教和学辅导丛书

立体几何

中国青年出版社

教和学辅导丛书

立体几何

北京师范大学中学教学研究中心　主编

中国青年出版社

封面设计：魏　杰

教和学辅导丛书
立 体 几 何
北京师范大学中学教学研究中心
●
中国青年出版社出版　发行
朝阳新华印刷厂分厂印刷　新华书店经销
●
787×1092　1/32　6.5 印张　140千字
1988年10月北京第1版　1988年10月朝阳第1次印刷
印数1—50,000册　定价：1.90元

目　录

前　言

为了更好地贯彻执行中学教学大纲的精神，按照教学大纲的要求进行教学改革，改进教学方法，提高教学质量，帮助广大中学师生努力达到教学大纲所规定的教学目标，使学生扎扎实实地学好学活基础知识，我们在张国栋、高建军等同志最初组织编写的中学各年级教学用书的基础上，主编了中学“教和学辅导丛书”．参加编写的都是全国一些著名中学，有丰富教学经验的教师。

这套丛书紧密配合新编的中学课本，突出重点，注意方法、思路的分析，每本书的内容主要包括基本学习要求、重点知识分析、难点辨析、错例究因、例题和练习，以及课外活动资料等．它的主要特点是抓纲扣本，纲本结合；从教学实际出发，既有利于中学生掌握知识，发展能力，提高学习效果，也有助于中学教师剖析教材，精心备课，提高教学水平．但愿这套丛书能成为中学师生的良师益友。

丛书主编组由阎金铎、陈浩元、庄俶旭、陶卫、乔际平同志组成．数学、物理、化学、外语4科的编委会由王绍宗、华跃义、胡炯涛、马明、孟学军、张国栋、高建军同志主持．政治科的编委会由阎金铎、张志建同志主持。

本书由福州市第一中学林宗祈以及陈雷鸣、陈文端等同

志编写.

我们恳切地期望使用这套丛书的读者能提出宝贵建议，以便再版时修订完善，使它更好地为我国的中学教学改革服务.

北京师范大学中学教学研究中心

1988年3月1日

第一章　直线和平面

本章主要讨论空间直线和平面的位置关系．平面几何是立体几何的基础，平面图形是由同一个平面内的点、线组成，而空间图形是由不含在同一平面内的点、线和面组合而成．凡是平面几何关于平面图形的性质，在空间的任何一个平面内都是成立的．因此，学习中在注意立体几何特性的同时，还要善于把空间问题转化为平面问题加以处理．

1.1　平　面

1.1.1　教材分析

本节的主要内容是平面的概念、画法、表示法，平面的基本性质及其应用，水平放置平面图形的直观图画法——斜二测画法，其中平面的概念及其性质是研究空间图形性质的理论基础，也是将空间几何图形问题转化为平面几何图形问题的主要依据．平面的基本性质是本节的重点内容，平面概念的理解与深化是本节的难点．

1.1.1.1　平面的概念　如同点、直线的概念一样，平面是

一个只描述而不定义的最基本概念，它是桌面、书面、黑板面、玻璃面、平静的湖水面等的具体形象的抽象和概括．它是无限延展的，没有大小、宽窄和厚薄之分．平时见到的具体的“平面”，只是平面的一部分．

1）直线是无限延伸的，平面也是无限延伸的，否则无限的直线怎能在有限的平面内呢？直线可以把平面分成两部分，平面可以把空间分成两部分．

2）由于平面是无限延伸的，如用平行四边形表示的平面仅仅是平面的一部分，可根据需要把平行四边形扩展或缩小．

3）画水平放置的平面时，通常把平行四边形的锐角画成45°，横边画成邻边的两倍．画竖直放置的平面时，表示平面的平行四边形要有一组对边为竖直线．其余放置形式的平面，可视具体的需要，或用平行四边形表示，有时也可以用非平行四边形甚至不规则的图形来表示．画两相交的平面时一定要画出它们的交线．在立体几何的直观图中，不论是辅助线还是轮廓线，都是可见部分画实线，被遮住的不可见部分画虚线或不画，这与平面几何不同．否则破坏了空间感，不利于对空间图形的理解，举例如图1-1．

