多元复分析

COMPLEX ANALYSIS IN SEVERAL VARIABLES

钟同德　黄　沙　编著

ZHONG TONGDE HUANG SHA

国家自然科学基金和河北省教委资助的课题

河 北 教 育 出 版 社

多元复分析

COMPLEX ANALYSIS IN SEVERAL VARIABLES

钟同德　黄　沙　编著
ZHONG TONGDE　HUANG SHA

国家自然科学基金和河北省教委资助的课题

河 北 教 育 出 版 社

内 容 简 介

多元复分析是现代数学中最为活跃的学科之一. 本书介绍多复变数中有广泛应用的三种方法:积分表示,复几何,层与上同调理论. 在此基础上详细介绍近二十年来蓬勃发展的研究方向:多复变函数的积分表示与 $\bar{\partial}$ 方程,Stein 流形上的函数论,全纯开拓和双全纯映射的 Fefferman 定理等,目的是帮助读者较快地进入前沿开展研究工作.

本书适合大学数学系师生,以及从事函数论、代数几何、微分几何、拓扑学、微分方程和理论物理研究的工作者阅读.

多 元 复 分 析

Complex Analysis

In Several Variables

钟同德　黄　沙　编著

Zhong Tongde　Huang Sha

国家自然科学基金和河北省教委资助的课题

河北教育出版社出版(石家庄市北马路 45 号)

河北新华印刷三厂印刷　河北省新华书店发行

850×1168 毫米 1/32　12 印张　292,000 字　1990 年 8 月第 1 版

1990 年 8 月第 1 次印刷　印数:1—500　定价:4.40 元

ISBN 7-5434-0738-8/O·21

序　言

多元复分析是现代数学中最为活跃的学科之一. 量变到质变的规律使多元复分析和单复变量分析的理论在许多方面都绝然不同. 例如单复变量的 Riemann 映射定理在多复变量已不再成立,C^n 空间中域的分类问题至今没有解决;又如在 C^n 空间中一域上的全纯函数的数值有时不必由全部边界上的数值决定;此外在 C^n 中有所谓 Hartogs 现象,例如在超球环$\frac{1}{2}<|Z_1|^2+|Z_2|^2<1$中全纯的函数一定在超球 $|Z_1|^2+|Z_2|^2<1$ 上全纯.

早在 19 世纪末和 20 世纪初许多著名数学家就已提出多复变数中的著名问题,例如 1907 年 H・Poincare′ 就已发现 C^2 中的双圆柱和超球不是全纯等价的,因此单复变量的 Riemann 映射定理在 C^n 中不再成立;1895 年 Cousin 提出了著名的 Cousin 问题,即在 C^n 中拓广单复变数的 Mittag-Leffler 定理和 Weierstrass 定理;1911 年 E・E・Levi 提出拟凸域是否纯域的 Levi 问题;1936 年 E・Cartan 提出可递域是否都是对称域?但是这些著名猜想一直到本世纪 50 年代初 H・Cartan 及 J・P・Serre 才漂亮地解决了 Cousin 问题,K・Oka 等人解决了 Levi 猜想,60 年代初 Пятецкии-Щапиро 才给出了 E・Cartan 猜想的反例. 由于这些难题的解决,从而也发展了一些有效的方法,例如多次调和函数,全纯函数局部环的代数"凝聚理论"和凝聚解析层的上同调理论等,因而也促进了多复变数和现代数学的发展. 60 年代中 J・J・Kohn,L・Hörmander 和 70 年初 Γ・M・Хенкин,H・Grauert,I・Lieb 等人又解决了在多复变函数论中有重大意义的$\bar{\partial}$问题,分别提出了$\bar{\partial}$问题的 L^2 估计和 L^∞ 估计方法,从而又提供了一种解决 Cousin 问题和 Levi 问题的新方法. 1974 年 C・

