

高等学校教学用书

# 材料成形 计算机模拟

辛启斌 编著

冶金工业出版社

高等学校教学用书

# 材料成形计算机模拟

辛啟斌 编著

北 京

冶金工业出版社

2006

## 内 容 摘 要

“材料成形计算机模拟”是一门将计算机和数值计算方法应用于材料成形过程基本规律研究的新兴技术和课程。本书介绍了材料成形过程中数值模拟的基础理论和研究方法,内容包括:有限差分法的基本原理,利用有限差分法计算材料成形过程温度场的方法和应用;有限元法的基本概念、基本原理、求解过程及其在材料成形中的应用;刚塑性有限元法的基本原理和求解过程。在附录中简单介绍了有限元分析软件 ANSYS 的特点和功能。书中附有复习思考题和必要的上机练习题。

本书在介绍材料成形过程计算机模拟基本原理和基本方法的同时,附有一定数量的应用实例和相关的计算机语言程序,注重应用能力的培养。本书可作为工科高等院校材料成形与控制工程及相关专业本科学生的教材,也可供科研和生产单位的工程技术人员学习和参考。

### 图书在版编目(CIP)数据

材料成形计算机模拟/辛啟斌编著. —北京:冶金工业出版社, 2006. 2

高等学校教学用书

ISBN 7-5024-3896-3

I. 材… II. 辛… III. 工程材料—成形—计算机模拟 IV. TB3

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2005) 第 145272 号

出版人 曹胜利 (北京沙滩嵩祝院北巷 39 号, 邮编 100009)  
责任编辑 郭庚辰 (13693126653) 美术编辑 李 心  
责任校对 王永欣 李文彦 责任印制 牛晓波  
北京百善印刷厂印刷; 冶金工业出版社发行; 各地新华书店经销  
2006 年 2 月第 1 版, 2006 年 2 月第 1 次印刷  
787mm × 1092mm 1/16; 9.5 印张; 234 千字; 144 页; 1-3000 册  
17.00 元

冶金工业出版社发行部 电话: (010)64044283 传真: (010)64027893  
冶金书店 地址: 北京东四西大街 46 号 (100711) 电话: (010)65289081

(本社图书如有印装质量问题, 本社发行部负责退换)

# 前 言

材料成形的工艺方法种类繁多，涉及到的物理、化学、金属学和力学现象十分复杂，是一个多学科交叉、融合的研究和应用领域。但是，材料成形过程的基本规律还是可以利用相关控制方程来进行描述和分析的。随着计算机技术、数值计算技术、图形学技术的不断发展，随着材料成形过程基本规律研究的不断深入和完善，形成了一门将计算机和数值计算技术应用于材料成形过程基本规律研究和工艺分析的新兴技术——材料成形计算机模拟。

材料成形计算机模拟技术的应用非常广泛，例如在液态金属成形过程中，通过流体流动速度场和铸件与铸型温度场的数值计算，就可以模拟金属液充填铸型和固-液界面的推进情况，进而预测铸件能否产生浇不足、砂眼、气孔、缩松、缩孔等铸造缺陷。还有工件淬火处理淬透层厚度的数值计算，热轧过程钢坯加热温度和加热时间的计算，轧钢过程钢坯变形情况的数值分析等。本书介绍了材料成形过程中计算机模拟的基础理论和研究方法，其中心内容是讲授材料成形过程中温度场、位移场、速度场、应力场、应变速率场等数值模拟技术的原理、方法和应用，使学生初步掌握材料成形过程先进的科学研究和性能预测方法。本书在注重基本原理和基本方法的前提下，辅以材料成形领域的有关研究成果，并使教学内容由浅入深，首先介绍液态成形过程温度场数值模拟的有限差分法，再来学习固态成形过程应力场、位移场和应变速率场数值模拟的有限元法，非常适合普通高等教育的本科教学。本书每章均配有应用实例，附有复习思考题和上机实习练习题，注重学生应用能力及计算机编程能力的培养。