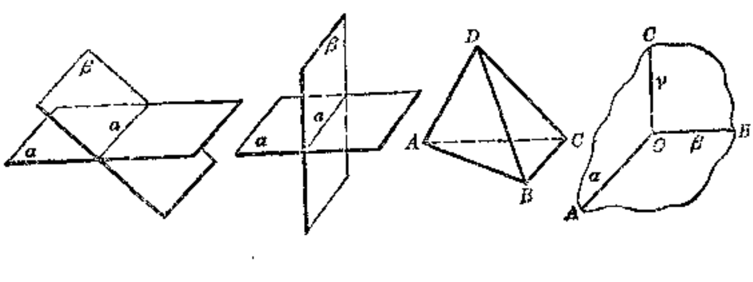


图 1-1

1.1.1.2 平面的基本性质 如同平面几何一样，它是以原始概念和公理为基础，运用综合演绎的方法来研究空间图形的性质．人们把平面的3个基本性质作为公理，它是研究空间图形的理论基础．

“有且只有一个”的含义是：“既存在，且又唯一”，对图形来说，也就是图形完全“确定”．存在性与唯一性的证明是一个难点，存在性证明一般可结合作图，并说明此图形就是所要求的．唯一性的证明除了利用公理或定理作正面论证外，还常常利用反证法，如公理3推论1的唯一性证明就是利用反证法证明的．

公理1是判定直线是否在平面内的依据，此外，还可用来检验平面．公理2表明平面是无限延伸的，是判定两个平面相交于一条直线及确定交线位置的依据．公理3及其推论给出了确定平面的条件，是确定平面位置及其判定两个平面重合的依据．

确定平面是将空间图形问题转化为平面图形问题来解决的重要条件，因为研究空间图形的时候，往往是将有关点、线归结到某个平面内，再利用平面图形的性质来解决的．

1.1.2 范例分析

例1 画四边形$ABCD$水平放置的直观图．

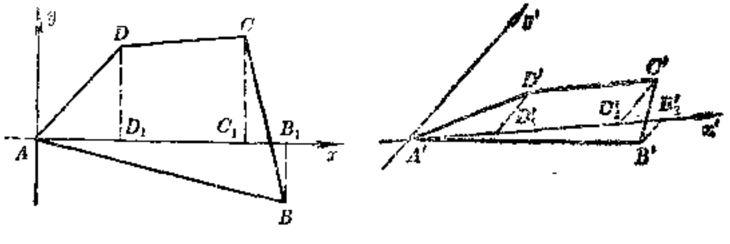


图1-2

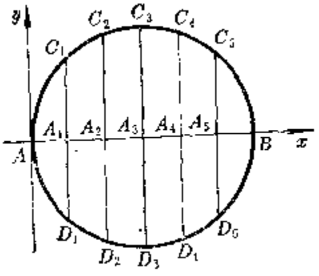
画法　(1) 如图1-2所示，取四边形 A 为原点，过A的任一直线为x轴. 分别过B, C, D点向 x 轴作垂线，分别交x轴于B_1, C_1, D_1.

(2) 画对应的x'轴、y'轴，使 $\angle x'A'y'=45°$.在x'轴上截取$A'B_1'=AB_1$, $A'C_1'=AC_1$, $A'D_1'=AD_1$，过B_1', C_1',D_1'分别作$B_1'B' \parallel A'y'$, $C_1'C' \parallel A'y'$,$D_1'D' \parallel A'y'$，并使$B_1'B'=\frac{1}{2}B_1B$,　$C_1'C'=\frac{1}{2}C_1C$,　$D_1'D'=\frac{1}{2}D_1D$.

(3) 连结$A'B'$, $B'C'$, $C'D'$, $D'A'$，所得的四边形$A'B'C'D'$就是四边形$ABCD$的水平放置直观图.

说明　画水平放置平面图的直观图是画空间图形直观图的关键，这里必须严格按斜二侧投影的画法进行. 画时，先在xOy坐标系中画平面图形. 然后按斜二侧画法的规定将xOy中平面图形的特征点对应地画到$x'O'y'$中来，再按平面图形的实际把这些特征点连接或光滑连接，即得水平放置平面图的直观图.

例 2　画半径为 2 cm的圆的水平放置直观图.



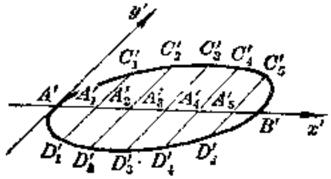


图 1-3

画法 如图1-3所示.

（1）在半径为2cm的已知圆中，取A为坐标系xAy的原点，直径AB所在的直线为x轴.六等分（越多越好）AB，其等分点分别为A_1，A_2，…，A_5，过这些等分点分别作平行Ay的弦C_1D_1，C_2D_2，…，C_5D_5.

