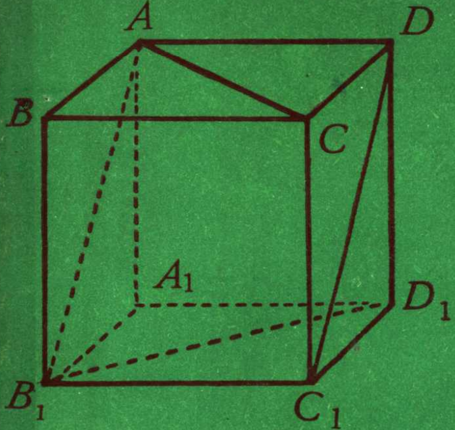

——立体几何

高中数学解难释疑

天津人民出版社

高中数学解难释疑
——立体几何

孙维纲　卢　伟　李兴中
薛川坪　罗怀祖　唐玉铎　编

天津人民出版社

高中数学解难释疑
——立体几何
孙维纲 卢 伟 李兴中 等
※
天津人民出版社 出版
（天津市赤峰道130号）
天津新华印刷一厂印刷 新华书店天津发行所发行
※
787×1092毫米 32开本 13.75印张 281千字
1991年4月第1版 1991年4月第1次印刷
印数：1－22,430
ISBN 7-201-00184-1/G·60
定 价：5.60元

序

这部丛书是根据《全日制中学数学教学大纲》按照《高中数学课本（甲种本）》的章节，给中学生编写的辅助读物，共分五册，与六册高中课本一一对应使用（代数课本第二、三册对该书代数第二册）；目的是使读者深入理解基本知识，加强基本技能，提高逻辑思维与空间想象能力和分析问题解决实际问题的能力，内容都按课本章次排列。每章的安排大致如下：

一、基本内容　这里将学生起码要掌握的东西，在不失内在联系的原则下，分类整理，既便于记忆，又重点突出，使读者对全章概况，一目了然。可以说这是重点复习，也是全章纲要。所谓数学难学，多半由于学习不得其法。学习方法中重要的一点是善于将知识系统化，抓住了系统，就会感到轻松。这部分内容对于不会自己整理系统的同学是很大的帮助。

这里还配备一些有代表性的例题，各用一两种方法按正确格式解答出来。题型比较齐备。学生易犯的错误，都从概念上或逻辑上加以解说，层次复杂的解法则先列举步骤。凡属关键所在，则事前分析或在解完后详细分辨，以期学生学到解题的基本技能，并附有一组习题，由读者揣摩练习。

二、解难释疑　掌握基本内容仅是一般要求，希望提高学生的知识水平，还需要将课本每章的重点与难点以及各部分的内在联系详细剖析。证题或解题还有许多不成文的规律，也要揭示给读者。本书对课本每章教材，选定若干题目撰成短文，每篇论述一两个问题。中间适当地插入一些范例，有时也将问题略加延拓。这些短文是本书的精华，是精心的辅导，不是泛泛的解说。

以上是我对于本书的观感。大家知道，辅助读物要发课本之所未发，要想学生之所未想，编写工作相当繁重。非有多年的教学实践，不能想得周到，现在这丛书有可能在各个方面给中学同学解难释疑，指出明路。我乐见青年将得到一本好的读物。

赵慈庚

一九八三、三、四、于北京师大数学系

目　　录

解难释疑

平面常用希腊字母α，β，γ等来表示，也可以用图形相对顶点的字母来表示，如图1-1-1.可以写为平面AC或平面BD.

（二）平面的基本性质

我们把人们在长期实践活动中总结出的有关平面的属性，归纳出如下的基本性质，作为今后进行推理的基础.由于这些结论都不加证明，我们称之为平面基本性质的三个公理.

公理 1　如果一条直线上的两点在一个平面内，那么这条直线上所有的点都在这个平面内.

我们常把直线上所有的点都在一个平面上说成直线在平面上或平面经过直线.

公理 2　如果两个平面有一个公共点，那么它们有且只有一条通过这点的公共直线.我们常把这条直线叫做这两个平面的交线.

如果平面α和β相交于直线a，常记为$\alpha\cap\beta=a$.

公理 3　经过不在一条直线上的三个点，有且只有一个平面.

经过A，B，C（这三点不共线）的平面常记为平面ABC.

根据公理 3，又可以推出以下三条推论：

推论 1　经过一条直线和这条直线外的一个点，有且只有一个平面.

推论 2　经过两条相交直线有且只有一个平面.

推论 3　经过两条平行直线，有且只有一个平面.

公理 3 和它的三个推论都是确定平面的条件.有且只有

平面常用希腊字母α，β，γ等来表示，也可以用图形相对顶点的字母来表示，如图1-1-1.可以写为平面AC或平面BD.

（二）平面的基本性质

我们把人们在长期实践活动中总结出的有关平面的属性，归纳出如下的基本性质，作为今后进行推理的基础.由于这些结论都不加证明，我们称之为平面基本性质的三个公理.