Fefferman 又提出了双全纯映射的 Fefferman 定理，为拟凸域的分类问题开辟了方向．自从 1970 年 Г·М·Хенкин 和 H·Grauert，I·Lieb 等得到了 $\bar{\partial}$ 方程解的积分表示以后，积分表示的方法就成为研究多复变函数的较统一的方法；积分表示方法一方面既容易和单复变数的 Cauchy 积分方法类比，同时由于具体，因此也便于估计，所以二十年来得到蓬勃的发展．由以上所说可知多元复分析的研究虽然在 19 世纪末和 20 世纪初就已开始，但一直到 50 年代以后才开始得到发展，特别是 70 年代以后更是方兴未艾．

由于多元复分析的研究对象是多复变数的函数和复流形，所以在它的研究中几乎使用了所有现代数学的概念和方法，例如微分几何，代数几何，李群，拓扑学，偏微分方程，泛涵分析等等，而多复数的发展又促进了其它学科的发展，例如大范围分析，代数几何，微分几何，偏微分方程等．

根据编者多年从事多元复分析的教学和研究，深感入门不易，深造更难，主要是由于多元复分析的内容广泛，用到的数学工具多，难于自学，所以很需要有一本有现代水平的，能在有限篇幅中，既介绍这学科的发展主流和最新成果，又介绍必要的各种数学方法．基于这个设想，本书介绍了多复变数中目前广泛应用而又必要的三种方法：积分表示，复几何和层与上同调理论，同时详细介绍了多复变全纯函数的基本性质和全纯域与拟凸域的理论，目的是为初学者打好必要的基础；在这基础上我们详细介绍了近二十年来蓬勃发展的研究方向：多复变函数的积分表示与 $\bar{\partial}$ 方程，Stein 流形上的函数论，全纯开拓和双全纯映射的 Fefferman 定理等，目的是引导帮助读者较快地进入前沿开展研究工作．

本书第一章介绍多复变数全纯函数的基本性质，第二章介绍全纯域与拟凸域，第三章介绍微分形式和 Hermite 几何，第四章介绍多复变函数的积分表示与 $\bar{\partial}$— 方程，第五章介绍复流形上的函数论，第六章介绍层与上同调及其应用．

本书的叙述尽可能将抽象概念具体化;详细介绍问题的历史背景和发展前景,指出必要的参考文献供读者进一步研究时参考,同时本书叙述时也尽可能让读者了解多元复分析的全貌,详细分析各种问题和方法之间的联系,并着重介绍上述二十年来蓬勃发展的多复变函数的积分表示与 $\bar{\partial}$— 方程,Stein 流形上的函数论等几个研究方向,以便使读者能在较短时间内独立进行研究工作.

多元复分析的研究内容广泛,方法繁多,本书介绍的只是其中的一部分,但是只要掌握了这些内容,就不难乘胜前进扩大阵地,更新武器;同时我们认为正因为多元复分析的研究内容广泛,所以容易吸引有广泛兴趣的数学工作者,也正因为使用的方法多,所以凡在某些方面已学有所长的,都可以在这块光辉灿烂的园地有用武之地,所以希望更多的有志青年进入这块有吸引力的美丽园地,为多元复分析的发展作出杰出的贡献.

本书的编写得到国家自然科学基金和河北省教委的赞助.

编　者

1989 年 7 月

Complex Analysis in Several Variables

Zhong Tongde **Huang Sha**

This introductory text deals with three fundamental methods in several complex variables: Integral representations Complex geometry, Sheaf and Cohomology theory. On the basis of these methods the authors devote to introducing some research topics which are developping quickly in the last 20 years: Integral representations in several complex variables and $\bar{\partial}$-equations, Theory of functions on Stein manifolds, Holomorphic extension and C • Fefferman's famous mapping theorem of biholomorphic mapping, etc., so that the readers may get an all-round view of the recent developments of researches on these subjects.

