为事件$A$的概率，记作$P(A)$.

概率的统计定义仅仅指出了事件的概率是客观存在的，但这个定义不能用来计算 $P(A)$. 事实上，人们往往采用一次大量试验的频率或一系列频率的均值作为 $P(A)$ 的近似值.

2. 古典概型试验：概率论中，将具有下列两个特点的试验称为古典概型试验.

(1) 每次试验只有有限种可能的试验结果；

(2) 每次试验中，各基本事件出现的可能性完全相同.

对于古典概型试验，事件 $A$ 发生的概率为

$$P(A)=\frac{A\text{ 中基本事件数}}{\Omega\text{ 中基本事件数}}.$$

3. 计算古典型概率是本节的重点内容，也是考研的重点内容之一. 计算古典型概率 $P(A)$ 的关键是找出 $A$ 中的基本事件数，在计算过程中常常用到排列组合的知识，有时也需要用列举法逐一分析 $A$ 中的基本事件.

## 二、题型、例题、方法

### 基本题型Ⅰ：整除、非整除问题

**例 1** 将数字 1,2,3,4,5 写在 5 张卡片上，任取三张排列成三位数，这个数是奇数的概率 $P(A)=$________

**解：** 该试验的基本事件总数为 $P_5^3$. 此数字为奇数的等价条件为个位数字是奇数，当个位数字为奇数时，有三种可能情况，对于每一个固定的个位奇数，十位和百位数定有 $P_4^2$ 种可能情况，固此 $A$ 中的基本事件数为 $3P_4^2$. 由概率的古典定义，不难得

$$P(A)=\frac{3P_4^2}{P_5^3}=\frac{3}{5}.$$

**【方法点击】** 正确判断概型，准确计算 $\Omega$ 和有利事件中的基本事件总数，然后套用古典型概率的计算公式.

本题在计算过程中还用到了排列组合的有关知识，为了读者的方便，把它总结如下：

(1) 加法原理　做一件事，完成它可以有 $n$ 类办法，在第一类办法中有 $m_1$ 种不同的方法，在第二类办法中有 $m_2$ 种不同的方法，…，在第 $n$ 类办法中有 $m_n$ 种不同的方法. 那么完成这件事共有

$$N=m_1+m_2+\cdots+m_n$$

种不同的方法.

(2) 乘法原理　做一件事，完成它需要分成 $n$ 个步骤，做第一步有 $m_1$ 种不同的方法，做第二步有 $m_2$ 种不同的方法，…，做第 $n$ 步有 $m_n$ 种不同的方法. 那么完成这件事共有

$$N=m_1\times m_2\times\cdots\times m_n$$

种不同的方法.

这两个原理的区别是：加法原理完成一步即完成一件事；乘法原理 $n$ 步均需完成才能完成一件事.

(3) 排列　从 $n$ 个不同元素中，任取 $m(m\leqslant n)$ 个元素（$m$ 个元素互不相同），按照一定的顺序排成一列，叫做从 $n$ 个不同元素中取出 $m$ 个元素的一个排列，所有这种排

列的种数可记为 $P_n^m=n(n-1)\cdots[n-(m-1)]=\frac{n!}{(n-m)!}$. 从 $n$ 个不同元素中全部取出的排列称为全排列，此时的排列种数为 $P_n^n=n(n-1)\cdots1=n!$ 如无特殊情况，我们总约定 $0!=1$.

(4) 组合　从 $n$ 个不同元素中，任取 $m(m\leqslant n)$ 个元素并成一组，叫做从 $n$ 个不同元素中取出 $m$ 个元素的一个组合，其组合总数记为 $C_n^m$，并且有

$$C_n^m=\frac{P_n^m}{m!}=\frac{n!}{m!\ (n-m)!}.$$



### 基本题型Ⅱ：分房问题

**例 2**　设有 $n$ 个房间，分给 $n$ 个人，每个人都以 $\frac{1}{n}$ 的概率进入每一房间，而且每间房里的人数没有限制，试求不出现空房的概率.

**解：** 由题意 $n$ 个房间分给 $n$ 个人，人数没有限制，也就是说每个房间可以重复分配给不同的人，所以可能的排列种数为 $n^n$. 不出现空房，即每房间进入一人，这相当于 $n$ 个房间不重复地分给 $n$ 个排列好的人，也就是将这 $n$ 个房间进行全排列，可能的排列种数为 $n!$. 从而所求的概率为 $p=\frac{n!}{n^n}$.

