

■ 高等学校教材

# 常微分方程

■ 张伟年 杜正东 徐冰



高等教育出版社  
HIGHER EDUCATION PRESS

高等学校教材

# 常微分方程

张伟年 杜正东 徐冰

高等教育出版社

## 内容提要

本书介绍常微分方程的基础知识,包括基本理论、方法和在工程实际的若干应用。全书共分六章 28 节,包括绪论、初等积分法、线性方程、常系数线性方程、一般理论和定性理论初步等内容,涉及常微分方程模型、矩阵指数函数方法、微分不等式与比较定理、微分方程数值解、动力系统概念、周期轨道与 Poincaré 映射、平面 Hamilton 系统等方面知识。本书力求贴近工程实际,贴近现代微分方程的发展主流,贴近新时代读者的阅读习惯,为读者以后深入学习、研究和应用微分方程提供一个方便的台阶。

本书可以作为高等学校数学专业常微分方程课程的教材,也可供其他希望了解常微分方程理论的相关专业人员参考。

## 图书在版编目(CIP)数据

常微分方程/张伟年,杜正东,徐冰. —北京:高等教育出版社,2006.4

ISBN 7-04-019280-2

I 常... II. ①张... ②杜... ③徐... III. 常微分方程-高等学校-教材 IV. O175.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 021833 号

---

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-58581118
社 址	北京市西城区德外大街 4 号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100011	网 址	<a href="http://www.hep.edu.cn">http://www.hep.edu.cn</a>
总 机	010-58581000		<a href="http://www.hep.com.cn">http://www.hep.com.cn</a>
经 销	蓝色畅想图书发行有限公司	网上订购	<a href="http://www.landracom.com">http://www.landracom.com</a>
印 刷	北京宏伟双华印刷有限公司		<a href="http://www.landrace.com.cn">http://www.landrace.com.cn</a>
		畅想教育	<a href="http://www.widedu.com">http://www.widedu.com</a>
开 本	787×960 1/16	版 次	2006 年 4 月第 1 版
印 张	15	印 次	2006 年 4 月第 1 次印刷
字 数	270 000	定 价	19.10 元

---

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换。

版权所有 侵权必究

物料号 19280-00

## 序 言

近几十年来随着非线性科学的迅猛发展,微分方程在力学技术、电子技术、生物技术等诸多领域中愈加呈现其重要性。同时,在这些高新科学技术的推动下,微分方程理论也得到飞速的发展。从过去对平衡点、周期轨道等的定性研究到今天对非局部分岔、高余维分岔的分析判定,微分方程在理论和方法上正经历着一个新的跨越。常微分方程是大学阶段的基础课程之一,面对新的挑战,其教学内容既要保证基础训练,也要力争反映时代要求,引导学生走近学科前沿,让年轻的一代尽快跟上学科发展的主流。

这本《常微分方程》正是在这样的背景下写成的,它出自几位年轻学者的手,他们正活跃在微分方程和动力系统的科研和教学的第一线。他们不仅在多年的教学实践中积累了一定的经验,而且在艰苦的科研工作中获得许多新知。他们力求教材能贴近工程实际,贴近现代微分方程的发展主流,为读者今后的学习和工作提供一个好的平台。正如作者在前言中提到的四个线索,它们正是这本书的鲜明特点。

应该看到,近十多年来在我国已经和正在成长着一批踏实、勤奋的年轻人,他们正带领着自己年轻的队伍工作在微分方程领域的前沿,为我国的科学和教育事业拼搏着,这是令人欣慰的。他们必将会在未来的微分方程教学、科研和应用中超越他们的前辈,取得更大的成绩。

张芷芬

2004年11月12日于北京大学

## 前 言

用微商来描述事物变化的趋势,用物质不灭、能量守恒以及其他物质运动基本规律来建立已知量和未知量之间的关系,这样可以将来自物理、化学、生物、工程和经济等领域的一些实际问题表述为精确的等式形式。这种包含未知函数及其微商的等式就是我们将要学习的微分方程。