由于编者的水平有限，本书在内容选择和编排上以及学术观点方面，如有偏颇失当之处，恳请读者批评指正。

编 者

2005年10月18日

# 目 录

<b>1 绪论</b> .....	1
1.1 材料成形方法 .....	1
1.2 材料成形数值模拟 .....	2
1.2.1 控制方程的求解 .....	2
1.2.2 数值模拟方法 .....	3
1.2.3 数值模拟软件的构成 .....	3
1.3 材料加工计算机集成制造系统 .....	4
<b>2 有限差分法及材料温度场的数值计算</b> .....	5
2.1 材料热传递概述 .....	5
2.1.1 热传递的基本方式 .....	5
2.1.2 热传递的基本公式 .....	7
2.2 有限差分法原理 .....	9
2.2.1 数学基础 .....	9
2.2.2 区域离散化 .....	10
2.3 建立差分方程 .....	12
2.3.1 内部节点差分方程 .....	12
2.3.2 边界节点差分方程 .....	17
2.3.3 三对角线性方程组的解法 .....	21
2.4 差分方程的稳定性和收敛性 .....	22
2.4.1 显式差分方程的稳定性条件 .....	22
2.4.2 隐式差分方程的稳定性条件 .....	25
2.5 材料温度场差分方程有关参数的处理方法 .....	26
2.5.1 热物性参数的选择 .....	26
2.5.2 相变潜热的处理 .....	27
2.5.3 空间网格尺寸和时间步长的选择 .....	31
2.6 材料温度场的数值计算方法 .....	32
2.6.1 单质材料一维温度场的计算 .....	32
2.6.2 单质材料二维温度场的计算 .....	34
2.6.3 复合材料二维温度场的计算 .....	37
<b>3 有限元法的基本原理</b> .....	47
3.1 概述 .....	47

3.1.1	有限元法的基本概念	47
3.1.2	有限元法的特点	50
3.1.3	弹性力学的基本方程	51
3.2	弹性有限元分析的基本方法	53
3.2.1	离散化与单元特性	53
3.2.2	刚度法(位移法)	56
3.2.3	平面应力和应变问题	66
3.2.4	高阶单元的形函数	84
3.2.5	三维应力和应变问题	97
3.3	有限元刚度法的分析步骤及计算程序	103
3.3.1	刚度法的分析步骤	103
3.3.2	刚度法的计算程序	103
<b>4</b>	<b>刚塑性有限元法</b>	<b>113</b>
4.1	材料成形的塑性理论基础	114
4.1.1	应力、应变和应变速率	114
4.1.2	屈服准则	117
4.1.3	列维-密赛斯 (Levy-Mises) 方程	118
4.1.4	等效应力和等效应变	118
4.2	刚塑性材料的变分原理	119
4.2.1	刚塑性材料的边值问题	119
4.2.2	理想刚塑性材料的变分原理	120
4.2.3	刚塑性材料不完全广义变分原理	120
4.2.4	刚塑性可压缩材料的变分原理	123
4.2.5	塑性边界条件及其泛函	124
4.2.6	刚性区的处理	126
4.3	平面应变问题	127
4.3.1	离散化及相关矩阵	127
4.3.2	刚塑性有限元基本公式	131
4.3.3	刚塑性有限元分析方法	137
<b>附录</b>	<b>ANSYS 有限元分析软件简介</b>	<b>140</b>
附录 1	ANSYS 软件的特性	140
附录 2	ANSYS 软件的构成及功能	141
<b>参考文献</b>		<b>144</b>

# 1 绪 论

材料科学已成为现代科学发展的重要方向。核能利用材料、航空航天材料、超导材料、纳米材料、生物医学材料、新型电子材料、智能材料等等，都成为人们研究和开发的重点课题。材料科学是研究材料的结构与性能的规律，而材料成形的任务是把材料加工成形，得到满足一定性能要求的可供使用的产品。

## 1.1 材料成形方法

在现代制造业中，材料成形是生产各种零件或零件毛坯的主要方法。对于金属材料而言，按原料的形态其成形过程可分为液态成形、固态成形和半固态成形。

### (1) 液态成形：

液体金属  $\xrightarrow{\text{铸造}}$  铸件（成品、毛坯件），铸锭

液体金属  $\xrightarrow{\text{连铸、连轧}}$  钢坯、钢材（板材、线材、管材、型材）

### (2) 固态成形：

固体金属  $\xrightarrow{\text{轧制、挤压、拉拔}}$  钢材（板材、线材、管材、型材）  
（坯料）

固体金属  $\xrightarrow{\text{锻压}}$  锻件（成品、毛坯件）  
（钢坯、铸锭）

固体金属  $\xrightarrow{\text{冲压}}$  冲压件（成品、毛坯件）  
（板材）

固体金属  $\xrightarrow{\text{焊接}}$  焊接件（成品、毛坯件）  
（钢材）

固体金属  $\xrightarrow{\text{粉末冶金}}$  零件（成品、毛坯件）  
（粉末）

固体金属  $\xrightarrow{\text{切削}}$  零件（成品）  
（毛坯件）

### (3) 半固态成形：

金属浆  $\xrightarrow{\text{挤压、铸造}}$  铸件（成品、毛坯件），型材

采用上述加工方法将金属材料加工成所需的形状和尺寸，并达到一定的组织性能要求的过程称为材料成形。

液态成形方法是将液态金属浇注到具有和机械零件形状相适应的铸型型腔或一定截面形状的结晶器中，经过凝固、冷却之后，获得毛坯、零件或坯料的材料成形方法。固态成形方法中的轧制、挤压、拉拔、冲压和锻造属于塑性加工工艺。通常，轧制、挤压和拉拔是生产板材、线材、管材和型材等金属材料的加工方法，属于冶金工业行业；而锻造、冲压是用来制造机器零件或毛坯的加工方法，属于机械制造行业。随着加工技术的不断发