（2）画对应的x'轴、y'轴，使$\angle x'A'y'=45°$.在x'轴上截取$A'A_1'=AA_1$，$A_2'A_3'=A_2A_3$，…，$A_5'B'=A_5B$，过A_1'，A_2'，…，A_5'分别作$A'y'$的平行线段，使得$A_1'C_1'=\frac{1}{2}A_1C_1$，$A_2'C_2'=\frac{1}{2}A_2C_2$…，$A_4'D_4'=\frac{1}{2}A_4D_4$，$A_5'D_5'=\frac{1}{2}A_5D_5$.

（3）光滑连接A'，C_1'，C_2'，…B'，…D_2'，D_1'.所得的图形就是所求圆的水平放置直观图.

例 3 求证：经过两条相交直线，有且只有1个平面.

已知：直线$a\cap$直线$b=A$.

求证：直线a，b确定1个平面.

分析 要判断这个命题正确，必须证明两点：这样的平面存在（存在性），而且这样的平面只有1个（唯一性）.在证明存在性时，往往采用公理3“过不共线的3点有1个平面”的原理；在证明唯一性时，可用公理3“过不共线的3点只有1个平面”的原理.另外也可以用反证法证明.

证明 如图1-4.

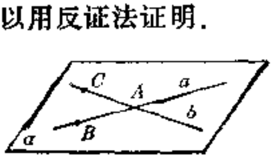


图 1-4

（1）存在性 在直线a，b上，除交点A外分别另取点B，C，则过A，B，C有1个平面，记为α（公理3）.

$\because$ $a\cap b=A$，且$B\in a$，$C\in b$，

$\therefore$ $a\subset\alpha$，$b\subset\alpha$（公理1），

$\therefore$ 过a，b有一个平面α。

（2）唯一性（用反证法证明）.

假设过a，b还有一个平面β，即$a\subset\beta$，$b\subset\beta$。

$\because$ $B\in a$，$C\in b$，$a\cap b=A$，

$\therefore$ $B\in\beta$，$C\in\beta$，$A\in\beta$，即不共线的3点A，B，C又在平面β内，这与公理3相矛盾.

$\therefore$ 过a，b只能有1个平面.

说明 证明唯一性的问题，经常采用"反证法"，这是根据命题与其逆否命题相等价的原理，提出与结论相反的假设，然后根据已知的条件、公理、定义、定理进行逻辑推理，得出矛盾的结论，从而断定提出的假说是错误的，而原来命题是正确的. 反证法是立体几何常用的证法之一，必须熟练地掌握它.

例 4 两两相交的3个平面有多少条交线？交线的位置关系怎样？

分析 先考虑两个平面相交，然后考虑第3个平面与前两个平面的相交关系，进而决定交线条数和交线的位置关系.

解

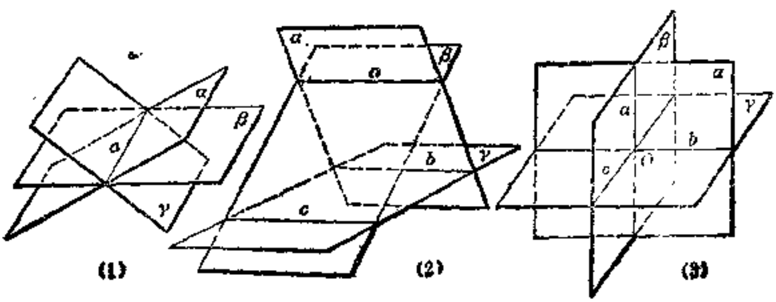


图 1-5

（1）$\alpha\cap\beta=a$，第三平面γ也通过 a．这种情况，3 平面两两相交，交线只有 1 条（图1-5(1)）．

（2）$\alpha\cap\beta=a$，第三平面γ平行于a 而与α，β分别相交于直线b，c，则得$a/\!/b/\!/c$．这种情况，3 个平面两两相交，交线是 3 条互相平行的直线（图1-5（2））．

（3）$\alpha\cap\beta=a$，第三平面 γ 与直线 a 相交（设交点为O），而与α，β分别交于直线b，c，则a，b，c都过O点．这种情况，3 个平面两两相交，交线有 3 条，这 3 条交线相交于同一点（图1-5（3））．