自 Newton(1642—1727), Leibniz(1646—1716) 创立微积分以来,人们就开始研究微分方程。从最初的初等求解技巧到今天日益发达的数值模拟技术,从早期对方向场的理解到今天关于微分方程定性理论、分岔理论的成熟知识体系,三百多年的历史使这门数学分支不仅成为了数学学科中队伍最大、综合性最强的领域之一,而且成为数学以外学科最为关注的领域之一。它的发展极大地推动了自然科学、工程技术乃至社会科学的发展。尤其是地球椭圆轨道的计算、海王星的发现、弹道轨道的定位、大型机械振动的分析、自动控制的设计、气象数值预报、按龄人口增长宏观预测等等,微分方程为之提供了关键技术支撑。反过来这些实际问题也推动了微分方程领域走向纵深,使之成为当今经济发展、社会进步所不可缺少的一门高技术。

微分方程是研究自然科学,工程技术及社会生活中一些确定性现象的重要工具。通过研究微分方程的解的各种属性,我们就能解释一些现象、对未来的发展趋势作出预测、或者为我们设计新的装置提供参考。

我们将在前面四章介绍一些特殊形式的方程的精确求解方法。在第二章我们学习用初等积分法求解一些微分方程的技巧。在第三章和第四章我们用两章的篇幅详细介绍线性微分方程理论和求解方法,了解线性微分方程解的代数结构,为下一步深入学习非线性微分方程理论打下基础。

对非线性微分方程来说,除了极少数形式以外,绝大多数形式的方程(甚至是第二章提到的形式非常简单的 Riccati 方程)都没有初等解法。因此对这一类方程,我们首先在建立微分方程理论的基石,即解的存在性和唯一性的基础上学习解的近似计算方法。这将是本书第五章的内容。

近似计算只是研究微分方程的一种方法。它并不能解决一切问题,尤其是在系统对初始数据十分敏感的情况下。非线性微分方程的研究仍然是十分困难的。19 世纪末法国数学家 H. Poincaré 和俄国数学家 A. M. Liapunov 开创了微分方程定性理论和稳定性理论。20 世纪初美国数学家 G. D. Birkhoff 继承和发展了 H. Poincaré 的思想并提出了“动力系统”的理论。他们把微分方程研究推

向了一个新的发展阶段。在第六章我们将介绍这方面的基本知识,学习根据方程本身特点来分析它们所描述的现象,引导读者对非线性问题的研究兴趣。对非线性问题的研究是自然科学和工程技术中十分重要的课题。大多数在实际应用中遇到的问题都是非线性的,而且即使是一些表面形式非常简单的非线性微分方程(如周期激励下的单摆方程)都蕴含着极为复杂的动力学性质。由于其复杂性和困难性,它又对现有的科学和技术水平提出了巨大挑战。

微分方程理论是一门综合性很强的知识体系。它的发展从来就离不开数学其他分支的发展。要研究好微分方程就需要泛函分析、微分几何、代数和拓扑等方面的新成果新方法支持。本书适宜于大学二年级开设。要学好微分方程理论,首先要具备微积分和线性代数的基础。

本书是为了适应新世纪课程改革的需要,参照我们的常微分方程课程教学实践和微分方程与动力系统科研需求,参考国内外多本经典教材来编写的。我们力图通过教材来形成我们的教学特色。我们加强构造积分因子技巧的训练并将计算首次积分同计算 Hamilton 能量函数以及构造 Liapunov 函数的需要联系在一起;加强常数变易法和微分不等式的内容并与进一步学习非线性微分方程的渐近性态联系在一起;加强 Euler 指数函数法和特征理论并与微分方程平衡点分类联系在一起;加强 Picard 逼近的思想并与微分方程数值解法以及动力系统迭代行为联系在一起。我们用这四条主线将整个体系前后串在一起。我们注意减轻习题的计算量而着重突出思想与结构,并适当增加开放式思考和设计解决方案、编写计算程序的“动手环节”。在书中我们利用一些知识点,例如解空间与通常见到的欧氏空间的区别、特征根对复系统的要求、算子解法的算子的描述等等,引发读者对数学高年级课程的兴趣,促使读者将微分方程同数学的整个知识体系联系起来学习。