展,一些传统塑性加工工艺方法相互渗透、交织和演变,产生了一些新的工艺方法(如锻轧、轧挤等),使得生产率和产品质量提高,并扩大了塑性加工工艺的应用领域。

塑性加工工艺依据变形特征的不同又可分为体积成形工艺和板料成形工艺。体积成形工艺是通过金属材料体积的大量转移来获得产品,其重要特征是金属产生较大的塑性变形,因此要求材料要具有较好的塑性,成形过程通常在热态下进行,如轧制、挤压、锻造等工艺方法。板料成形工艺是利用专用模具对板料进行塑性加工,成形时金属材料的塑性变形不是很大,但与模具的相对运动较多,如冲压、冷轧等工艺方法。

## 1.2 材料成形数值模拟

材料成形的工艺方法种类繁多,涉及到的物理、化学和力学现象十分复杂,是一个多学科交叉、融合的研究和应用领域。例如:液态金属成形就涉及到金属液的流动(流体力学)、金属液的凝固(传热学、物理化学、金属学);固态金属成形涉及到金属的变形(材料力学、弹性力学、塑性力学)、金属的温度变化(传热学)、金属的结构变化(金属学);半固态金属成形还涉及到金属的流动与变形(流变学)。

材料成形过程的基本规律可以用一组微分方程(组)来描述,例如流动方程、热传导方程、运动方程、平衡方程等。描述某一物理现象(材料成形过程中的物理场)的微分方程(组)称为控制方程(也称场方程)。例如:

钢坯弹性变形阶段的应力分布可用弹性力学的应力平衡方程来描述:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + b_i = 0$$

钢坯加热过程的温度分布可用传热学的导热微分方程来描述:

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} - k \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) - \rho Q = 0$$

铸造充型过程液态金属二维流动状况可用流体力学的拉普拉斯方程来描述:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0 \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0$$

所以,在某一加工成形过程还未实际进行时,就可以根据其工艺方案和成形原理在计算机上进行数值计算和模拟,检验该方案的可行性和优化程度,为方案的改进和优化提供依据,节省生产成本。

### 1.2.1 控制方程的求解

许多工程分析问题,如弹性力学中的位移场和应力场分析、塑性力学中的位移速度场和应变速率场分析、电磁学中的电磁场分析、传热学中的温度场分析、流体力学中的速度场和压力场分析等,都可归结为在给定边界条件下求解其控制方程的问题。控制方程的求解有解析和数值两种方法。

(1) 解析方法。根据控制方程的类型,采用解析的方法求出问题的精确解。该方法只能求解方程性质比较简单,且边界条件比较规则的问题。

(2) 数值方法。采用数值计算的方法,利用计算机求出问题的数值解。该方法适用于各种方程类型和各种复杂的边界条件及非线性特征。



对于大多数工程技术问题,由于物体的几何形状比较复杂或者问题的某些特征是非线性的,解析解不易求出或根本求不出来,所以常常用数值方法求解。对工程问题要得到理想或满足工程要求的数值解,必须具备高性能的计算机(硬件条件)和合适的数值解法(软件条件)。

### 1.2.2 数值模拟方法

数值模拟是根据工程问题的基本规律(控制方程和边界条件),利用计算机程序求出满足工程要求的数值解。数值模拟技术是现代工程学形成和发展的重要推动力之一。

数值模拟方法具有的基本特点是:对研究区域进行离散化,使处处满足控制方程和边界条件的场变量化为仅在离散点(节点或单元)满足控制方程和边界条件,将一个连续的、无限自由度问题变成离散的、有限自由度问题。

目前常用的数值模拟方法有:

(1) 有限元法(Finite Element Method, FEM)。有限元法也称有限单元法、有限元素法。该方法的数学基础是在很长时间内发展起来的,最早的工程应用是在结构分析方面。随着计算机技术的发展和广泛应用,大大促进了有限元法的发展,扩展了有限元法的应用领域。几十年来,有限元法的应用已由弹性力学平面扩展到空间、板壳,由静力平衡扩展到稳定、动力学问题和波动问题。分析的对象从弹性材料扩展到塑性、黏弹性、黏塑性和复合材料,从固体力学扩展到流体力学、传热学、电磁学、生物工程等方面。有限元法在塑性加工方面的应用始于20世纪70年代,目前材料成形过程中的塑性变形问题大都采用有限元法。