公理 1　如果一条直线上的两点在一个平面内，那么这条直线上所有的点都在这个平面内.

我们常把直线上所有的点都在一个平面上说成直线在平面上或平面经过直线.

公理 2　如果两个平面有一个公共点，那么它们有且只有一条通过这点的公共直线.我们常把这条直线叫做这两个平面的交线.

如果平面α和β相交于直线a，常记为$\alpha\cap\beta=a$.

公理 3　经过不在一条直线上的三个点，有且只有一个平面.

经过A，B，C（这三点不共线）的平面常记为平面ABC.

根据公理 3，又可以推出以下三条推论：

推论 1　经过一条直线和这条直线外的一个点，有且只有一个平面.

推论 2　经过两条相交直线有且只有一个平面.

推论 3　经过两条平行直线，有且只有一个平面.

公理 3 和它的三个推论都是确定平面的条件. 有且只有

一个平面就是确定平面的意思，关于怎样认识有且只有一个的含义，请读者参阅《怎样理解有且只有一个》

【例1】从空间一点出发的n条射线，最多可以确定几个平面，最少可以确定几个平面？说明道理。

解 由于每经过两条相交直线，有且只有一个平面，所以若要确定平面的个数最多，必须且只需设有任何三条射线共面，这个任何一个射线都可以和其余$n-1$条射线确定$n-1$个平面，如此计算，n条射线应决定$n(n-1)$个平面，但是，这样每个平面都计算了2次，所以实际上确定平面最多时，应是$\frac{1}{2}n(n-1)$个。

当这n条射线共面时，确定平面的个数最少，最少时是确定一个平面。

【例2】已知$\triangle ABC$的三个顶点都不在平面α上，它的三边AB，BC，AC延长后与α相交于P，Q，R三点，求证P，Q，R三点共线。图1-1-4

分析　若证三点共线，可以证明第三点在经过前两点的直线上。

证：由于AP和AR是相交直线，所以AP和AR确定一个平面APR；由于R，P在平面α上，所以平面α与平面APR相交于直线PR。

又，由于B，C二点都在平面APR上，所以直线BC在平面APR上，则点Q也在平面PQR上。

于是Q点既在平面α上，也在平面PQR上，则点Q必在交线PR上，即P，Q，R共线。

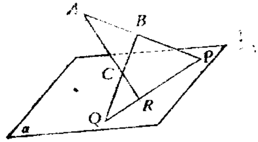

图 1-1-4

二、空间两条直线

（一）两条直线的位置关系*

在同一平面内，两条直线或者相交，或者平行，没有其它的位置关系。

在空间，两条直线的位置关系则不仅有相交和平行，而且还有第三种：异面直线。

我们把不在同一平面内的两条直线叫异面直线。

于是，空间两条直线的位置关系是：

1　平行直线——在同一平面内，没有公共点；

2　相交直线——在同一平面内，有且只有一个公共点；

3　异面直线——不在同一平面内，没有公共点。

显然，两条异面直线既不平行，也不相交。

（二）平行直线

在平面几何中，曾证明过有关平行直线的两个定理：

---

* 此后，我们提到的"两条直线"，都是指不重合的两条直线，"两个平面"的提法也如此。

1.在同一平面内，如果两条直线都和第三条直线平行，那么这两条直线也互相平行；

2.在同一个平面内，如果一个角的两条边和另一个角的两条边分别平行并且方向相同，那么这两个角相等。

它们都可以推广到空间而得到：

公理 4 （在空间中）平行于同一条直线的两条直线互相平行。

定理（在空间中）如果一个角的两边和另一个角的两边分别平行并且方向相同，那么这两个角相等。

（三）两条异面直线所成的角

1.两条异面直线所成的角。

虽然异面直线既不平行也不相交，但仍可以定义异面直线所成的角，这个定义是：

经过空间任意一点，分别引两条异面直线的平行线，这两条相交直线所成的锐角（或直角）叫这两异面直线所成的角。

应注意的是：由于前节定理保证，这里，角的大小与选点的位置无关。并且为了方便，常把这点选在异面直线中的一条上，从而只作一条平行线，就可以得到异面直线所成的角。

2.异面直线互相垂直。

如果异面直线所成的角是直角，我们就说这两条异面直线互相垂直。

3.两条异面直线的公垂线

和两条异面直线都垂直相交的直线叫做异面直线的公垂

线.

4.两条异面直线的距离

两条异面直线的公垂线在这两条异面直线间的线段的长度，叫做这两条异面直线的距离.

【例1】已知直线 a，b 是异面直线，直线 c，d 分别和 a，b 都相交，试判断直线 c，d 的位置关系，并加以证明.

分析　由于直线 c，d 分别和 a，b 都相交，应就交点的位置加以讨论.

解　若直线c，d和a，b的交点分别重合，由于过两个点有且只有一条直线，所以c和d重合.图1-1-5(1)

若直线c，d和a，b的交点只有一个重合，这时，c和d是相交直线图. 1-1-5(2).