本书的写作得到了国家理科基地名牌课程建设项目的支持和四川大学教务处及数学学院领导的鼓励和帮助,在此我们深表谢意。作为我们教学实践和改革的一个阶段性总结,这本书一定还有许多需要完善的地方,因此我们真诚希望得到同行的批评指正,以便共同把微分方程的基础教学工作做好。

张伟年

2004年10月于四川大学

# 目 录

第一章	绪论	1
§ 1.1	常微分方程模型	2
§ 1.2	微分方程求解思想	6
§ 1.3	基本问题	12
第二章	初等积分法	15
§ 2.1	变量分离形式	16
§ 2.2	恰当方程形式	27
§ 2.3	隐式方程	37
§ 2.4	初等积分法的一些应用	44
第三章	线性方程	60
§ 3.1	存在性与唯一性	60
§ 3.2	齐次线性方程组的通解结构	65
§ 3.3	非齐次线性方程组的通解	71
§ 3.4	高阶线性方程	74
§ 3.5	复值解和级数解法	80
第四章	常系数线性方程	89
§ 4.1	齐次问题	90
§ 4.2	非齐次问题	94
§ 4.3	常系数线性方程组	99
§ 4.4	应用:机械振动	108
第五章	一般理论	114
§ 5.1	Picard 存在唯一性定理	115
§ 5.2	Peano 存在性定理	122
§ 5.3	解的延拓	129
§ 5.4	微分不等式与比较定理	136
§ 5.5	解对初值和参数的依赖性	144
§ 5.6	微分方程数值解	153
第六章	定性理论初步	160
§ 6.1	动力系统概念	161
§ 6.2	Liapunov 稳定性	164

---

§ 6.3 Liapunov 直接法 .....	172
§ 6.4 平面平衡点分析 .....	179
§ 6.5 周期轨道与 Poincaré 映射 .....	190
§ 6.6 平面 Hamilton 系统 .....	200
外国数学家译名对照表 .....	206
关键词索引 .....	207
参考文献 .....	211
部分习题答案和提示 .....	213



# 第一章 绪 论

去粗取精,去伪存真,由此及彼,由表及里.

方程就是包含未知量的等式,求解方程就是要透过表象去探索内在的奥秘.读者已经熟悉的方程包括一般的代数方程及三角函数方程等,如  $x^2 + 5x - 6 = 0$ , 这些方程的未知量是一个量的某几个特定的值.但在科学技术和实际应用中还会碰到大量的方程,其未知量是一个函数,例如  $F(x, \phi(x)) = 0$ ,  $\phi(x^2 + 1) = 2\phi(x)$  和  $\phi(\phi(x)) = x$ , 其中  $\phi$  是未知函数.这些方程称为函数方程或泛函方程.其中,那些联系着自变量、未知函数以及未知函数的导数的函数方程称为微分方程,例如

$$\frac{d^2\phi}{dt^2} + k^2\phi + \gamma\phi^3 = A\cos \omega t, \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}. \quad (1.2)$$

上述第一个方程为常微分方程(ordinary differential equation),其未知函数  $\phi(t)$  是关于自变量  $t$  的一元函数;第二个方程为偏微分方程(partial differential equation),其未知函数  $\phi(t, x)$  为关于自变量  $t, x$  的多元函数.严格地说,常微分方程的一般形式是

$$F(t, \phi, \phi', \dots, \phi^{(n)}) = 0, \quad (1.3)$$

其中  $F$  是一个  $n+2$  元的已知函数,而  $\phi', \dots, \phi^{(n)}$  是未知函数  $\phi(t)$  的一阶直至  $n$  阶导数.我们称  $n$  为方程(1.3)的阶,称方程(1.3)为  $n$  阶常微分方程.本书主要介绍常微分方程的理论、方法和应用.因此当不会引起混淆时,又常简称(1.3)为  $n$  阶微分方程或  $n$  阶方程.