有限元法实用性强,应用范围广,软件商品化程度高。比较著名的通用软件有:ANSYS、NASTRAN、ASKA、ADINA、SuperSAP等。

(2) 有限差分法(Finite Difference Method, FDM)。该方法也是一种重要的数值计算方法,广泛应用于传热学、流体力学、结构力学、电磁学等学科的工程问题中。有限差分法具有求解过程简单,速度快,易于自行开发软件的优点。

(3) 边界元法(Boundary Element Method, BEM)。边界元法也称边界元素法。该方法是继有限元法之后发展起来的一种新的数值计算方法。边界元法仅在定义域的边界划分单元,用满足控制方程的函数去逼近边界条件。所以,边界元法与有限元法相比具有单元少和未知数少、数据准备简单等优点,但边界元法解非线性问题时,遇到同非线性项相对应的区域积分,这种积分奇异点处强烈的奇异性,使求解遇到困难。边界元法在材料成形过程中塑性变形问题的应用还处于研究和发展中。

### 1.2.3 数值模拟软件的构成

数值模拟软件通常由前处理、数值计算、后处理三部分组成。

(1) 前处理。前处理主要完成下述功能:

实体造型——将研究问题的几何形状输入到计算机中;

物性赋值——将研究问题的各种物理参数(力学参数、热力学参数、流动参数、电磁参数等)输入到计算机中;

定义单元类型——根据研究问题的特性将其定义为实体、梁、壳、板等单元类型;

网格剖分——将连续的实体进行离散化,形成节点和单元。

(2) 数值计算。数值计算主要完成下述功能:

施加载荷——定义边界条件、初始条件;

设定时间步——对于瞬态问题要设定时间步;

确定计算控制条件——对求解过程和计算方法进行选择;

求解计算——软件按照选定的数值计算方法进行求解。

(3) 后处理。后处理主要完成下述功能:

显示和分析计算结果——图形显示体系的应力场、温度场、速度场、位移场、应变场等,列表显示节点和单元的相关数据;

分析计算误差;

打印和保存计算结果。

### 1.3 材料加工计算机集成制造系统

在材料加工过程中,传统的产品生产过程一般为:首先由专家或工程技术人员依据个人经验初步设计出产品,然后据此做出模型,再做出成品。成品完成后,再进行试验,对设计上的问题进行修改,进行重新设计、制造、试验分析,最后定型投产。这个过程不但耗费大量的时间,也耗费大量的人力和物力。

随着计算机技术、数值计算技术、图形学技术、数控加工技术的不断发展,工业加工方法已经得到非常大的改变,大大提高了产品开发、设计、分析和制造的效率和产品性能。计算机集成制造系统(CIMS)就是一种新兴的现代加工方法。

计算机集成制造系统主要由 CAD/CAE/CAM/CAPP 组成。

(1) CAD——计算机辅助设计(Computer Aided Design)。使用计算机实体造型软件直接从事产品的图形绘制和结构设计。CAD 的通用软件有:AutoCAD、Mechanical Desktop、Inventor、Pro/Engineer、SolidWorks、CAXA 电子图板等。

(2) CAE——计算机辅助工程分析(Computer Aided Engineering)。使用计算机工程分析软件来辅助工程师进行设计后的分析、预测或进行同步工程。CAE 的通用软件有 ANSYS、ADINA、NASTRAN 等。

(3) CAM——计算机辅助制造(Computer Aided Manufacturing)。直接用计算机来辅助操纵各种精密工具机器(如数控仿真机床、激光快速成形机等)以制造各种零件。CAM 的通用软件有 MastrCAM、Unigraphics (UG)、SurfCAM 等。

(4) CAPP——计算机辅助工艺设计。使用计算机软件设计、规划和管理工程技术文件和工艺方案,工艺规范化、标准化、集成化及工艺设计与信息管理一体化的制造工艺信息系统。

#### 复习思考题

1. 何谓控制方程?列出你所知道的工程技术问题的控制方程。
2. 何谓数值模拟,常用的数值模拟方法有几种,各有何特点?
3. 数值模拟软件一般包括哪几部分,各实现什么功能?
4. 在材料成形的数值模拟中,涉及到哪些学科和领域?

## 2 有限差分法及材料温度场的数值计算

有限差分法是数值求解微分问题的一种重要工具，在材料成形领域的应用较为普遍，与有限元法一起成为材料成形计算机模拟技术的两种主要的数值计算方法。有限差分法目前的应用包括：

