冯跃峰

方法拾掇

中学理科精华丛书

广东教育出版社

方法拾掇

冯跃峰

广东教育出版社

中学理科精华丛书

中学理科精华丛书

方法拾撷

冯跃峰

广东教育出版社出版发行

广东省新华书店经销

韶关新华印刷厂印刷

787×1092毫米32开本 16.25印张 350，000字

1990年12月第1版 1990年12月第1次印刷

印数 1—2，400册

ISBN 7—5406—1021—2/G·1014

定价 4.65元

内 容 提 要

本书从九个方面介绍了二十六种数学解题方法。这些方法可说是数学解题的灵匙或武器，但它们在中学教材中却很少提及。对于个别已为人熟知的方法，本书则只强调其运用技巧和它们的变异形式。书中所阐述的数学方法的内容都是很新颖的。

本书还选择了大量生动有趣的例题，从各个方面介绍了各种方法的应用，并配备了相应的习题供读者练习。书中的知识完全属于初等数学范畴，适合中学生、中学数学教师和广大数学爱好者阅读。

前　言

数学是各门学科的基础和工具，而数学方法则是掌握和运用数学知识的钥匙。长期以来，掌握巧妙的数学方法是每一个想学好数学的人所企盼的。但是，由于种种原因，数学解题方法的总结往往纠缠于应付一些考题上，学生采用的是一种“套题型”、“背题解”的僵化的解题模式，这就限制了他们思维的发展与能力的提高。因此，我们有必要向学生系统地介绍各种数学方法的应用，从宏观上为他们提供解题的有效途径，本书就在这方面做了一点尝试。

由于不少数学方法在中学教材中经常出现并得到反复利用，如果一一列举，这不仅会大大增加本书的篇幅，而且还会淹没其主要思想。因此，本书在编排上，不求全面，但求精辟，“拾掇”的意义也就在此。

本书共分十章，阅读时可根据需要选择有关章节，即使通读也并不一定要按书中的顺序。全书的内容完全是初等数学的范畴，大部分内容具有中等程度的中学生就可以读懂，尽管有个别例子难度大些，但它们是专为数学教师和优秀学生准备的，阅读时略去这些内容，也不会影响对书中方法的理解和掌握。

限于作者的学识水平，书中的错漏之处在所难免，祈盼读者不吝指正，以便有机会再版时修改。

应当感谢符绩才同志的帮助，他为本书的出版提供了许

多材料和提出了不少指导性意见。此外，还要感谢徐桂珍同志，她也给了我不少帮助。

冯跃峰

1989年1月

目　录

第一章　绪论……………………………………………………（1）

§1.1　数学方法及其意义……………………………………（1）

§1.2　数学方法的分类与选择………………………………（4）

§1.3　数学方法的特点………………………………………（6）

第二章　转化型方法……………………………………………（8）

§2.1　化归法…………………………………………………（8）

§2.2　特殊化…………………………………………………（32）

§2.3　等价变换………………………………………………（59）

§2.4　换元法…………………………………………………（78）

§2.5　RMI原理………………………………………………（112）

第三章　模仿型方法……………………………………………（122）

§3.1　类比……………………………………………………（123）

§3.2　联想……………………………………………………（136）

第四章　逼近型方法……………………………………………（159）

§4.1　筛法……………………………………………………（159）

§4.2　调整法…………………………………………………（172）

§4.3　放缩法…………………………………………………（187）

§4.4　凑配法…………………………………………………（206）

第五章　尝试型方法……………………………………………（221）

§5.1　观察……………………………………………………(221)
§5.2　试验……………………………………………………(240)
§5.3　赋值……………………………………………………(252)
第六章　直观型方法………………………………………(265)
§6.1　图解法…………………………………………………(265)
§6.2　表解法…………………………………………………(280)
§6.3　几何法…………………………………………………(291)
第七章　程序型方法………………………………………(307)
§7.1　递归方法………………………………………………(307)
§7.2　逆向推理………………………………………………(326)
第八章　选择型方法………………………………………(338)
§8.1　主元法…………………………………………………(338)
§8.2　基本量法………………………………………………(351)
第九章　规律型方法………………………………………(366)
§9.1　极端原理………………………………………………(366)
§9.2　奇偶原理………………………………………………(380)
§9.3　周期原理………………………………………………(396)
第十章　创造型方法………………………………………(410)
§10.1　猜想与想象…………………………………………(410)
§10.2　构造法………………………………………………(434)
习题答案……………………………………………………(504)