自 Newton(1642—1727), Leibniz(1646—1716) 创立微积分以来,人们就开始研究微分方程.三百多年来,微分方程的发展极大地推动了自然科学、技术科学和社会科学的发展.到今天它已广泛地渗透到了物理学、化学、生物学、工程技术乃至社会科学等各个领域,反过来这些领域中提出的实际问题也推动了微分方程领域走向纵深,使之成为当今经济发展和社会进步所不可缺少的一门高技术.



图 1.1 I. Newton(1642—1727)



图 1.2 G. W. Leibniz(1646—1716)

## § 1.1 常微分方程模型

设有一个质量为  $m$  的物体在  $x$  轴上作直线运动,由著名的 Newton 第二运动定律,其位移  $x$  作为时间  $t$  的函数满足等式

$$m\ddot{x} = F(t, x, \dot{x}),$$

其中  $x$  的一阶导数  $\dot{x}$  为物体的运动速度,二阶导数  $\ddot{x}$  为物体的加速度,  $F$  是与时间  $t$ 、位移  $x$  及速度  $\dot{x}$  有关的外力的总和. 这就是在实际问题中最常见的微分方程的例子. 在几何学中的无穷小分析和曲面、曲线方程的描述中我们也会见到许多微分方程. 在物理学、化学、生物学、经济学中的许多基本规律和在电子工程、机械工程、控制技术、航天技术中的许多基本原理都可以表述为微分方程这样的数学形式. 从分析实际问题到提出这样的数学形式的过程叫做数学建模. 通过建立微分方程模型可以把一个实际问题转换成求解微分方程.

下面我们再通过一些具体例子来说明如何对一个实际问题建立常微分方程模型.

**例 1.1** 设质点  $B$  作自由落体运动,即只考虑重力对落体的作用而忽略空气阻力等其他外力的影响. 设落体  $B$  作垂直于地面的运动,取坐标轴  $y$  从地面垂直向上,见图 1.3. 因为  $y = y(t)$  表示  $B$  在时刻  $t$  的位置坐标,所以它对  $t$  的一阶导数  $\dot{y} = \dot{y}(t)$  表示  $B$  在时刻  $t$  的瞬时速度,其二阶导数  $\ddot{y} = \ddot{y}(t)$  表示  $B$  在时刻  $t$  的瞬时加速度. 假设  $B$  的质量为  $m$ ,重力加速度为  $g$  (一般取为常数  $9.80 \text{ m/s}^2$ ). 由 Newton 第二定律得出  $m\ddot{y} = -mg$ ,从而得到一个二阶微分方程

$$\ddot{y} = -g. \quad (1.4)$$

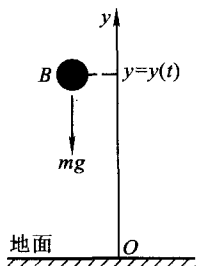


图 1.3 自由落体

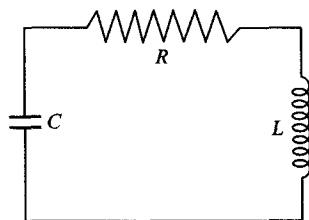


图 1.4 RLC 回路

**例 1.2** 考虑一个由电阻  $R$ 、电感  $L$ 、电容  $C$  串联组成的简单闭合电路, 参看图 1.4. 如果在某一时刻将电容器充电使它得到一个电位差, 然后断开电源. 在电感的作用下这个闭合电路中开始了电流振荡. 我们用  $v(t)$  表示在时刻  $t$  电容器两极间的电位差, 并用  $v(t)$  的函数规律来刻画该电路振荡的规律. 令  $i(t)$  表示电流强度. 按照总电动势  $i(t)R$  等于电容器的电位差  $-v(t)$  和电感电动势  $-L \frac{di(t)}{dt}$  的总和, 我们得到

$$i(t)R = -v(t) - L \frac{di(t)}{dt}. \quad (1.5)$$

由于  $v(t) = \frac{Q(t)}{C}$ , 其中  $Q(t)$  是在时刻  $t$  电容器上的电量, 而  $i(t) = \frac{dQ(t)}{dt}$ , 因此

$$i(t) = C \frac{dv(t)}{dt}, \quad \frac{di(t)}{dt} = C \frac{d^2v(t)}{dt^2}. \quad (1.6)$$