(1) 材料加工中的传热分析：如铸造成形过程的传热凝固、塑性成形中的传热、焊接成形中的热量传递等。

(2) 材料加工中的流动分析：如连铸过程、铸件充型过程、焊接熔池的产生与移动等。

(3) 材料加工中的应力分析：如铸件凝固应力、焊接热应力等。

(4) 材料加工中的电磁分析：如电磁冶金过程。该方面的研究发展很快，应用很多。

### 2.1 材料热传递概述

#### 2.1.1 热传递的基本方式

热传递有三种基本方式，即热传导（导热）、热对流和热辐射。在这三种基本方式中，热量传递的物理本质是不同的。

##### 2.1.1.1 热传导

热传导是由于温度不同，在导体内存在温差和温度梯度，引起自由电子移动的结果。温差越大，自由电子的移动越激烈。因此，好的导体也是好的导热体。

热传导理论是研究物体内部有温差存在时各部位温度随时间变化的规律。假设所研究的物体的组织结构完全致密，热能经过导体的任何断面、任何时间都是相同的，那么，在一定的温度梯度、一定时间，经过一定面积所传递的热量可用下式计算：

$$Q = -\lambda \left( \frac{T_2 - T_1}{L} \right) At \quad (2-1)$$

式中  $Q$ ——传导热量；

$T_2 - T_1$ ——材料内两点的温度差；

$L$ ——材料内两点的距离；

$A$ ——传热面积；

$\lambda$ ——材料的导热系数；

$t$ ——传热时间。

由于任何物体都不是理想致密，所以要用微分式来表示：

$$dQ = -\lambda \frac{dT}{dL} dA dt \quad (2-2)$$

故单位面积、单位时间内所传递的热量  $q$ （热流密度）为：

$$q = -\lambda \frac{dT}{dL} \quad (2-3)$$

### 2.1.1.2 热对流

热对流是由运动的流体质点发生相对位移而引起热能转移的现象。它是利用不同温度的质点密度不同来传热，在流体受热密度变小而上浮的同时，冷的流体就会流过来补充，这样一个周而复始的过程，即所谓对流。对流只局限于液体和气体，并且往往涉及到流体与固体边界之间的热交换。

研究对流传热时，主要以牛顿定律为依据，即传热流体的温度为  $T$ ，放于温度为  $T_f$  的流体中，传热面积为  $A$ ，经过时间  $t$ ，则对流传热量为：

$$Q_c = \alpha_c (T - T_f) A t \quad (2-4)$$

式中  $T$ ——放热流体（或固体）的温度；

$T_f$ ——受热流体（或固体）的温度；

$A$ ——传热面积；

$t$ ——传热时间；

$\alpha_c$ ——对流传热系数。

影响  $\alpha_c$  的因素很多，它是一个复杂的函数：

$$\alpha_c = f(T, T_f, \lambda, c_p, \rho, \mu, v, \phi, \dots)$$

式中  $\lambda$ ——流体的导热系数；

$c_p$ ——流体的质量定压热容；

$\rho$ ——流体的密度；

$\mu$ ——流体的黏度；

$v$ ——流体的流动速度；

$\phi$ ——放热表面形状系数。

如此可见，热对流传热要比热传导传热复杂得多。另外，对流传热介质虽然只是流体，但传热之间的物体可以是固体、液体、气体同时存在。这样就增加了研究对流传热的复杂性，并伴随有传导，以致辐射存在。

### 2.1.1.3 热辐射

热辐射是物体受热后，内部原子振动而出现的一种电磁波能量传递。一切物体只要其温度高于绝对零度，就会从表面放出辐射能。所以，辐射能主要是以热能形式发出的一种能量。在放热体和吸热体之间的辐射是彼此往复的，只是两物体以不同速度进行辐射，经过一定时间之后，两物体以同等速度辐射，便可以达到暂时平衡。

根据物体吸收辐射能的情况，可以把物体分为黑体、灰体、白体、透明体。绝对黑体将吸收全部辐射能，绝对白体将反射全部辐射能，绝对透明体将使辐射能完全透过该物体。

在单位时间内物体单位表面积所辐射出的能量  $Q$  可根据斯蒂芬-玻耳兹曼定律求得：

$$Q = CT^4$$

式中  $T$ ——热力学温度，K；

$C$ ——辐射系数，根据物体的表面情况而定。对于黑体而言， $C = \varepsilon C_0$ ， $C_0 = 5.67 \times 10^{-8} \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K}^4)$ ，为斯蒂芬-玻耳兹曼常数；

$\varepsilon$ ——黑度系数，在 0~1 之间。一般经过磨光的金属表面  $\varepsilon=0.2\sim0.4$ ，粗糙的金属表面  $\varepsilon=0.6\sim0.95$ ，金属达到熔点时  $\varepsilon=0.9\sim0.95$ 。

两个物体所处的温度不同，彼此都可以发射辐射能，并且一个辐射体能吸收另一个辐射体的辐射能量。两者之间的热辐射交换可用下式计算：

$$Q_R = \varepsilon C_0 (T_1^4 - T_2^4) \quad (2-5)$$

式中  $T_1, T_2$ ——分别为两个辐射体的温度。

式 (2-5) 适用于任何物体之间的辐射热交换。

以上简要介绍了传热的三种基本方式，实际上热传递并非单纯以一种方式进行。对于材料的成形过程，在铸件的凝固过程、钢坯热轧过程、工件的热处理过程中可同时有三种热传递方式，只是不同时间、不同部位其所占的地位有所不同。

