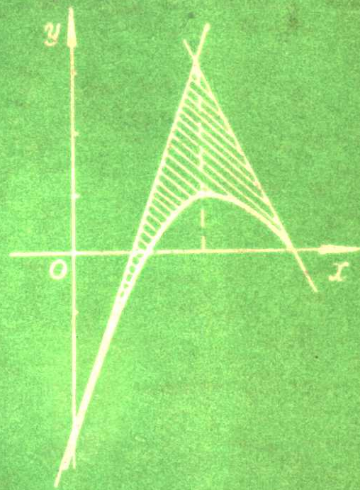
全日制十年制学校高中课本



数学习题解答

（四）

戴再平　田　众

黑龙江科学技术出版社

全日制十年制学校高中课本

数学习题解答

第四册

戴再平　田众

黑龙江科学技术出版社

一九八二年·哈尔滨

出 版 说 明

本书解答了《全日制十年制学校高中课本·数学》第四册（1980年4月第一版，1980年9月第一次印刷）的全部"习题"和"复习题"。

本书解答时严格地以课本相应的基础知识为依据，个别解法如超出课本基础知识的范围都作了说明。对于有多种解法的题列出了各种主要解法。此外，还对课本原题的错误或不妥之处，提出了修正意见。

本书供普通中学、业余中学、职业中学、广播函授中学、部队文化学校数学教师及教学研究人员参考。

全日制十年制学校高中课本
数学习题解答
第四册
戴再平　田众

黑龙江科学技术出版社出版
（哈尔滨市南岗区分部街28号）
佳木斯印刷厂印刷·黑龙江省新华书店发行
开本787×1092毫米1/32·印张7·字数147千字
1982年2月第一版·1982年2月第一次印刷
印数：1—113,000

书号：13217·021　　定价：0.62元
（教师用书）

目　　录

第十章　不定积分

第十一章　定积分及其应用

习 题 一

1. 写出数列一个通项公式，使它的前4项分别是下列各数：

(1) $3,6,9,12$；　(2) $0,-2,-4,-6$；

(3) $\frac{2}{1},\frac{3}{2},\frac{4}{3},\frac{5}{4}$；　(4) $-\frac{1}{2\times1},\frac{2}{2\times2},-\frac{1}{2\times3},\frac{1}{2\times4}$；

(5) $1,\frac{1}{4},\frac{1}{9},\frac{1}{16}$；　(6) $\sqrt[3]{1},-\sqrt[3]{2},\sqrt[3]{3},-\sqrt[3]{4}$。

解 (1) $a_n=3n$。　(2) $a_n=2(1-n)$。

(3) $a_n=\frac{n+1}{n}=1+\frac{1}{n}$。　(4) $a_n=(-1)^n\frac{1}{2n}$。

(5) $a_n=\frac{1}{n^2}$。　(6) $a_n=(-1)^{n-1}\sqrt[3]{n}$。

（说明 一般地说，问题"给出数列的前k项为$a_1,a_2,\cdots,a_k$，求通项公式"如果有解的话，一定有无穷多解，因为若一个通项公式为

$$a_n=f(n)$$

即上式满足$f(1)=a_1,f(2)=a_2,\cdots,f(k)=a_k$ …①

则 $a_n'=f(n)+(n-1)(n-2)\cdots(n-k)g(n)$ …②

也满足条件①，故②也是数列的通项公式，其中$g(n)$是任意的关于n的函数，$g(n)$的定义域为$\{n;n\in N\}$，如本题(1)，令$g(n)=1$，可得另一个通项公式$a_n^1=n^4-10n^3+35n^2-47n+24$）

2. 已知无穷数列 $1\times2, 2\times3, 3\times4, 4\times5, \cdots, n(n+1), \cdots$。

(1) 求这个数列的第 10 项，第 31 项及第48项；

(2) 420 是这个数列中的第几项？

解 (1) $a_{10}=10\times11=110$， $a_{31}=31\times32=992$，

$a_{48}=48\times49=2352$。

(2) 设 $a_n=420$ 则 $n(+1)=420$

即 $n(n+1)=20\times21$ $\therefore$ $n=20$

故 420 是这个数列的第20项.