这样, 由 (1.5) 和 (1.6) 式可以得到微分方程

$$L \frac{d^2v}{dt^2} + R \frac{dv}{dt} + \frac{1}{C}v = 0. \quad (1.7)$$

**例 1.3** 弹簧振子: 设质量为  $m$  的弹簧振子作水平自由振动, 见图 1.5. 假设弹簧的弹性系数为  $k$ , 阻力与速度成正比, 阻尼系数为  $\mu$ . 用  $x(t)$  表示振子当前所处的位置, 并假设弹簧松弛时振子所处的位置为  $x=0$ . 那么振子在时刻  $t$  受到的弹性力为  $-kx(t)$ , 阻力等于  $-\mu \frac{dx}{dt}$ . 由 Newton 第二定律得

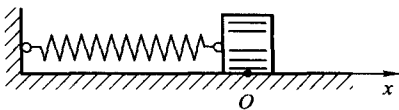


图 1.5 弹簧振子

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx - \mu \frac{dx}{dt},$$

从而得到一个二阶微分方程

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + \mu \frac{dx}{dt} + kx = 0. \quad (1.8)$$

**例 1.4** 考虑一个铅直平面上的单摆在无阻力情况下的自由摆动, 摆锤质量为  $m$ , 摆臂质量相对太小而忽略不计, 摆臂长度为  $l$ . 记重力加速度为  $g$ . 设在某个时刻  $t$  摆臂与铅直线的夹角为  $\theta(t)$ . 这个夹角的变化给出了单摆运动的规律. 由图 1.6 所示的受力分析表明, 摆锤所受的外力 (包括重力和摆臂的牵引力) 的总和成为一个相切于圆周形式的摆轨道上的力  $F = -mg \sin \theta$ . 摆锤从铅直状态到当前状态的位移  $x(t)$  按弧长计算应该等于  $l\theta(t)$ . 由 Newton 第二定律,  $m\ddot{x} = -mg \sin \theta$ . 因而得到  $\theta(t)$  满足的微分方程

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l} \sin \theta. \quad (1.9)$$

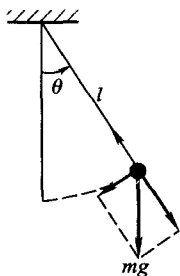


图 1.6 无阻力单摆

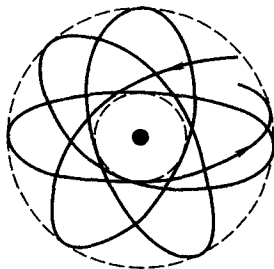


图 1.7 行星的实际运行轨道

**例 1.5** 经典天体力学中的 Kepler 第一定律指出, 行星以椭圆轨道围绕太阳运转. 但对水星和金星的观测表明实际上这只是一种粗糙的描述, 由于各个天体在万有引力作用下互相影响, 行星的实际运行轨道为缓慢进动的椭圆: 其轨道的形状在运行一周后与椭圆几乎没有偏差, 但是轨道的性态随时间而逐渐发生变化, 在图 1.7 中我们画出了某行星围绕太阳运转的实际运行轨道的示意图, 其中我们以夸张的形式描绘了其进动的椭圆轨道.

研究多个天体在万有引力作用下的运动规律是现代天体力学和数学中的重要课题, 称为多体问题. 其中最简单的是如下的二体问题: 考虑两个物体在万有引力作用下运动. 设两个物体质量分别是  $M$  和  $m$ , 在  $\mathbb{R}^3$  中关于坐标原点的向径分别为  $r_s$  和  $r_p$ . 用  $r = r_p - r_s$  表示质量为  $m$  的物体相对于质量为  $M$  的物体的位置. 根据万有引力定律,

$$M\ddot{\mathbf{r}}_s = \frac{\mu M m}{r^2} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r}, \quad (1.10)$$

$$m\ddot{\mathbf{r}}_p = -\frac{\mu M m}{r^2} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r}, \quad (1.11)$$