### 基本题型Ⅲ：配对问题

**例 3**　从 6 双不同的鞋子中任取 4 只，问其中恰有一双配对的概率是多少？

**解：** 很明显，基本事件总数为 $C_{12}^4$. 有利事件中的基本事件数是，先从 6 双鞋子中取出一双，再从剩余的鞋子中任取两双，并从其每双中各取出一只，即 $C_6^1C_5^2C_2^1C_2^1$. 从而所求的概率为

$$p=\frac{C_6^1C_5^2C_2^1C_2^1}{C_{12}^4}=\frac{16}{33}.$$

**例 4**　从 $n$ 双不同的手套中任取 $2r(2r<n)$ 只，求下列事件发生的概率：

(1) 没有成双的手套；　(2) 只有一双手套；

(3) 恰有两双手套；　(4) 有 $r$ 双手套.

**解：** 试验的基本事件总数为 $C_{2n}^{2r}$.

(1) 有利事件中的基本事件数是，先从 $n$ 双中取 $2r$ 双，再从每双中取出一只，即 $C_n^{2r}\underbrace{C_2^1\cdots C_2^1}_{2r}=C_n^{2r}(C_2^1)2r$. 则所求的概率为

$$p=\frac{C_n^{2r}(C_2^1)^{2r}}{C_{2n}^{2r}}.$$

此类问题的关键是如何确定有利事件中的基本事件数.

(2) 有利事件中的基本事件数量，先从 $n$ 双中取 1 双，再从剩下的 $n-1$ 双中取 $2r-2$ 双，并从每双中取出一只，即 $C_n^1C_{n-1}^{2r-2}(C_2^1)^{2r-2}$，则所求概率为

$$p=\frac{C_n^1C_{n-1}^{2r-2}(C_2^1)^{2r-2}}{C_{2n}^{2r}}.$$

(3) 有利事件中的基本事件数为，先从 $n$ 双中任取 2 双，再从剩余的 $n-2$ 双中取 $2r-4$ 双，并从每双中取出一只，即 $C_n^2C_{n-2}^{2r-4}(C_2^1)^{2r-4}$ 则所求概率为

$$p=\frac{C_n^2C_{n-2}^{2r-4}(C_2^1)^{2r-4}}{C_{2n}^{2r}}.$$

(4) 有利事件中的基本事件数为，先从 $n$ 双中任取 $r$ 双，再将每双中的两只全部取出，即 $C_n^r(C_2^2)^r$. 故所求概率为

$$p=\frac{C_n^rC(C_2^2)^r}{C_{2n}^{2r}}.$$



### 基本题型Ⅳ：摸球问题

**例 5** 假设某袋中共有 9 个球，4 个白球，5 个黑球，现从中任取两个，试求下列事件发生的概率.

(1) 两个均为白球；

(2) 两个球中一个是白球，另一个是黑球；

(3) 至少有一个黑球.

**解：**(1) 方法一：设随机试验与选球的先后次序无关，易知基本事件总数为 $C_9^2$，且每事件等可能地发生，有利于取两个白球的事件 $A$ 的基本事件数为 $C_4^2$，故

$$P(A)=\frac{C_4^2}{C_9^2}=\frac{1}{6};$$

方法二：设随机试验与选球的先后次序有关，则基本事件总数为 $P_9^2$，且每事件等可能地发生，有利于取两个白球的事件 $A$ 的基本事件数为 $P_4^2$，所以

$$P(A)=\frac{P_4^2}{P_9^2}=\frac{1}{6};$$

(2) 方法一：设随机试验与选球的先后次序无关，基本事件总数为 $C_9^2$，有利于取一白一黑事件 $B$ 的基本事件个数为 $C_4^1C_5^1$，所以

$$P(B)=\frac{C_4^1C_5^1}{C_9^2}=\frac{5}{9};$$

方法二：设随机试验与选球的先后次序有关，基本事件总数为 $P_9^2$，"两球中一白一黑"这一事件等价于{"先取到白球，后取到黑球"；"先取到黑球，后取到白球"}，则有利于取一白一黑事件 $B$ 的基本事件个数为 $P_4^1P_5^1+P_5^1P_4^1=2P_4^1P_5^1$，所以

$$P(B)=\frac{2P_4^1P_5^1}{P_9^2}=\frac{5}{9}.$$

(3) 令事件 $C$ 表示"至少有一个黑球"，由对立事件的定义知 $\overline{C}=A$，从而

$$P(C)=1-P(\overline{C})=1-P(A)=1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}.$$