3. (1) 一个数列的第 1项是1，第 2 项是 2，以后各项由公式 $a_n=a_{n-2}+a_{n-1}$ 给出。写出这个数列的前 10项.

(2) 用上面的数列，通过公式 $b_n=\dfrac{a_n}{a_{n+1}}$，可构造一个新的数列：第 1 项是上面数列中第 1 项与第 2 项的商 $\dfrac{1}{2}$，第 2 项是上面数列中第 2 项与第 3 项的商 $\dfrac{2}{3}$，依此类推，写出这个数列的前10项.

解 (1) $a_1=1$， $a_2=2$，

$a_3=a_2+a_1=2+1=3$，

$a_4=a_3+a_2=3+2=5$，

$a_5=a_4+a_3=5+3=8$，

$a_5=a_4+a_3=8+5=13$，

$a_7=a_6+a_5=13+8=21$，

$a_8=a_7+a_6=21+13=34$，

$a_9=a_8+a_7=34+21=55$，

$a_{10}=a_9+a_8=55+34=89$，

(2) $b_1=\dfrac{a_1}{a_2}=\dfrac{1}{2}$, $\qquad b_2=\dfrac{a_2}{a_3}=\dfrac{2}{3}$,

$b_3=\dfrac{a_3}{a_4}=\dfrac{3}{5}$, $\qquad b_4=\dfrac{a_4}{a_5}=\dfrac{5}{8}$,

$b_5=\dfrac{a_5}{a_6}=\dfrac{8}{13}$, $\qquad b_6=\dfrac{a_6}{a_7}=\dfrac{13}{21}$,

$b_7=\dfrac{a_7}{a_8}=\dfrac{21}{34}$, $\qquad b_8=\dfrac{a_8}{a_9}=\dfrac{34}{55}$,

$b_9=\dfrac{a_9}{a_{10}}=\dfrac{55}{89}$, $\qquad b_{10}=\dfrac{a_{10}}{a_{11}}=\dfrac{a_{10}}{a_9+a_{10}}=\dfrac{89}{144}$.

4．已知一个数列的通项公式是$a_n=-2n+3$。

(1) 计算a_2-a_1，a_3-a_2，a_4-a_3，a_5-a_4；

(2) 计算$a_{n+1}-a_n$；

(3) 这个数列是不是等差数列？它的首项与公差各是多少？

解 (1) $a_2-a_1=-1-1=-2$.

$a_3-a_2=-3-(-1)=-2$.

$a_4-a_3=-5-(-3)=-2$.

$a_5-a_4=-7-(-5)=-2$.

(2) $a_{n+1}-a_n=[-2(n+1)+3]-[-2n+3]$

$=-2n+1+2n-3=-2$.

(3) 这个数列是等差数列，它的首项是1，公差是-2。

5．(1) 一个等差数列的第1项由5.6，第6项是20.6，求它的第4项；

(2) 一个等差数列的第3项是9，第9项是3，求它的第

12项。

解 （1）由$5d=a_6-a_1=20.6-5.6=15$，得$d=3$。

$\therefore\quad a_4=a_1+3d=5.6+3\times3=14.6$.

（2）由 $6d=a_9-a_3=3-9=-6$，得$d=-1$。

$\therefore\quad a_{12}=a_9+3d=3+3(-1)=0$.

6．求下列各组数的等差中项：

（1）647 与 895； （2）-180 与 360；

（3）$\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$与$\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$； （4）$(a+b)^2$与$(a-b)^2$。

解 （1）$A=\dfrac{647+895}{2}=\dfrac{1542}{2}=771$。

（2）$A=\dfrac{-180+360}{2}=\dfrac{180}{2}=90$。

（3）$A=\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}+\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}\right]$

$=\dfrac{1}{2}\left[(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2+(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2\right]$

$=\dfrac{1}{2}[2\times3+2\times2]=3+2=5$.

（4）$A=\dfrac{1}{2}[(a+b)^2+(a-b)^2]=\dfrac{1}{2}[2a^2+2b^2]=a^2+b^2$.