## 2.1.2 热传递的基本公式

### 2.1.2.1 傅里叶公式

描述单向传热的热传导傅里叶公式为：

$$Q = -\lambda \left( \frac{T_2 - T_1}{L} \right) At \quad (2-6)$$

或

$$q = -\lambda \frac{dT}{dL} \quad (2-7)$$

式中  $q$ ——热流密度 ( $W/m^2$ )，即沿物体表面法线方向单位面积、单位时间内流过的热量。

### 2.1.2.2 导热微分方程

如图 2-1 所示，物体体积元 ( $dx dy dz$ ) 在  $\Delta t$  时间内同时由三个方向 ( $x, y, z$ ) 输入热能  $\Delta Q_x, \Delta Q_y, \Delta Q_z$ ，同时又向  $x, y, z$  三个方向输出热能  $\Delta Q_{x+dx}, \Delta Q_{y+dy}, \Delta Q_{z+dz}$ 。根据傅里叶公式和能量守恒定律可得到导热微分方程：

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda}{\rho c_p} \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) = a \nabla^2 T \quad (2-8)$$

式中  $T$ ——温度，K；

$t$ ——时间，s；

$\lambda$ ——导热系数， $W/(m \cdot K)$ ；

$c_p$ ——定压热容， $J/(kg \cdot K)$ ；

$\rho$ ——密度， $kg/m^3$ ；

$a$ ——热扩散率， $m^2/s$ ，

$$a = \frac{\lambda}{\rho c_p}$$

$\nabla^2$ ——拉普拉斯算符。

如果物体体积元内有内热源（如相变潜热），则相应的导热微分方程为：

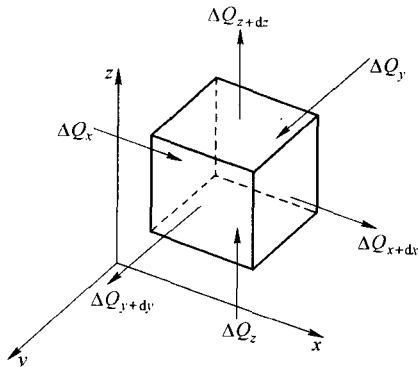


图 2-1 体积元中的热能积累

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda}{\rho c_p} \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + \frac{Q_{\text{内}}}{\rho c_p} = a \nabla^2 T + \frac{Q_{\text{内}}}{\rho c_p} \quad (2-9)$$

式中  $Q_{\text{内}}$ ——内热源,  $\text{J}/\text{m}^3$ 。

式(2-9)是材料温度场计算的基本方程式。

在柱坐标系下, 导热微分方程为:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \left( \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \times \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \times \frac{\partial^2 T}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + \frac{Q_{\text{内}}}{\rho c_p} \quad (2-10)$$

对于二维传热系统, 导热微分方程为:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) + \frac{Q_{\text{内}}}{\rho c_p} \quad (\text{直角坐标系}) \quad (2-11)$$

及

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \left( \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \times \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + \frac{Q_{\text{内}}}{\rho c_p} \quad (\text{柱坐标系}) \quad (2-12)$$

对于稳态导热, 直角坐标系的导热微分方程为:

$$\left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + \frac{Q_{\text{内}}}{\lambda} = 0 \quad (2-13)$$

式(2-8)~式(2-13)构成不同条件下温度场计算的控制方程。

### 2.1.2.3 导热微分方程的单值性条件

对于导热微分方程, 必须根据具体条件才能得出所要求问题的计算结果。这些具体条件就是导热微分方程的单值性条件, 即导热问题的初始条件和边界条件。

(1) 初始条件。初始条件是指研究对象场变量的初始分布, 这里是指物体开始导热的瞬间物体的温度分布。

(2) 边界条件。边界条件是指物体表面与周围介质能量交换的情况。在材料温度场计算中常用到的边界条件有以下几类:

1) 第一类边界条件: 它给出了物体表面温度  $T_w$  随时间  $t$  的变化关系。第一类边界条件数学表达式的一般形式为:

$$T_w = f_1(t) \quad (2-14a)$$

或

$$T_w = \text{const} \quad (2-14b)$$

2) 第二类边界条件: 它给出了通过物体表面法线方向的比热流量  $q_w$  随时间  $t$  的变化关系。第二类边界条件数学表达式的一般形式为:

$$q_w = -\lambda \left. \frac{\partial T}{\partial n} \right|_w = f_2(t) \quad (2-15a)$$

或

$$q_w = -\lambda \left. \frac{\partial T}{\partial n} \right|_w = \text{const} \quad (2-15b)$$