The authors devote the first chapter to introducing the definition of holomorphic functions of several complex variables and their fundamental properties. The second chapter discuss holomorphic domains and pseudoconvex domains. Holomorphic convexity, Levi convexity and plurisubharmonic convexity are introduced, and pseudoconvex domain with $C^{(2)}$ smooty boundary , general pseudoconvex domain as well as Levi problem are discussed. The third chapter discuss differential forms and Hermitian geometry. Stoke's formula, Vector boundles and holomorphic vector boundles, connection and curvature of vector boundles, Hermitian manifolds and Kaehler manifolds are treated. Described methodically in the fourth chapter are various integral representations of the holomorphic functions on various domains in the space of C^n and

Stein manifolds, for example Bochner-Martinelli integral representation, Cauchy-Fantappie formula, Henkin-Ramirez formula. The Koppelman-Leray formula and the integral representations of the solution of $\bar{\partial}$-equations of (p, q) type are described. The fiveth chapter devote to discuss function theory on complex manifolds. J • Plemelj formula with Bochner-Martinelli kernel in C^n and Stein manifolds, Hartogs-Bochner theorem of holomorphic extension are introduced. Besides, the orthogonal systems and Bergman kernel function theroy on the bounded domain in C^n are discussed, and a simplified proof of C • Fefferman's famous mapping theorem is introduced. In the last chapter are the sheaf and cohomolgy theory and its application to Cousin problem and division problem.

目　　录

第一章　多复变数全纯函数的基本性质

由于在复数平面上著名的 Riemann 映射基本定理在多复变数空间 C^n 中不再成立(参考后面的第 1.4.4 段),C^n 空间中不同区域上的全纯函数的 Cauchy 积分公式具有各种不同形式(参考第四章),C^n 空间中的全纯函数还有复数平面上没有的 Hartogs 现象(参考 1.3.3 段和第二章),所以多复变数全纯函数的性质已在许多方面和单复变数全纯函数截然不同,本章介绍多复变数全纯函数的定义和一些同单复变数全纯函数类似的性质,作为以后各章内容的基础.

§ 1.1　多复变数全纯函数的定义和简单性质

1.1.1　记号

我们分别用 C^n 和 R^n 表示 n 个复变数和实变数的空间,$C^n = R^n + iR^n$. R^n 空间中的点用 $x = (x_1, x_2, \cdots x_n)$, y, ξ, η 等表示;C^n 空间中相应的点用 $z = (z_1, z_2, \cdots, z_n) = x + iy$, ζ, $\cdots$ 表示. 点 z 的共轭点用 $\bar{z}$ 表示,$\bar{z} = x - iy$. 符号 $|z|$, $|x|$, $\cdots$, $z\zeta$, $z\xi$, $\cdots$ 分别表示欧几里得长度(模)和数量积

$$|z| = \sqrt{z\bar{z}}, z\zeta = z_1\zeta_1 + z_2\zeta_2 + \cdots + z_n\zeta_n.$$

如果 $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_n)$ 表示具有非负分量的整数向量,命

$$D = \left(\frac{\partial}{\partial z_1}, \frac{\partial}{\partial z_2} \cdots, \frac{\partial}{\partial z_n}\right)$$

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial z_1{}^{\alpha_1} \partial z_2{}^{\alpha_2} \partial z_n{}^{\alpha_n}}, |\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n,$$

$$\alpha! = \alpha_1! \alpha_2! \cdots \alpha_n!, z^\alpha = z_1{}^{\alpha_1} z_2{}^{\alpha_2} \cdots z_n{}^{\alpha_n}.$$

符号 z^{α} 也可以用来表示负整数 α_j 的情形. 向量(1,1,…1) 记为 I. 当不致引起混乱时,我们将记 $z_1z_2\cdots z_n$ 为 z^I,记 $dz_1dz_2\cdots dz_n$ 为 dz,以及记$(z_2,\cdots,z_n)$ 为 $\tilde{z}$

如果 $z^0\in C^n, r>0$,以

$$B(z^0,r)=\{z\in C^n:|z-z^0|<r\}$$

定义以 z^0 为心半径为 r 的**开球**,以

$$D^n(z^0,r)=\{z\in C^n:|z_j-z_j^0|<r,j=1,\cdots,n\}$$

定义以 z_0 为心半径为 r 的**开多圆柱**. 命 D 表示单位圆盘 $D^1(0.1)\subseteq C$. 符号 $\overline{B}(z^0,r)$,$\overline{D}^n(z^0,r)$ 分别表示 $B(z^0,r)$,$D^n(z^0,r)$ 的闭包. 有时考虑如下形式

$D^n(z^0,r)=D^1(z_1^0,r_1)\times\cdots\times D^1(z_n^0,r_n)=\{z\in C^n:|z_j-z_j^0|<r_j,j=1,\cdots,n\}$的多圆柱,其中 $r=(r_1,\cdots,r_n)$.