7．（1）下面是全国统一鞋号中成年女鞋的各种尺码（表示鞋底长，单位是厘米）：

21，$21\frac{1}{2}$，22，$22\frac{1}{2}$，23，$23\frac{1}{2}$，24，$24\frac{1}{2}$，25。

这些尺码是否成等差数列？如果是，公差是多少？

（2）全国统一鞋号中成年男鞋共有 14 种尺码，其中最小的尺码是$23\frac{1}{2}$（厘米），各相邻的两个尺码都相差$\frac{1}{2}$厘米，将全部尺码按从小到大的顺序写出来。

解 （1）因为这些尺码所组成的数列，从第 2 项起，每一项与它的前项的差都是$\frac{1}{2}$，所以这些尺码成等差数列，其公差是$\frac{1}{2}$。

（2）$23\frac{1}{2}$，24，$24\frac{1}{2}$，25，$25\frac{1}{2}$，26，$26\frac{1}{2}$，27，$27\frac{1}{2}$，28，$28\frac{1}{2}$，29，$29\frac{1}{2}$，30。

8.（1）在 12 与 60 之间插入 3 个数，使它同这两个数成等差数列；

（2）在 8 与 36 之间插入 6 个数使它们同这两个数成等差数列。

解 （1）由题意，等差数列中 $a_1=12, a_5=60$，

于是 $4d=a_5-a_1=60-12=48$， $\therefore$ $d=12$。

从而 $a_2=a_1+d=12+12=24$，

$a_3=a_2+d=24+12=36$，

$a_4=a_3+d=36+12=48$，

答：所求的三个数为 24，36，48。

（2）由题意，等差数列中 $a_1=8$，$a_8=36$，

于是　$7d=a_8-a_1=36-8=28$，　∴　$d=4$。

从而求得　$a_2=12$，　$a_3=16$，　$a_4=20$，　$a_5=24$，　$a_6=28$，　$a_7=32$。

答：所求的七个数为 12，16，20，24，28，32。

9. 在通常情况下，从地面到1万米高空，高度每增加1千米，气温就下降某一个固定数值．如果1千米高度的气温是8.5°C，5千米高度的气温是−17.5°C，求2千米、4千米及8千米高度的气温．

解　由题意，从地面到1万米高空，高度每增加1千米处的气温组成一个等差数列，设高度每增加1千米，气温就下降k°C，也就是说，这个等差数列的公差为$-k$。又设$a_1=8.5$，　$a_5=-17.5$。

则　$4(-k)=a_5-a_1=-17.5-8.5=-26$，∴　$k=6.5$

于是　$a_2=a_1-k=8.5-6.5=2$，

$a_4=a_1-3k=8.5-3\times6.5=-11$，

$a_8=a_1-7k=8.5-7\times6.5=-37$。

答：2千米、4千米及8千米高度的气温分别为2°C、−11°C、−37°C。

10. 安装在一个公共轴上的5个皮带轮的直径成等差数列，且最大的与最小的皮带轮的直径分别是216毫米与120毫米，求中间三个皮带轮的直径．

解　由题意，5个皮带轮的直径所成的等差数列中

$a_1=120$，　$a_5\times216$，

于是　$4d=a_{15}-a_1=216-120=96$，　∴　$d=24$

从而　$a_2=a_1+d=120+24=144$，

$$a_3 = a_2 + d = 144 + 24 = 168,$$

$$a_4 = a_3 + d = 168 + 24 = 192.$$

答：中间三个皮带轮的直径分别为 144 毫米，168 毫米，192 毫米。

11. 一种车床变速箱的 8 个齿轮的齿数成等差数列，其中首末两个齿轮的齿数分别是24与45，求其余各齿轮的齿数。

解 由题意，8 个齿轮的齿数所成等差数列中$a_1 = 24$，$a_8 = 45$， 于是

$$7d = a_8 - a_1 = 45 - 24 = 21, \quad \therefore \quad d = 3,$$

从而求得 $a_2 = 27$，$a_3 = 30$，$a_4 = 33$，$a_5 = 36$，$a_6 = 39$，$a_7 = 42$.