其中  $r = |\mathbf{r}|$ , 将方程(1.10)乘以  $m$  并将方程(1.11)乘以  $M$ , 将两个乘积相减得到

$$mM(\ddot{\mathbf{r}}_s - \ddot{\mathbf{r}}_p) = \mu(m + M) \frac{Mm}{r^2} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r}.$$

显然,  $\ddot{\mathbf{r}}_s - \ddot{\mathbf{r}}_p = -\ddot{\mathbf{r}}$ . 因此我们得到  $\mathbf{r}$  满足的微分方程

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{\lambda}{r^2} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r}, \quad (1.12)$$

其中  $\lambda = \mu(M + m)$ .

**例 1.6** 在研究一个仅由一种捕食者和一种被捕食者(即食饵)构成的简单生态系统(见图 1.8)时, 我们常要研究捕食者数量  $x(t)$  和食饵数量  $y(t)$  之间的关系. 设  $x(t) > 0, y(t) > 0$ . 一个简单的情形是:

(i) 当不考虑捕食者时食饵自身有充足食物和空间而自由地以增长率  $\beta$  成长, 亦即  $\dot{y} = \beta y$ ; 当捕食者存在时食饵的增长率与捕食者数量  $x(t)$  成正比地下降, 即  $\dot{y} = (\beta - sx)y$ , 其中  $\beta, s$  是正的常数;

(ii) 当没有食饵时捕食者按固定比率  $\alpha$  死亡, 即  $\dot{x} = -\alpha x$ ; 当有食饵时捕食者数量增长率与食饵数量  $y(t)$  成正比地增长, 即  $\dot{x} = (-\alpha + ry)x$ , 其中  $\alpha, r$  是正的常数.

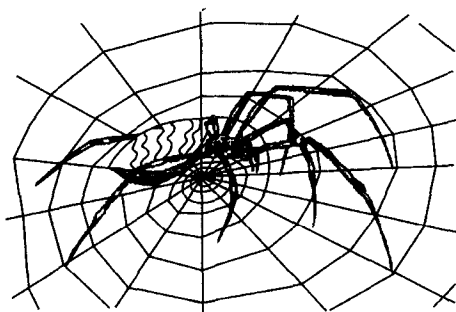


图 1.8 捕食者模型:正在等待猎物的蜘蛛

因而, 我们得到了  $x(t)$  和  $y(t)$  满足的微分方程组

$$\begin{cases} \dot{x} = x(-\alpha + ry), \\ \dot{y} = y(\beta - sx). \end{cases} \quad (1.13)$$

**例 1.7** 如果一平面曲线  $\gamma$  过定点  $M_0$ , 且  $\gamma$  上任意一点  $M$  ( $M_0$  除外) 的切线与直线  $M_0M$  的夹角恒等于常数  $\alpha_0$ , 求这条曲线所满足的微分方程.

**解** 设坐标原点为  $M_0$ . 我们在  $xy$  平面坐标系下考虑. 设曲线  $\gamma$  的方程为  $y = y(x)$ . 过点  $M(x, y)$  的切线与  $x$  轴的夹角  $\theta$  满足  $\tan \theta = \frac{dy}{dx}$ . 直线  $M_0M$  与  $x$  轴的夹角  $\beta$  满足  $\tan \beta = \frac{y}{x}$ . 按照夹角关系, 我们知道  $\alpha_0 = \theta - \beta$ , 参看图 1.9. 因此,

$$\begin{aligned} \tan \alpha_0 &= \tan(\theta - \beta) = \frac{\tan \theta - \tan \beta}{1 + \tan \theta \tan \beta} \\ &= \frac{x \dot{y}(x) - y(x)}{x + \dot{y}(x)y(x)}. \end{aligned}$$

因而得到  $y(x)$  满足的微分方程

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(\tan \alpha_0)x + y}{x - (\tan \alpha_0)y}. \quad (1.14)$$