式中,  $\left. \frac{\partial T}{\partial n} \right|_w$  为物体表面法线方向的温度梯度。

在  $q_w = 0$  时为绝热边界条件。

3) 第三类边界条件: 它给出了物体表面法线方向的比热流量  $q_w$  与周围环境温度的变化关系。第三类边界条件数学表达式的一般形式为:

$$q_w = -\lambda \left. \frac{\partial T}{\partial n} \right|_w = h_c (T_w - T_f) \quad (2-16)$$

式中  $h_c$ ——边界传热系数,  $W/(m^2 \cdot K)$ ;

$T_w$ ——边界温度,  $K$ ;

$T_f$ ——环境温度,  $K$ 。

对于物体表面法线方向与周围环境进行辐射换热的情况, 其数学表达式的一般形式为:

$$q_w = -\lambda \left. \frac{\partial T}{\partial n} \right|_w = \varepsilon C_0 (T_w^4 - T_f^4) \quad (2-17)$$

式中  $\varepsilon$ ——黑度系数;

$C_0$ ——斯蒂芬-玻耳兹曼常数;

$T_w$ ——边界温度,  $K$ ;

$T_f$ ——环境温度,  $K$ 。

在处理实际问题时, 对流和辐射换热常常相伴出现, 形成对流和辐射混合的边界条件, 这时数学表达式的一般形式为:

$$\begin{aligned} q_w &= -\lambda \left. \frac{\partial T}{\partial n} \right|_w = h_c (T_w - T_f) + \varepsilon C_0 (T_w^4 - T_f^4) \\ &= h_c (T_w - T_f) + h_s (T_w - T_f) = h (T_w - T_f) \end{aligned} \quad (2-18)$$

式中,  $h = h_c + h_s$ , 为总换热系数;  $h_s$  为辐射换热系数:

$$h_s = \varepsilon C_0 (T_w^2 + T_f^2) (T_w + T_f) \quad (2-19)$$

## 2.2 有限差分法原理

### 2.2.1 数学基础

通常把一个连续函数  $f(x)$  的增量与自变量增量的比值定义为有限差商。显然, 当自变量的增量趋于零时, 有限差商的极限就是这个函数的微商。一般情况下, 可用有限差商作为微商的某种近似, 即用有限差商代替微商:

$$\frac{df}{dx} \approx \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad (2-20)$$

对于一阶微商, 用差商代替微商有三种形式:

(1) 向前差商

$$\frac{df}{dx} \approx \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad (2-21)$$

(2) 向后差商

$$\frac{df}{dx} \approx \frac{f(x) - f(x - \Delta x)}{\Delta x} \quad (2-22)$$

(3) 中心差商

$$\frac{df}{dx} \approx \frac{f(x + \Delta x) - f(x - \Delta x)}{2\Delta x} \quad (2-23)$$

利用有限差商代替微商，必然会带来一些误差。用不同的差商格式代替微商所引起的误差是不同的。用 Taylor 级数对函数  $f(x)$  进行展开，略去高阶小量，经过简单运算，可知向前差商和向后差商格式的截断误差是  $\Delta x$  的同级小量  $O(\Delta x)$ ，中心差商格式的截断误差是  $(\Delta x^2)$  的同级小量  $O(\Delta x^2)$ 。

对于二阶微商，可用二阶差商来代替：

$$\begin{aligned} \frac{d^2f}{dx^2} &\approx \frac{\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} - \frac{f(x) - f(x - \Delta x)}{\Delta x}}{\Delta x} \\ \frac{d^2f}{dx^2} &\approx \frac{f(x + \Delta x) - 2f(x) + f(x - \Delta x)}{(\Delta x)^2} \end{aligned} \quad (2-24)$$

这是二阶中心差商格式，其截断误差是  $(\Delta x^2)$  的同级小量  $O(\Delta x^2)$ 。二阶差商也有前差和后差格式，但应用最普遍的还是中心差商格式。

对于多元函数  $f(x, y, \dots)$ ，其差商格式可以类似推出。例如一阶前差格式为：

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &\approx \frac{f(x + \Delta x, y, \dots) - f(x, y, \dots)}{\Delta x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} &\approx \frac{f(x, y + \Delta y, \dots) - f(x, y, \dots)}{\Delta y} \end{aligned}$$

可以看出，用差商代替微商，可使（偏）微分方程转化为差分方程，利用数值计算方法求解（偏）微分方程。但要注意，这种数值计算方法使计算结果有一定误差，要考虑算法的收敛性和稳定性问题。