答：其余各齿轮的齿数分别为 27,30,33,36,39,42.

12. (1) 在正整数集合中有多少个三位数？求它们的和。

(2) 在三位正整数的集合中有多少个数是 7 的倍数？求它们的和。

(3) 求等差数列13,15,17,…,81的各项的和。

(4) 求等差数列 10,7,4,…,−47 的各项的和。

解 (1) 在正整数集合中，最小的三位数是 100，最大的三位数是 999，共有 $999 - 100 + 1 = 900$个，它们的和

$$S_{900} = \frac{1}{2}(999 + 100) \times 900 = 494550.$$

(2) 在三位正整数集合中最小的 7 的倍数是105，最大的 7 的倍数是 994，设 7 的倍数共有 n 个，则

$$994 = 105 + (n - 1) \times 7,$$

由此求得 $n = 128$，

这些 7 的倍数的和

$$S_{128}=\frac{1}{2}(105+994)\times128=70336.$$

(3) $d=2$， ∵ $81=13+(n-1)\times2$， ∴ $n=35$，

$$S_{35}=\frac{1}{2}(13+81)\times2=1645.$$

(4) $d=-3$， ∵ $-47=10+(n-1)\times(-3)$，∴ $n=20$，

$$S_{20}=\frac{1}{2}(10-47)\times20=-370.$$

13．根据下列各组条件，求相应的等差数列的有关未知数：

(1) $a_1=20$，$a_n=54$，$S_n=999$，求d及n；

(2) $d=\frac{1}{3}$，$n=37$，$S_n=629$，求a_1及a_n；

(3) $a_1=\frac{5}{6}$，$d=-\frac{1}{6}$，$S_n=-5$，求n及a_n；

(4) $d=2$，$n=15$，$a_n=-10$，求a_1及S_n．

解 (1) 由$999=\frac{1}{2}(20+54)\cdot n$，得$n=27$．

由 $54=10+(27-1)d$，得$d=\frac{17}{13}$．

(2) 由 $629=37a_1+\frac{36\times37}{2}\times\frac{1}{3}$，得 $a_1=11$，

$$a_n=11+36\times\frac{1}{3}=23.$$

(3) $-5=\frac{5}{6}n+\frac{n(n-1)}{2}\left(-\frac{1}{6}\right)$，

即　$n^2-11n-60=0$，

$(n-15)(n+4)=0$，

由于 n 是自然数，故 $n+4\neq 0$，

从而有　$n-15=0$，　$\therefore$　$n=15$。

$$a_n=\frac{5}{6}+(15-1)(-\frac{1}{6})=-\frac{3}{2}=-1\frac{1}{2}.$$

（4）由　$-10=a_1+(15-1)\times 2$，得　$a_1=-38$。

$$S_{15}=\frac{1}{2}(-38-10)\times 15=-360.$$

14.（1）某等差数列的通项公式是 $a_n=3n-2$，求它的前n项的和的公式。

（2）某等差数列的前n项和的公式是 $S_n=5n^2+3n$，求它的前3项，并求它的通项公式。

解　（1）　$a_1=3-2=1$，

$$S_n=\frac{a_1+a_n}{2}\cdot n=\frac{1+(3n-2)}{2}\cdot n=\frac{1}{2}n(3n-1).$$

（2）$a_1=S_1=5+3=8$，

$a_2=S_2-S_1=5\times 2^2+3\times 2-8=18$，

$a_3=S_3-S_2=5\times 3^2+3\times 3-(18+8)=28$，

$a_n=S_n-S_{n-1}=5n^2+3n-[5(n-1)^2+3(n-1)]$

$=10n-2$。

15. 一个屋顶的某一斜面成等腰梯形，最上面一层铺了瓦片21块，往下每一层多铺一块，斜面上铺了瓦片19层，共铺瓦片多少块；

解　由题意，各层瓦片数组成等差数列，其中

$a_1=21$， $d=1$， $n=19$，

$$\therefore\quad S_{19}=19\times21+\frac{19(19-1)}{2}\times1=570(\text{块})。$$