第一章　绪　论

数学是探求、认识和刻画自然规律的一门科学，数学问题乃是这门科学的核心，而数学方法则是解决数学问题的重要工具。因此，数学方法在学习、掌握和应用数学中都占有非常重要的地位。实际上，数学内容的本身就包括数学知识与数学方法两个部分，知识与方法是相互依存不可分割的整体，在学习数学的同时，也就离不开熟悉、掌握和应用某些数学方法。因此，我们应当对数学方法有一个较全面的了解和认识。

§1.1　数学方法及其意义

什么是数学方法？数学方法是人们为解决数学问题所制定的解题方案，是从条件导出结论所实施的具体手段。它是人们解题经验的积累，是在实际数学问题的研究中，发现或创造出来的相对固定的解题模式。

在数学科学研究和学习中，人们常常通过提出问题，分析和解决问题来认识或发现数学科学内容，与此同时也就创

立了相应的数学方法。例如，我国古代数学家刘徽在研究求圆周长、圆面积的问题中，发现了圆周和直径的比等于定值，从而计算出圆周率，创立了“割圆术”，还提出了极限的数学思想方法。又如大数学家欧拉，在研究哥尼斯堡城区的“七桥问题”中得到了一笔画的几何图形的一个充要条件。再如欧洲的数学家们在研究求曲线的切线问题、变速运动的瞬时速度问题中，创立了微分法，并在研究求曲边梯形的面积，旋转体的体积问题中创立了积分法。如此等等，都说明数学方法是在对数学问题的研究中发现和创造出来的，而且在实践中不断地改进和完善。因此，在数学学习中，我们不仅要学会灵活运用数学方法，而且要善于改造和完善原有的数学方法，乃至于发现和创造新的数学方法，为数学解题提供更完美、更先进的工具。

数学方法在数学解题中的作用是众所周知的。可以这么说，解题的成功，很大程度上取决于方法的选择。当代著名数学家、教育学家波利亚(美)在他的名著《怎样解题》中曾明确强调：“解题成功，要靠正确思路的选择，要靠从可以接近它的方向去攻击堡垒。”正确的方法能使问题正确而迅速地获解，而不妥当的方法反而会把问题越弄越糟，使思维陷入混乱，导致解题的失败。

据说高斯在读小学时就曾显露出他奇特的解题才能。有一次，老师出了如下一道算题：求$1+2+3+\cdots+100$，在其他学生几乎还没有怎么动笔时，小高斯就把写有答数5050的石板交给了老师。老师对此大为惊奇：高斯是怎样算出来的？我们当然无法弄清他当时解题的全部细节，但我们可以肯定，高斯选择了正确而简捷的解题方法，他不是一项一项

地去累加，而是通过观察，发现了和式的特点：$1+100=101$，$2+99=101$，…然后对各项进行重新组合，使问题变得简单而获解。由此可见，优良的方法常使解答正确而简单。

数学方法不仅对解题有重要的作用，而且还推动着数学的发展。几乎数学上每一次重大进展都离不开数学方法的创新。例如，法国数学家笛卡儿把方程中的未知数看作变量来研究，创立了坐标法，使得数形结合，为解析几何和微积分的产生和发展提供了新的数学思想方法。又如公元前三世纪的数学家欧几里德，总结了前人在几何上的优秀成果，把零散的几何知识加以整理和提炼，组成了一个有机的系统化的整体，写成了人类历史上公认的第一部数学巨著《几何原本》，把经验几何整理为理论几何，创立了公理化方法。以后，人们对公理化方法的进一步研究与应用，大大促进了数学的发展。例如苏联数学家罗巴切夫斯基和德国数学家黎曼采用不同的新公理化方法，创立了不同内容的非欧几何。