C^n 空间中的“区域”D 是一连通开集,在许多情形 R^N(或 C^n) 中的区域 D 都具有 $-C^{(j)}$ 边界,$j\geqslant 1$. 后者表示有 $-C^{(j)}$ 函数 $\rho:R^N\to R$(或 $\rho:C^n\to R$) 使得

$$D=\{z:\rho(z)<0\}$$

且对所有 $z\in\partial D$,$\mathrm{grad}\rho(z)\neq 0$,我们用记号 ∂D 表示 D 的边界,函数 ρ 称为 D 的**定义函数**.

定义

$$\begin{aligned}dv(z)=dv_n(z)&=\left(\frac{1}{2i}\right)^n(d\bar{z}_1\wedge dz_1)\wedge\cdots\wedge(d\bar{z}_n\wedge dz_n\\&=\left(\frac{1}{2i}\right)^n(2idx_1\wedge dy_1)\wedge\cdots\wedge(2idx_n\wedge dy_n)\\&=dx_1\wedge dy_1\wedge\cdots\wedge dx_n\wedge dy_n\end{aligned}$$

为 C^n 的体积形式,记号 dv 也表示 R^N 的体积.

1.1.2 多复变数全纯函数的定义

我们有以下四个多复变数全纯函数的定义.

定义 1.1.1　全纯函数的 Riemann 定义　函数 $f(z)$ 称为**在点 $z^0 \in C^n$ 全纯**，如果在这点的某一邻域存在所有一阶偏导数 $\frac{\partial f}{\partial z_\alpha}, \alpha = 1,2,\cdots,n$，即如果满足 Cauchy-Riemann 条件

$$(1.1.1)\qquad \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} = \frac{\partial v}{\partial y_\alpha}, \quad \frac{\partial u}{\partial y_\alpha} = -\frac{\partial v}{\partial x_\alpha}, \alpha = 1,2,\cdots,n$$

其中 $f = u + iv, z_\alpha = x_\alpha + iy_\alpha$.

因此，函数在 Riemann 意义下在 z^0 全纯，如果它在这点的某一邻域分别对每一个变量全纯(当固定其余变量时).

如果将

$$z_\alpha = x_\alpha + iy_\alpha, \quad \bar{z}_\alpha = x_\alpha - iy_\alpha$$

或 $$x_\alpha = \frac{z_\alpha + \bar{z}_\alpha}{2}, \quad y_\alpha = \frac{z_\alpha - \bar{z}_\alpha}{2i}$$

看作变量的变换而引进**形式导数**

$$\frac{\partial}{\partial z_\alpha} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_\alpha} - i\frac{\partial}{\partial y_\alpha}\right), \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}_\alpha} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_\alpha} + i\frac{\partial}{\partial y_\alpha}\right),$$

即若 $f(x,y)$ 是实变量 x,y 的有连续偏导数的函数，则定义

$$\frac{\partial f}{\partial z_\alpha} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_\alpha} - i\frac{\partial f}{\partial y_\alpha}\right), \quad \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_\alpha} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_\alpha} + i\frac{\partial f}{\partial y_\alpha}\right).$$

如是 Cauchy-Riemann 方程(1.1.1) 可书为

$$(1.1.2)\qquad \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_\alpha} = 0, \quad \alpha = 1,\cdots,n.$$

这时定义 1.1.1 可写成

定义 1.1.2　函数 $f(z)$ 称为在点 $z^0 \in C^n$ 全纯，如果在这点的某一邻域分别对每一个复变量都是连续可微，并满足 $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}_\alpha} = 0, \alpha = 1,\cdots,n$.

定义 1.1.3　全纯函数的 Weierstrass 定义　函数 $f(z)$ 称为**在点 $z^0 \in C^n$ 全纯**，如果在这点的邻域它可写成一个**绝对收敛的幂级数**

$$(1.1.3)\qquad f(z) = \sum_{|\alpha| \geq 0} a_\alpha (z - z^0)^\alpha, a_\alpha = \frac{1}{\alpha!} D^\alpha f(z^0).$$

这个幂级数称为全纯函数 $f(z)$ 的 Taylor 展开式.