答：共铺瓦片570块。

16．一个剧场设置了20排座位，第一排有38个座位，往后每一排都比前一排多 2 个座位．这个剧场一共设置了多少个座位？

解　由题意，各排座位数组成等差数列，

其中　$a_1=38$，　$d=2$，　$n=20$．

$$\therefore\quad S_n=20\times38+\frac{20(20-1)}{2}\times2=1140(\text{个})。$$

答：这个剧场一共设置了1140个座位．

17．一个等差数列的第 6 项是 5，第3项与第 8 项的和也是 5．求这个等差数列前 9 项的和．

解　$a_6=a_1+5d=5$，　　…①

$a_3+a_8=(a_1+2d)+(a_1+7d)=2a_1+9d=5$，　…②

由①、②解得　$d=5$，　$a_1=-20$，

$$\therefore\quad S_9=9(-20)+\frac{9\times8}{2}\times5=0.$$

18．三个数成等差数列，它们的和等于18，它们的平方和等于116，求这三个数．

解　设这三个数为$a-d$，　a，　$a+d$．　则

$$\begin{cases}(a-d)+a+(a+d)=18, & \cdots① \\ (a-d)^2+a^2+(a+d)^2=116. & \cdots②\end{cases}$$

由①得　$a=6$，

代入②，整理得　$d^2=4$，　$\therefore$　$d=\pm 2$。

不论取$d=2$ 还是$d=-2$，都可得到三数为4，6，8；

答：所求三个数为4，6，8。

19．某多边形的周长等于158cm，所有各边的长成等差数列，最大的边长等于44cm，公差等于3cm，求多边形的边数。

解　由题意，$S_n=158$，　$a_n=44$，　$d=3$。

于是　$$158=44n-\frac{n(n-1)}{2}\times 3,$$

即　$$3n^2-91n+316=0,$$

$$(3n-79)(n-4)=0,$$

$$\therefore\quad n_1=4,\quad n_2=\frac{79}{3}$$（非整数，舍去）。

答：所求多边形的边数是4。

20．一个梯形两条底边的长分别是12cm与22cm，将梯形的一条腰10等分，去每个分点作平行于梯形底边的直线，求所作的夹在梯形两腰间的所有平行线段的长度的和。

解　由平面几何可知这些夹在梯形两腰间的所有平行线段（由上底到下底，连同两底）的长成等差数列，这个等差数列中有　$n=11$，　$a_1=12$，　$a_{11}=22$，

$$\therefore\quad S_{11}=\frac{1}{2}(12+22)\times 11=187,$$

$$187-(12+22)=153.$$

答：夹在梯形两腰间的所有平行线段的长度的和为153cm。

P23

习 题 二

1. 一个数列的通项公式是$a_n=\frac{3}{8}\times 2^n$。

(1) 计算$\frac{a_2}{a_1}$，$\frac{a_3}{a_2}$，$\frac{a_4}{a_3}$，$\frac{a_5}{a_4}$；

(2) 计算$\frac{a_n+1}{a_n}$；

(3) 这个数列是不是等比数列？它的首项与公比各是多少？

解 (1) $\frac{a_2}{a_1}=\frac{\frac{3}{8}\times 2^2}{\frac{3}{8}\times 2^1}=2$，　$\frac{a_3}{a_2}=\frac{\frac{3}{8}\times 2^3}{\frac{3}{8}\times 2^2}=2$，

$\frac{a_4}{a_3}=\frac{\frac{3}{8}\times 2^4}{\frac{3}{8}\times 2^3}=2$，　$\frac{a_5}{a_4}=\frac{\frac{3}{8}\times 2^5}{\frac{3}{8}\times 2^4}=2$。

(2) $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{\frac{3}{8}\times 2^{n+1}}{\frac{3}{8}\times 2^n}=2$。

(3) 这个数列是等比数列，它的首项是$\frac{3}{4}$，公比是2，

2. 在等比数列中：

(1) $a_4=27$，$q=-3$，求a_7；