若直线c，d和a，b的交点都不重合，c和d成异面直线，如图1-1-5(3).证明如下：

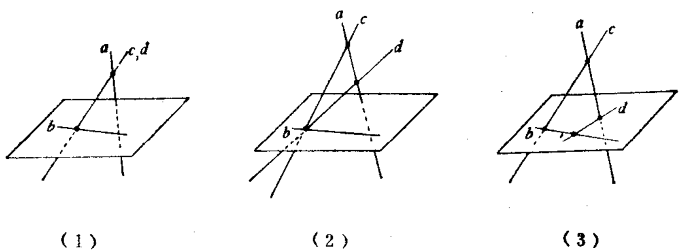

图 1-1-5

用反证法：

设直线c，d共面，则c和d确定一平面α，则a，b与c，d的交点都在α上，于是由于a，b分别有两个点在α上，可知

a，b都在α上，即a与b共面。

此结论与已知不合，所以假设c，d共面不成立，所以直线c和d是异面直线。

说明　证明两条直线是异面直线常用反证法，即证明这两条直线不可能共面。

【例2】已知长方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$的棱$AA_1=1$，$AB=2$，$AD=3$，求异面直线AC与A_1B所成的角的正切值。图1-1-6。

解　连结D_1C，AD_1，由于$BC \mathrel{\underline{\parallel}} AD \mathrel{\underline{\parallel}} A_1D_1$，所以四边形$A_1D_1CB$是平行四边形。则有$D_1C \parallel A_1B$。于是，异面直线$A_1B$与$AC$所成角为$\angle ACD_1$。

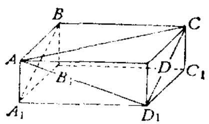

图 1-1-6

在$\triangle ACD_1$中，$AC=\sqrt{3^2+2^2}=\sqrt{13}$，$D_1C=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$，$AD_1=\sqrt{1^2+3^2}=\sqrt{10}$。据余弦定理，有

$$\cos\angle ACD_1=\frac{CD_1^2+CA^2-AD_1^2}{2\times CD_1\times CA}$$

$$=\frac{(\sqrt{5})^2+(\sqrt{13})^2-(\sqrt{10})^2}{2\times\sqrt{5}\times\sqrt{13}}$$

$$=\frac{4}{\sqrt{65}}.$$

由于$\angle ACD_1$是锐角，所以有

$$\sin\angle ACD_1=\sqrt{1-\left(\frac{4}{\sqrt{65}}\right)^2}=\frac{7}{\sqrt{65}},$$

可得$\operatorname{tg}\angle ACD_1=\frac{7}{\sqrt{65}}\cdot\frac{\sqrt{65}}{4}=\frac{7}{4}$,

于是，异面直线AC与A_1B所成角的正切值为$\frac{7}{4}$.

三、空间的直线与平面

(一)空间的直线与平面的三种位置关系

1.直线在平面内——有无数个公共点;

2.直线和平面相交——有且只有一个公共点;

3.直线和平面平行—没有公共点.

(二)直线与平面垂直或平行

1.直线与平面平行的定义：如果一条直线与一个平面没有公共点，我们就说这条直线和这个平面平行;

2.直线与平面垂直的定义：如果一条直线与一个平面内的任何一条直线都垂直，我们就说直线与平面互相垂直，这条直线也叫平面的垂线;

3.直线与平面平行的性质：如果一条直线和一个平面平行，经过这条直线的平面与这个平面相交，那么这条直线就和交线平行;

4.直线与平面垂直的性质

(1)如果两条平行线中的一条垂直于一个平面，那么另一条也垂直于这个平面;

（2）如果两条直线同垂直于一个平面，那么这两条直线平行。

5.直线与平面平行的判定：如果不在平面内的一条直线和平面内的一条直线平行，那么这条直线就和这个平面互相平行；

6.直线与平面垂直的判定：如果一条直线和平面上两条相交直线都垂直，那么这条直线垂直于这个平面。

（三）直线和平面所成的角

1.点在平面上的射影：自一点向平面引垂线，垂足叫这点在平面上的射影；

2.斜线：一条直线与平面相交，但不与这个平面垂直，这条直线叫平面的斜线；斜线上一点到斜足（即斜线与平面的交点）间的线段叫做这点到这个平面的斜线段。

3.斜线在平面上的射影：

过斜线上一点向平面引垂线，过垂足和斜足的直线叫做斜线在这个平面上的射影，垂足和斜足间的线段叫做这点到平面的斜线段在这个平面上的射影。

4.直线和平面所成的角：平面的一条斜线和它在平面上的射影所成的锐角，叫做这条直线和这个平面所成的角。

特殊地，一条直线垂直于平面，我们说它们所成的角是直角；一条直线和平面平行，或一条直线在平面内，我们说它们所成的角是0°的角。

斜线和平面所成的角，是这条斜线与这平面内过斜足的所有直线所成的角中最小的角（请看例4）。

5.平面的垂线和斜线的性质