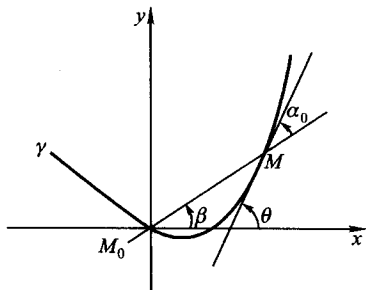


图 1.9 例 1.7

### 习题 1.1

1. 一船以恒定的速度  $v_0$  垂直向河对岸驶去, 设水流沿  $x$  轴方向并且其速度与船离两岸的距离乘积成正比, 比例系数为  $k$ , 河宽为  $a$ . 求该船的运动轨迹满足的微分方程.
2. 求  $tx$  平面上—曲线所满足的微分方程, 使其上每点处的切线与该点的向径和  $Ox$  轴构成一个等腰三角形.

## § 1.2 微分方程求解思想

对于一般形式的微分方程(1.3)来说, 如果函数  $\phi(t)$  在区间  $J$  上连续, 有直到  $n$  阶的导数, 而且对所有的  $t \in J$ , (1.3) 恒成立, 则称  $\phi(t)$  为方程(1.3) 在区间  $J$  上的一个解.

## 一、计算与近似计算

在例 1.1 中我们建立了自由落体的微分方程模型. 为了得出落体的运动规律, 需要求解这个二阶微分方程. 在(1.4)两侧对  $t$  积分一次, 得到

$$\dot{y} = -gt + C_1, \quad (1.15)$$

其中  $C_1$  是一个任意常数. 再把(1.15)两边对  $t$  积分一次得到

$$y = -\frac{1}{2}gt^2 + C_1t + C_2, \quad (1.16)$$

其中  $C_2$  是另一个任意常数. 易知(1.16)是微分方程(1.4)包含两个独立的任意常数的解. 这样形式的解称为方程(1.4)的**通解**. 这里“独立”是指这个通解  $y(t, C_1, C_2)$  及其关于  $t$  的导数  $\dot{y}(t, C_1, C_2)$  满足

$$\det \frac{\partial(y, \dot{y})}{\partial(C_1, C_2)} \neq 0.$$

准确地说, 通解(1.16)是一族解. 当任意常数被完全确定时我们也相应获得一个特定的解, 称为**特解**.

通解(1.16)给出了自由落体的运动规律, 它显然包含微分方程(1.4)的无穷多个特解. 这同其他形式的函数方程一样具有多解性. 为了解决这种求解结果的不确定性问题, 我们需要对方程(1.4)附加定解条件. 如果我们指明落体运动的初始状态, 包括在初始时刻( $t=0$ )的位置(高度) $y_0$ 和初速度 $v_0$ , 即

$$y(0) = y_0, \quad \dot{y}(0) = v_0, \quad (1.17)$$

我们就能从通解(1.16)中确定  $C_2 = y_0, C_1 = v_0$ , 从而得到一个唯一的适合条件(1.17)的特解

$$y = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0t + y_0. \quad (1.18)$$

条件(1.17)称为方程(1.4)的**初值条件**, 而把附加了初值条件的方程

$$\begin{cases} \ddot{y} = -g, \\ y(0) = y_0, \dot{y}(0) = v_0 \end{cases} \quad (1.19)$$

称为**初值问题**, 把(1.18)称为是初值问题(1.19)的解. 由于 Cauchy (1789—1857) 在 19 世纪 20 年代首次建立了初值问题解的存在唯一性定理, 因此又把初值问题称为 **Cauchy 问题**. 有时也把上述初值问题直接记为(1.4) + (1.17).

可以看出, 初值问题(1.19)真正能够确切地反映一个自由落体的运动规律, 而方程(1.4)所表达的只是物体自由下落时在任意瞬间  $t$  所满足的关系式. 事实上, 在同一时刻从不同高度和(或)以不同初速度自由下落的物体将表现为



图 1.10 A. L. Cauchy(1789—1857)首次建立了初值问题解的存在唯一性定理

不同的运动.