### 2.2.2 区域离散化

当应用有限差分法求解偏微分方程（加上相应的边界条件和可能的初始条件）时，首先应在研究物体所涉及的整个区域  $R$  内进行网格划分。图 2-2 表示在二维区域的情况下，如何用一些离散点  $P_{ij}$  的集合代替连续区域  $R$ 。对于瞬态问题，取第三个坐标  $t$ ，令其方向从书页朝外，并将二维网格在  $\Delta t$  间隔内向外重复而形成三维的网格系。假设有两个距离坐标  $x$  和  $y$ ，且时间  $t$  为自变量，并设各自的格距为  $\Delta x$ 、 $\Delta y$  和  $\Delta t$ ，下标  $i, j, p$  用以表示空间坐标为  $i\Delta x, j\Delta y, p\Delta t$  的那个节点  $P_{i,j,p}$ 。我们仅仅要得到离散点  $P_{i,j,p}$  的近似值，而不是要建立一个对区域  $R$  内到处都有效的解（例如解析解）。

区域离散化，就是把所研究对象的区域进行网格剖分，形成节点（离散点）和控制单元。如何对物体的几何形状进行准确描述是保证计算精度的关键。在有限差分法中，对标准差分格式多采用正交网格进行剖分：一维问题相当于用线段剖分；二维问题相当于用



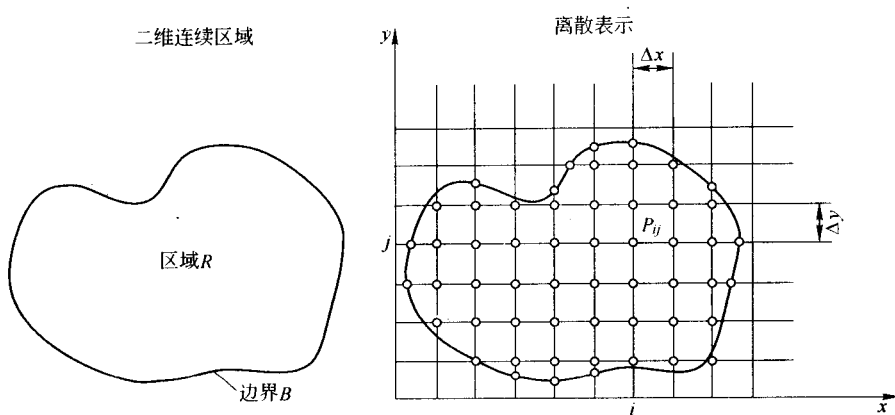


图 2-2 连续二维区域的离散近似

矩形剖分；三维问题相当于用长方体剖分，这时的剖分单元就是线段、矩形和长方体。

剖分单元的尺寸称为步长，一般标记为  $\Delta x$ 、 $\Delta y$ 、 $\Delta z$ 。对于多维区域，空间的各维步长可以相同，也可以不同；步长可以是不变的常量，即等步长，也可以是变量（即在区域内的不同处是不同的），即变步长。如果区域内各点处的温度梯度相差很大，则在温度变化剧烈处网格布得密些；在温度变化缓慢处网格布得疏些。至于步长取多大为宜，要根据具体问题，如计算精度、差分方程的稳定性和计算工作量等因素而定。对时间划分后，其步长标记为  $\Delta t$ 。时间步长既可以是定值，也可以是变步长。

区域离散化之后，研究区域就形成节点和控制单元。

确定节点的方式有两种：一是将节点取在剖分网格的交点上，称为外节点法；二是将节点取在剖分网格的中心，称为内节点法。以节点为核心形成的子区域称为控制单元（简称单元）。如对图 2-3 中的二维区域进行离散化处理，实线为剖分网格， $\circ$  为按外节点法形成的节点， $\triangle$  为按内节点法形成的节点，外节点法形成的单元为虚线围成的子区域，

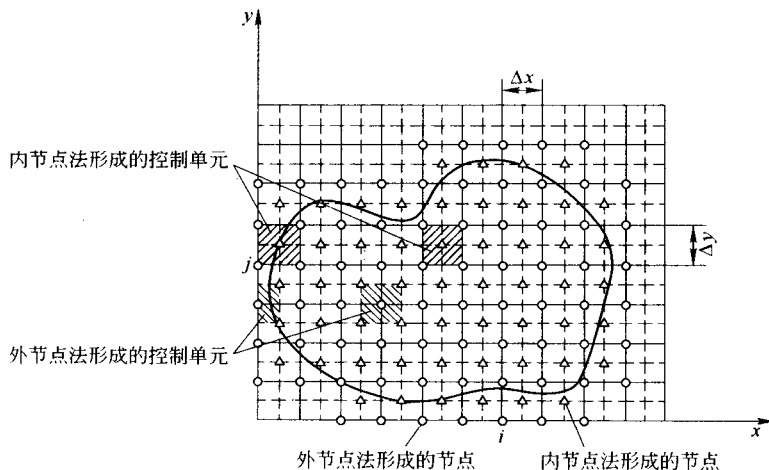


图 2-3 二维区域离散化形成的节点和控制单元