**例 6** 设一个袋中装有 $n-1$ 个黑球和 1 个白球，每次从袋中随机地摸出一球，并且换入一个黑球，如此继续下去，试问第 $k$ 次摸到黑球的概率是多少？

**解：**用 $A$ 表示事件"第 $k$ 次摸到黑球"，那么 $\overline{A}$ 表示事件"第 $k$ 次摸到白球"，先来计算 $P(\overline{A})$.

每次从袋中随机地摸出一球，并换入一黑球，依次进行到第 $k$ 次时，基本事件总

数为 $n^k$. 而 $\overline{A}$ 的基本事件数为，第 $k$ 次摸到白球，前面的 $k-1$ 次摸到黑球，即 $(n-1)^{k-1}\cdot 1$，

$$P(\overline{A})=\frac{(n-1)^{k-1}\cdot 1}{n^k},$$

那么

$$P(A)=1-P(\overline{A})=1-\frac{(n-1)^{k-1}}{n^k}.$$



**例 7** 设一个袋中装有 $a$ 个黑球，$b$ 个白球，现将球随机地一个个摸出，问第 $k$ 次摸出黑球的概率是多少？$(1\leqslant k\leqslant a+b)$

**解：** 令 $A$ 表示事件“第 $k$ 次摸到黑球”.

将这 $a+b$ 个球编号，并将球依摸出的先后次序排队，易知基本事件总数为 $(a+b)!$ 事件 $A$ 等价于在第 $k$ 个位置上放一个黑球，在其余 $a+b-1$ 个位置上放余下的 $(a+b-1)$ 个球，则 $A$ 包含的基本事件数为 $a(a+b-1)!$. 那么所求概率为

$$P(A)=\frac{a(a+b-1)!}{(a+b)!}=\frac{a}{a+b}.$$

### 基本题型Ⅴ：抽签问题

**例 8** 某普通话考试中有 7 份试卷，其中有 3 份较简单，有 7 位同学抽签决定自己的试卷（每份试卷对应一根签），甲同学先抽，乙同学随后抽. 请问甲、乙两同学分别抽到较简单试卷的概率是否相等？并证明你的结论.

**解：** 利用古典概型解决此问题.

分别用 $A$、$B$ 表示事件“甲先抽到简单试卷”和“乙第二个抽到简单试卷”. 把 7 个签所有可能的排列作为基本事件总数 7!. 事件 $A$ 等价于第一个位置排列简单试卷，其余六个位置随意排列试卷，所以有 $C_3^1 6!$，即

$$P(A)=\frac{C_3^1 6!}{7!}=\frac{3}{7};$$

事件 $B$ 等价于第二个位置排列简单试卷，其余六个位置随意排列试卷，所以有 $C_3^1 6!$，即

$$P(B)=\frac{C_3^1 6!}{7!}=\frac{3}{7}.$$

注意比较例 7 和例 8.

从而 $A$、$B$ 两事件发生的概率相等.

### 基本题型Ⅵ：其它形式问题

**例 9** 从 0,1,2,…,9 等十个数字中任意选出三个不同的数字，试求下列事件的概率：

$A_1=\{$三个数字中不含 0 和 5$\}$；$A_2=\{$三个数字中不含 0 或 5$\}$.