在第一节所见到的方程并不是都像对上述自由落体问题一样可以采用直接积分的办法求解,有的方程如(1.1)甚至难以求出通解的精确形式.然而我们可以迭代地构造一个函数序列来逼近其初值问题的特解.例如将初值问题

$$\dot{\phi}(t) = f(t, \phi(t)), \quad (1.20)$$

$$\phi(t_0) = x_0 \quad (1.21)$$

用等价积分方程形式

$$\phi(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, \phi(\tau)) d\tau \quad (1.22)$$

表示,我们可以构造函数序列 $\{\phi_n(t)\}$ 来逼近(1.20)的初值问题的解.这个函数序列是利用递推关系

$$\phi_0(t) \equiv x_0,$$

$$\phi_n(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, \phi_{n-1}(\tau)) d\tau, \quad n = 1, 2, \dots$$

来定义的.在保证了收敛性的情形下,对较大的 $n$ ,函数 $\phi_n(t)$ 就是一个近似解.这一思想将在第五章得到完整的阐述.

## 二、几何分析

我们以后将看到,能用初等方法求出精确解的微分方程为数很少.事实上,有的方程也没有必要非要给出解的精确表达式不可.通过几何上的分析完全可以获得解的很多重要信息,推断解的某些重要属性,从而使该微分方程问题在一



定程度上获得解决.

考虑方程(1.20)并假定 $f(t, x)$ 在平面上或其一个区域 $G$ 上连续. 该方程的解 $x = \phi(t)$ 在 $tx$ 平面上给出了一条光滑曲线 $\Gamma$ , 称为该方程的一条积分曲线(integral curve).

微分方程(1.20)在 $tx$ 平面上的每一个使该方程有定义的点 $P_0: (t_0, x_0)$ 处都指明了一个方向, 那就是积分曲线在该点的斜率. 像这样逐点定义了方向斜率的平面(或区域 $G$ )称为微分方程的方向场, 参看图 1.11. 方程的解就是在这样的斜率指引下走出来的, 每到一处就修正前进方向. 显然, 在点 $P_0$ 处积分曲线 $\Gamma$ 有切线

$$x = x_0 + f(t_0, x_0)(t - t_0).$$

过任意一个 $P_0$ 点作上述切线的短小的线段, 这样我们就掌握了方程(1.20)定义的方向场的全部情况. 因此, 积分曲线就是一条每个点的切向都与方向场一致的光滑曲线. 微分方程的求解就是要寻找这样的积分曲线.

积分曲线的分布状况可以由先求出一些等倾线来略见一斑, 而没有必要把每个点上的方向都画出来. 所谓“等倾线”(isocline)就是上面每个点的斜率都一样的曲线, 它由下列关系

$$f(t, x) = k$$

确定. 特别地, 当 $k=0$ 时, 称相应的等倾线为水平等倾线; 当 $k=\infty$ , 即 $\frac{1}{f(t, x)}=0$ 时, 称相应的等倾线为竖直等倾线.

**例 1.8** 考虑方程

$$\frac{dx}{dt} = \frac{x-t}{x+t}. \quad (1.23)$$

斜率为 $k$ 的等倾线满足

$$\frac{x-t}{x+t} = k, \quad \text{即} \quad x = \frac{1+k}{1-k}t.$$

因此, 过原点的直线都是等倾线. 其中水平等倾线为 $x=t$ 而竖直等倾线为 $x=-t$ . 进而可以看出, 这些等倾线同方向场的方向成 $45^\circ$ 角. 更严格地看, 这个夹角 $\theta = \alpha_i - \alpha_v$ , 其中 $\alpha_i, \alpha_v$ 分别是等倾线和方向场的方向与 $t$ 坐标轴的夹角. 易见,

$$\tan \theta = \frac{\tan \alpha_i - \tan \alpha_v}{1 + \tan \alpha_i \tan \alpha_v} = \frac{\frac{1+k}{1-k} - k}{1 + \frac{1+k}{1-k}k} = 1.$$

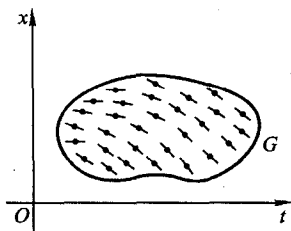


图 1.11 方向场