综上所述，3 个平面两两相交，交线可能有1条或3条．当交线有 3 条时，这 3 条交线或是“两两平行”或是“共点”．

说明　初学时，可通过具体的 3 块纸板来观察两两相交时的位置关系．从具体到抽象，培养空间想象能力，同时可训练如何画简单空间图形的直观图．

还可与平面图形中“3 条直线两两相交的情况”发生联想（图 1－6）．

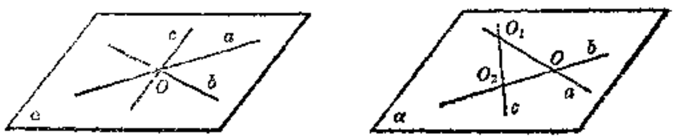


图 1-6

平面α 内的 3 条直线a，b，c 两两相交，其交点或 1 个或 3 个．利用平面图形性质帮助理解空间图形的性质，这是立体几何中很重要的思维方法．

例 5　3 个平面把空间分成多少部分?

分析 先考虑两个有各种位置的平面把空间分成多少部分，然后考虑再加第三个平面时，把已分的各部分又分成几部分，即得结果（图1-7（1）～（5））．

解 设平面α，β，γ，先考虑平面α，β的位置关系：或若α与β平行，或者$\alpha\cap\beta=a$。

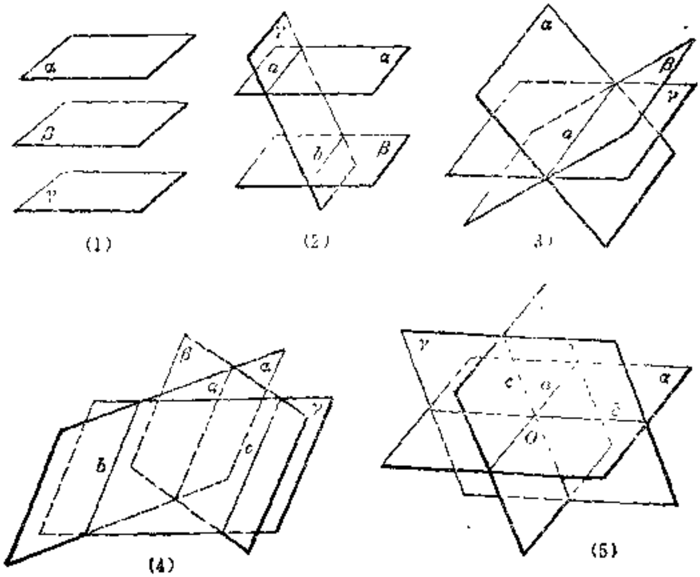


图 1-7

（1）当$\alpha /\!/ \beta$时：

① 若$\alpha /\!/ \beta /\!/ \gamma$，则3个平面把空间分成4部分（如图1-7（1））．

② 若$\gamma\cap\alpha=a$，$\gamma\cap\beta=b$，则3个平面把空间分成6部分（如图1-7（2））．

（2）当$\alpha\cap\beta=a$时：

① 若$\gamma\cap\alpha=a$，则3个平面把空间分成6部分（如

图1-7(3)).

② 若$\alpha\cap\gamma=b$，$\beta\cap\gamma=c$，且$b\parallel a$，$c\parallel a$，则3个平面把空间分成7部分（如图1-7(4)）.

③ 若$\alpha\cap\gamma=b$，$\beta\cap\gamma=c$，且a,b，c相交于点O，则3个平面把空间分成8部分（如图1-7(5)）.

综上所述，3个平面可把空间分成4，6，7，8部分.

说明 同上题一样，开始时，可通过具体的3块纸板来观察，还可与平面图形中的“3条直线可把平面分成多少部分”发生联想（图1-8）.

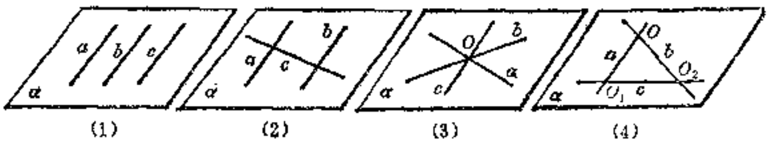


图 1-8

比较图1-7和图1-8可看出，前4种是相互对应的，而图1-7(5)把空间分成8部分的情况在平面图形中无法找到，而是空间图形所特有的. 这说明平面图形与空间图形既有共性，又有其个性. 一定要搞清其相同和差异的所在.

例 6 证明两两相交而不过同一点的4条直线必在同一平面内.