（1990 年，研，数学三）

**解：** 基本事件总数为 $C_{10}^3$，$A_1$ 的基本事件数为 $C_8^3$，$A_2$ 的基本事件数为 $2C_9^3-C_8^3$. 由

古典型概率公式得

$$P(A_1)=\frac{C_8^3}{C_{10}^3}=\frac{7}{15},P(A_2)=\frac{2C_9^3-C_8^3}{C_{10}^3}=\frac{14}{15}.$$

**例 10** 从0,1,2,…,9等十个数字中任意选出三个不同的数字,试求下列事件的概率.

$A_1$={三个数字中不含0和5},$A_2$={三个数字中含0但不含5}.

(1990年,研,数学四)

**解:** 基本事件总数为$C_{10}^3$. $P(A_1)$的解法同例9.下面可用两种方法计算事件$A_2$中的基本事件数.

方法一:$A_2$等价于从1,2,…,9中任取四个数字再加上0,同时减去从1,2,3,4,6,7,8,9中任取一个数字再加上0和5,即$C_9^2-C_8^1$.

方法二:从1,2,3,4,6,7,8,9这8个数字中任取两个数字再加上一个数字0,即$C_8^2$.由古典型概率计算公式得

$$P(A_2)=\frac{C_9^2-C_8^1}{C_{10}^3}=\frac{C_8^2}{C_{10}^3}=\frac{7}{30}.$$

**例 11** 将$C,C,E,E,L,I,N,S$等七个字母随机地排成一行,那么,恰好排成英文单词$SCIENCE$的概率为________.(1992年,研,数学三)

**解:** 令$A$表示事件"排成英文单词$SCIENCE$".

易知基本事件总数为7!,$A$的基本事件数为2!·2!,根据古典型概率计算公式得

$$P(A)=\frac{2!\cdot 2!}{7!}=\frac{1}{1260}.$$

**例 12** 在11张卡片上分别写上probability这11个字母,从中任意连续抽出7张进行排列,求排列结果为ability的概率.

**解:** 令$A$表示事件"排列结果为ability".

基本事件总数为$P_{11}^7$,$A$中的基本事件数为2!·2!,由古典型概率计算公式得

$$P(A)=\frac{2!\cdot 2!}{P_{11}^7}.$$

**例 13** 考虑一元二次方程$x^2+Bx+C=0$,其中$B,C$分别是将一枚骰子接连掷两次先后出现的点数.求该方程有实根的概率$p$和有重根的概率$q$.

(1996年,研,数学三)

**解:** 一枚骰子掷两次,其基本事件总数为36.令$A_i(i=1,2)$分别表示"方程有实根"和"方程有重根",则

$$A_1=\{B^2-4C\geqslant 0\}=\left\{C\leqslant\frac{B^2}{4}\right\},A_2=\{B^2-4C=0\}=\left\{C=\frac{B^2}{4}\right\}.$$

注意到表1-1

表 1-1

| $B$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $A_1$ 的基本事件个数 | 0 | 1 | 2 | 4 | 6 | 6 |
| $A_2$ 的基本事件个数 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |

为什么?



由此易知 $A_1$ 的基本事件个数为

$$0+1+2+4+6+6=19,$$

则由古典型概率计算公式得

$$p=P(A_1)=\frac{19}{36}.$$

$A_2$ 的基本事件个数为

$$0+1+0+1+0+0=2,$$

由古典型概率计算公式得

$$q=P(A_2)=\frac{2}{36}=\frac{1}{18}.$$

# 第三节 概率的加法法则

## 一、内容简析

【知识结构】

概率
- 概率的定义
- 概率的加法法则

【重要知识点和考点分析】

1. 概率的意义　设$\Omega$是一样本空间，称满足下列三条公理的集函数 $P(\cdot)$为定义在$\Omega$上的概率：

(1) 非负性　对任意事件 $A$，$P(A)\geqslant 0$；

(2) 规范性　$P(\Omega)=1$；

(3) 可列可加性　若两两互不相容的事件列$\{A_n\}$是可列的，则

$$P(\sum_{i=1}^{\infty}A_i)=\sum_{i=1}^{\infty}P(A_i).$$

2. 概率的加法法则

(1) 有限可加性　若 $n$ 个事件 $A_1,\cdots,A_n$ 两两互不相容，则

$$P(A_1+\cdots+A_n)=P(A_1)+\cdots+P(A_n).$$

可列可加性　若可列个事件 $A_1,A_2,\cdots$两两个互不相容，那么