数学方法不仅为数学服务，而且可以应用到其它科学的研究中。例如列方程解应用题，用三角法解决天文测量问题，用坐标法来研究机械运动和行星轨道问题，这些都是把实际问题转化为数学问题，然后用数学方法加以解决的实例。

综上所述，学习和掌握一定的数学方法，对于帮助我们正确解答数学问题，对于帮助我们学习、研究和应用数学知识、对于培养我们创造性的思维品质、提高我们解决实际问题的能力都是大有裨益的。

§1.2　数学方法的分类与选择

数学问题五花八门，数学方法也就纷繁不一，但从整体上讲，中学数学方法可以分为“学科方法”与“逻辑方法”两大部分。

学科方法是建立在一定数学知识基础之上的方法，它又分为三个层次，即特殊方法，泛用方法与通用方法。特殊方法属于它的最低层次，因为它是为解决某一个特定问题而制定的方法，常称之为“一题一法”。但是，从某种意义上讲，有些特殊方法又属于“最高层次”的方法，因为特殊性往往蕴含着“技巧性”与“灵活性”。“泛用方法”属学科方法中的较高层次，它是解决某一类或某几类数学问题的方法。可以说，每一类数学问题一般都有与之对应的解题方法，这就是人们常说的“证题术”。学科方法中的最高层次是通用方法，简称“通法”。这类方法往往是特殊方法和泛用方法在更高程度上的概括，主要表现于宏观上解题策略的制定，它几乎可以适用(某一数学分支)一切数学问题。但在具体实施过程中，又要根据不同的数学问题使用不同的变形技巧。

同样，逻辑方法也可以分为三个层次，即形式逻辑方法、数理逻辑方法和辩证逻辑方法。在中学数学中使用得最多的是形式逻辑方法，它在数学命题的推理论证方面，主要表现为分析与综合，演绎与归纳，直接论证与间接论证等等。数理逻辑是比形式逻辑更高层次的逻辑方法，在中学数

学里，它主要涉及命题之间的简单关系和命题条件的充分性与必要性。辩证逻辑是最高层次的逻辑方法，它要求我们从事物的整体、联系、转化和矛盾发展中把握思维过程和思维对象。如果不遵循形式逻辑，思维就不会正确。不遵循辩证逻辑，认识就不可能深刻。

在数学解题中，我们既要选择一定的学科方法，也要遵循一定的逻辑方法。实际上,解任何数学问题,总离不开分析或综合，而在分析或综合的过程中又离不开采用一定的学科方法。只有把这两种方法有机地结合在一起，才能使问题得到解决。那么，在解题中又怎样去获取正确的解题方法呢?

首先，知识是选择方法的根本依据。我们知道，知识与方法是紧密相连的。有些知识本身就是数学方法，而数学方法又往往以数学知识为基础。因此，在选择方法时，必须依据自己的知识背景。很明显，初中学生就不可能采用基本不等式去求函数的极值，而高中学生在求$1+2+3+\cdots+100$时就不会采用"累加法"。

其次，方法的选择还要依据一定的数学能力。如运算能力、推理论证能力、空间想象能力、抽象思维能力等等。运算能力强的人总习惯于把抽象的对象转化为数量关系，然后借助于量的计算去解决；而逻辑思维能力强的人又善于把具体的问题符号化，然后利用符号间的逻辑关系去论证；而抽象思维能力强的人却喜欢把问题一般化，从较高的层次去把握问题的性质。

第三，数学方法的选择，更多的依赖于数学问题的结构与特点。所谓结构是指数学问题是怎样构成的，只有弄清了问题的结构，明确了构成题目的各个元素之间的相互关系，

才能有效地选择恰当的方法。另外，对于不同的数学问题即使有相同的结构，也会有各自不同的特点，抓住并巧妙地利用题目自身的特点，便有可能获得绝妙的解法。

§1.3　数学方法的特点

数学方法有如下三个显著特点：

1.隐蔽性　数学方法是比较隐蔽的，它不象有些学科使用的试验、观测、统计之类的方法那样具有可见性，如果不经指出，不予总结，人们往往感觉不到它的存在。因此，我们在数学学习或解题中，应当有意识地去发现和总结数学方法。方法积累得越多，解题就越灵活。