已知：直线a,b，c,d，$a\cap b=A$，$a\cap c=B$，$a\cap d=C$，$b\cap c=D$，$b\cap d=E$，$c\cap d=F$.

求证：直线a，b，c，d共面.

证明 如图1-9(1)，交点A,B,C,D,E，F都不重合.

$\because$ $a\cap b=A$ $\therefore$ 过a，b可确定一个平面，记为α.

$\because$ $a\cap c=B$，$b\cap c=D$，$\therefore$ $B\in a$，$D\in b$，而$a\subset\alpha$，$b\subset\alpha$，$\therefore$ $B\in\alpha$，$D\in\alpha$.

又 $B\in c$，$D\in c$，∴ 直线$c\subset\alpha$.

同理 $d\subset\alpha$.

∴ 直线a，b，c，d都在同一平面α内.

如图1-9(2)，交点A、B、D重合，同理可证得a，b，c，d共面.

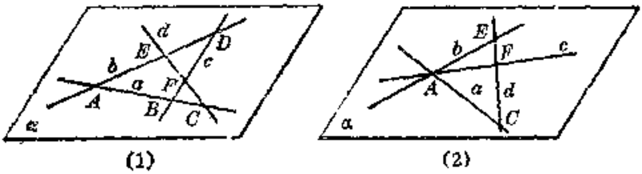


图 1-9

说明 本题是应用平面的基本性质证明直线共面问题. 其证明的一般方法是：先由公理 3 或其推论确定一个平面，然后证明其余的直线都在此平面内. 在判定其余的直线是否在这平面内时，可根据公理 1 判断这些直线是否分别有两个点在此平面内. 若只有一点在此平面内，可使用作辅助平面（即再做一个平面）的方法，通过证明这些平面重合，从而证明这些直线共面. 请看下面例子.

例 7 如图1-10，正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$中，画出截面A_1C_1D与截面B_1D_1C的交线.

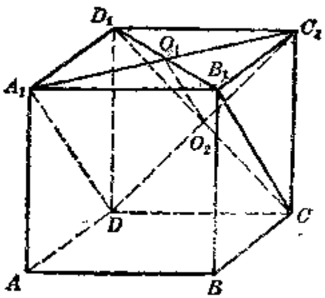


图 1-10

画法 在平面$A_1B_1C_1D_1$内，设$A_1C_1\cap B_1D_1=O_1$，在平面CC_1D_1D内，设$CD_1\cap C_1D=O_2$，连接O_1，O_2，则O_1O_2就是截面A_1C_1D

与截面B_1D_1C的交线.

∵ $O_1\in A_1C_1$. ∴ $O_1\in$截面A_1C_1D,

∵ $O_1\in B_1D_1$, ∴ $O_1\in$截面B_1D_1C,

由公理2，截面A_1C_1D与截面B_1D_1C必相交于过O_1点的直线段.

同理 $O_2\in$截面A_1C_1D，又$O_2\subset$截面B_1D_1C，于是截面A_1C_1D与截面B_1D_1C的交线必过O_2，由公理2知O_1O_2必是截面A_1C_1D和截面B_1D_1C的交线.

说明 一个平面截一个几何体（如正方体、长方体、圆柱等），各面上截得的线围成的平面封闭图形（包括图形内部分）称为这个几何体的截面.

例 8 长方体$ABCD$-$A_1B_1C_1D_1$中，画出对角线A_1C与过点C_1，B，D的平面的交点G.

画法 如图1-11，连接AC，与BD相交于O，

∵ $O\in BD$, $BD\subset$平面C_1BD, ∴ $O\in$平面C_1BD.

又$O\in AC$，$AC\subset$平面AA_1C_1C,

∴ $O\in$平面AA_1C_1C.

连接C_1O，则$C_1O\subset$平面C_1BD, $C_1O\subset$平面AA_1C_1C.

在平面AA_1C_1C内，直线C_1O与A_1C必相交，其交点即为G，显然G是A_1C与平面C_1BD的交点.

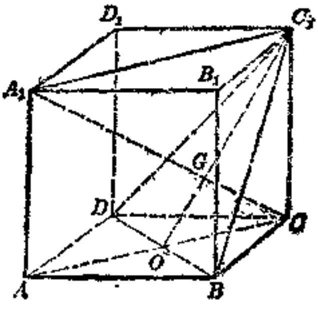


图 1-11

基础训练题一

1. 选择题：