定义 1.1.4 设函数 $f(z)$ 分别对每一个变量都是连续的而且局部有界,则函数 f 称为**在点** $z^0 \in C^n$ 全纯,如果在这点的某一多圆柱邻域 $D^n(z^0,r)$ 可以表成

$$f(z) = \frac{1}{(2\pi i)^n}\int_{|\zeta_n - z_n^0|=r}\cdots\int_{|\zeta_1 - z^0|=r}\frac{f(\zeta_1,\cdots,\zeta_n)}{(\zeta_1 - z_1)\cdots(\zeta_n - z_n)}d\zeta_1\cdots d\zeta_n$$

对所有的 $z \in D^n(z^0,r)$.

以上全纯函数的四个定义是等价的.

1.1.3 全纯函数定义的等价性

定义 1.1.1 和定义 1.1.2 的等价性是显然的. 定义 1.1.1 和定义 1.1.4 的等价性只要重复应用单复变数的 Cauchy 积分公式就可以得到.

以下我们证明定义 1.1.1 和定义 1.1.3 的等价性.

先证定义 1.1.3 → 定义 1.1.1:

设函数 $f(z)$ 在点 z^0 在 Weierstrass 意义下是全纯的. 那末级数(1.1.3)在某一闭多圆柱 $\overline{D}^n(z^0,r)$ 是绝对收敛的,于是对某一 $M > 0$,有

$$(1.1.4) \qquad |a_\alpha| \leqslant \frac{M}{r^\alpha}, \quad |\alpha| = 0,1,\cdots$$

在此 $r = (r_1,r_2,\cdots,r_n)$. 因此级数(1.1.3) 在 $D^n(z^0,r)$ 中被级数

$$M\sum_{|\alpha|\geqslant 0}\left(\frac{z - z^0}{r}\right)^\alpha = M\left(1 - \frac{z - z^0}{r}\right)^{-1}$$

所优越,并且他可以逐项微分无穷次,而且他的所有导数都是连续函数. 特别

$$(1.1.5) \qquad a_\alpha = \frac{1}{\alpha!}D^\alpha \quad f(z^0).$$

因此,**每一个在 Weierstrass 意义下的全纯函数,都是无穷次连续可微的,并且它的导数还是全纯函数**. 特别,每一个在 Weierstrass 意义下的全纯函数,在 Riemann 意义下都是全纯的.

其次证定义 1.1.1 → 定义 1.1.3：

从定义 1.1.1 推出定义 1.1.3 实际上是下面的 Hartogs 基本定理(Hartogs [1906b])

定理 1.1.1 Hartogs 基本定理 如果函数 $f(z)$ 对每一个变量分别是全纯的，那么他对变量的全体是全纯的(在 Weierstrass 意义下的全纯).

这个定理的证明比较困难，请参阅钟同德[1986].

现在我们在函数 $f(z)$ 是有界的补充假定下来证明这个定理.

假设函数 $f(z)$ 分别对每一个变量 z_j 是全纯的并且在闭多圆柱 $\overline{D^n}(z^0,r)$ 上是有界的(由 Heine-Borel 引理，这表示 $f(z)$ 分别对每一个变量在略大一点的多圆柱 $D^n(z^0,r+\varepsilon I)$ 上是全纯的，其中 $\varepsilon>0$). 因此，连续应用单复变量的 Cauchy 公式，对所有的 $z\in D^n(z^0,r)$ 我们有

$$(1.1.6)\qquad f(z)=\frac{1}{(2\pi i)^n}\int_{\partial D^1(z_1^0,r_1)}\frac{d\zeta_1}{\zeta_1-z_1}\int_{\partial D^1(z_2^0,r_2)}\frac{d\zeta_2}{\zeta_2-z_2}\cdots,$$
$$\cdots\int_{\partial D^1(z_n^0,r_n)}\frac{f(\zeta)d\zeta_n}{\zeta_n-z_n},$$