2.灵活性　解决数学问题的方法常常不是唯一的。同一个数学问题，往往能设计各种解题思路，采用多种途径去解决。这些思路与方法有繁简之分、拙妙之别。死套某一种数学方法就会使自己的思维受到限制，这种方法也就会失去生命力。只有深刻认识题目的形式(包括结构与特点)，才能获得最优的方法。一题多解常常是获得最优解法的有效途径，这不仅是指可以从不同的方法中去比较优劣，更重要的是培养我们从不同的角度去思考问题的习惯。

3.局限性　任何一种数学方法都不是万能的，都必须受到一定条件的限制，也就是说，它们只能在一定的范围内使用。历史上曾有人作过这样的设想：一切问题转化为数学问题，数学问题再转化为方程问题，最后通过解方程使问题获

解。但这种努力都变成了徒劳。实践证明，这种设想只能是人们的美好愿望，事实上根本办不到，起码目前是这样。因此，我们不能企图寻找万能的“法宝”，而应当扎扎实实地熟悉和掌握各种数学方法，这样才能使我们在解题中左右逢源，永远立于不败之地。

第二章　转化型方法

数学解题的过程是不断转化问题的过程。波利亚在《怎样解题》中强调指出："为了辨明哪一条思路正确，哪一方向可以接近它，我们就要试探各种方向和各种思路，就变更题目。"因为"新题目展现了接触我们以前知识的新的可能性"，"新的题目将重新使我们的兴趣油然而生"，它显露出成功的希望。反之，"我们如果不用'题目的变更'，几乎是不能有什么进展的"。

波利亚所说的"变更题目"，实质上就是转化。转化是数学解题中一种十分重要的思考方法，它反映了认识过程中用已知去认识未知的基本规律。人们总习惯于把陌生的问题转化为熟悉的问题，把复杂的问题转化为简单的问题，把隐晦的问题转化为明朗的问题，把高深的问题转化为浅显的问题。因此，转化是完成数学解题的重要手段。

由于研究的数学问题不尽相同，因而转化的方式也就因题而异。本章中，我们介绍五种常用的转化型方法。

§2.1　化归法

1. 方法简介

化归法是数学家处理问题的一种独特的思维方法。匈牙

利数学家P·罗莎曾对此作过十分形象的描述："假设在你面前有煤气灶、水龙头、水壶和火柴，现在的任务是要烧水，你应该怎样做？"问题很简单，谁都知道"先在水壶中放上水，点燃煤气，再把水壶放到煤气灶上"。接着，罗莎又提出了这样的问题："假设所有的条件都和原来一样，只是水壶中已有了足够的水，这时，你又应该怎样去做？"对于这一问题，人们往往会回答："点燃煤气，再把水壶放到煤气灶上。"但是，罗莎指出，这不是最好的回答，因为"只有物理学家才会这样做，而数学家则会倒去壶中的水，并且声称：我已把后一问题化归成先前的问题了。"

罗莎的比喻固然有点夸张，但却道出了化归的根本特征：在解决一个问题时，人们的眼光并不落在问题的结论上，而是去寻觅、追溯一些熟知的结果，尽管向前走两步也许能达到目的，但我们也情愿退一步回到原来的问题上去，它的基本思维过程如下：

$$\begin{tikzcd} \boxed{\text{问题}} \arrow[r, "\text{化归}"] \arrow[d, dotted] & \boxed{\text{问题}^*} \arrow[d] \\ \boxed{\text{解答}} & \boxed{\text{解答}^*} \arrow[l, "\text{还原}"'] \end{tikzcd}$$

2. 化归途径及应用

化归法的实质就是把未知的问题转化为已经解决了的问题来处理，在具体化归过程中，还必须采用各种不同的化归方式。

（1）命题分割：所谓命题分割就是考察原问题的各种可