其中在 $\partial D^1(z_j^0,r_j)$ 上的正向取反时针的方向. (1.1.6) 中的被积函数

$$f(\zeta)=f(z_1^0+r_1e^{i\theta_1},z_2^0+r_2e^{i\theta_2},\cdots,z_n^0+r_ne^{i\theta_n})\equiv f(z^0+re^{i\theta})$$

由假定当 $0\leqslant\theta_j\leqslant 2\pi$, $j=1,2,\cdots,n$ 时按模一致有界. 不难证明这个函数是可测的. 因此它是可积的并且由 Fubini 定理屡次积分(1.1.6) 可化成重积分

$$(1.1.7)\qquad f(z)=\frac{r^I}{(2\pi)^n}\int_0^{2\pi}\cdots\int_0^{2\pi}\frac{f(z^0+re^{i\theta})e^{i\theta I}d\theta}{(z^0+re^{i\theta}-z)^I}\equiv$$
$$\equiv\frac{1}{(2\pi i)^n}\int_{\partial D^1(z_1^0,r_1)\times\cdots\times\partial D^1(z_n^0,r_n)}\frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta-z)^I},\ z\in D^n(z^0,r)$$

设 $z\in D^n(z^0,r')$, $r_j'<r_j$, 那末级数

$$(1.1.8)\qquad \frac{1}{(z^0+re^{i\theta}-z)^I}=\sum_{|\alpha|\geqslant 0}\frac{(z-z^0)^\alpha}{r^{\alpha+I}}e^{-i\theta(\alpha+I)}$$

关于z和θ绝对且一致收敛. 由于$f(\zeta)$有界,因此可将级数(1.1.8)代入公式(1.1.7),然后可以交换积分和和号次序,由此得到Taylor 级数(1.1.3),它在多圆柱$D^n(z^0,r)$绝对收敛并有系数

$$(1.1.9)\qquad a_\alpha=\frac{1}{(2\pi)^n}\int_0^{2\pi}\cdots\int_0^{2\pi}\frac{f(z^0+re^{i\theta})}{r^\alpha}e^{-i\theta_\alpha}d\theta\equiv$$

$$\equiv\frac{1}{(2\pi)^n}\int\limits_{\partial D^1(z_1^0,r_1)\times\cdots\times\partial D^1(z_n^0,r_n)}\frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta-z^0)^{\alpha+I}}.$$

这就是所要证明的.□

我们说给定在区域$D\subset C^n$上的**函数 f(z) 在区域 D 上是全纯的**,如果它在区域D上的每一点是全纯的.

1.1.4 广义多圆柱上的 Cauchy 积分公式

设D_α为$z_\alpha(\alpha=1,2,\cdots,n)$平面的有界区域,当$z_1,\cdots,z_n$彼此无关地分别在$D_1,\cdots,D_n$上变动时,复数组$(z_1,z_2,\cdots,z_n)$的全体所构成的$C^n$中的区域,称为**广义多圆柱区域**,以$(D_1,\cdots,D_n)$表示之,即$(D_1,D_2,\cdots,D_n)=D_1\times D_2\times\cdots\times D_n$. 事实上广义多圆柱区域$(D_1,D_2,\cdots,D_n)$是$n$个平面区域$D_1,D_2,\cdots,D_n$的拓扑乘积.

定理 1.1.2 设$D=D_1\times\cdots\times D_n$为广义多圆柱,其中每一$D_\alpha$皆是$Z_\alpha$平面的有界区域,其边界$\partial D_\alpha$由有限多个互不相交的、有长的、简单的闭曲线组成,设$f(z)$在$D=D_1\times\cdots\times D_n$全纯,且在其边界仍然连续,则对任一点$Z\in D_1\times\cdots\times D_n$有广义多圆柱的Cauchy 公式

(1.1.10)

$$f(z)=\frac{1}{(2\pi i)^n}\int\limits_{\partial D_1\times\cdots\times\partial D_n}\cdots\int\frac{f(\zeta_1,\cdots,\zeta_n)}{(\zeta_1-z_1)\cdots(\zeta_n-z_n)}d\zeta_1\cdots d\zeta_n.$$

证明 和推导多圆柱区域$D^n(z^0,r)$上的 Cauchy 公式(1.1.7)时一样.□