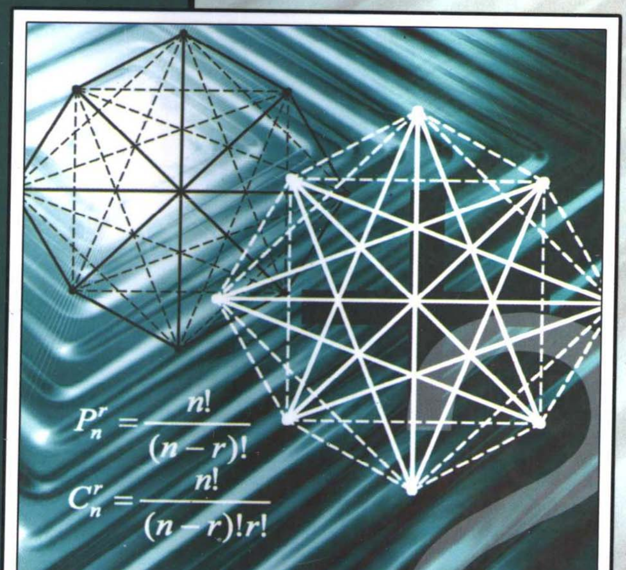
研究生系列教材

组合数学

姜建国
岳建国



$$P_n^r = \frac{n!}{(n-r)!}$$

$$C_n^r = \frac{n!}{(n-r)!r!}$$

西安电子科技大学出版社
http://www.xduph.com

研究生系列教材

组 合 数 学

姜建国　岳建国

西安电子科技大学出版社

内 容 简 介

计算机科学的核心问题之一是算法的研究，而组合算法是算法的重要组成部分. 组合数学构成了组合算法的理论基础.

本书共6章，以组合计数为重点，介绍了组合数学的基本原理和思想方法，包括组合数学基础、母函数及其应用、递推关系、容斥原理、抽屉原理和瑞姆赛(Ramsey)理论、波利亚(Pólya)定理等.

本书叙述详尽，由浅入深，层次分明，书中配有大量的实例和难易程度不同的习题.

本书为研究生教材，可用于计算机、应用数学和通信等专业，也可作为相关专业的教学、科研和工程技术人员的教材或参考书.

图书在版编目(CIP)数据

组合数学/姜建国，岳建国. —西安：西安电子科技大学出版社，2003.9

(研究生系列教材)

ISBN 7-5606-1285-7

Ⅰ. 组… Ⅱ. ①姜… ②岳… Ⅲ. 组合数学—研究生—教材 Ⅳ. O157

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 060521 号

责任编辑 夏大平

出版发行 西安电子科技大学出版社(西安市太白南路 2 号)

电　　话 (029)8242885　8201467　　邮　编 710071

http://www.xduph.com　　E-mail: xdupfxb@pub.xaonline.com

经　　销 新华书店

印　　刷 中铁一局印刷厂

版　　次 2003年9月第1版　2003年9月第1次印刷

开　　本 787毫米×1092毫米　1/16　印张 10.25

字　　数 237千字

印　　数 1～4 000册

定　　价 13.00元

ISBN 7-5606-1285-7/O·0067(课)

XDUP 1556001－1

前　言

组合数学是既古老而又年轻的数学分支，它的渊源可以追溯到公元前2200年的大禹治水时代，中外历史上许多著名的数学游戏是它古典部分的主要内容．公元1666年，德国著名数学家莱布尼兹为它起名为“组合学”(Combinatorics)，并预言了这一数学分支的诞生．1940年以来，特别是近年来，随着电子计算机科学、计算数学、通信以及许多学科的发展，组合数学这门历史悠久的学科得到了迅速发展．

计算机的运行需要编程来控制，然而编程的基础往往是求解问题的组合学算法．组合数学主要研究离散对象的安排或配置方案的存在性、计数、枚举构造和优化问题等．

组合方法的实质就在于寻找一一对应，而对应的方法可以借助不同的工具，从而形成与其它学科的交叉．对组合问题来说，工具的选取是很重要的．当用计算机解决某个问题且有多种算法可供选择时，就要考虑算法的复杂度问题．衡量时间复杂度的一个重要指标就是算法的运算次数，即求出在最坏情况下的运算次数或按概率分布的平均运算次数．而衡量空间复杂度的主要指标就是所占用的存储空间大小．为此，就要用到组合数学的方法和技巧．因此，国内外不少高校都把组合数学作为计算机学科各专业的一门基础理论课程．

组合数学不仅在计算机、人工智能、过程控制和空间技术等新兴学科技术中有着重要的应用，而且在一些看似与数学关系不大的社会科学中也得到越来越广的应用．因此，组合数学的思想和方法越来越受到人们普遍的重视．

组合数学的特点是内容上丰富多彩，方法上巧妙多变，它对培养学生的思维才智和解决实际问题的能力起到了良好的作用．

本书内容包括组合数学基础、母函数及其应用、递推关系、容斥原理、抽屉原理和瑞姆赛(Ramsey)理论、波利亚(Pólya)定理等．

本书具有如下几个显著特点：

1. 紧密结合研究生教学实际和教学大纲。在内容编排上力求深入浅出，从具体到一般，先应用后理论，大量举例，并配置了大量习题。

2. 考虑到近几年全国在职人员申请硕士学位考试的要求和特点。在撰写本书时，力求叙述条理清楚，深化基础知识，突出数学能力的培养和提高。

3. 注重教学思想方法的渗透和解题水平的提高。拾众家之所长，精选大量题目，使例题和习题新颖有趣、典型且具有代表性。讲解例题时，重视对解题思路的分析，有利于提高读者独立分析问题和解决问题的能力。

4. 内容安排合理、新颖．本书在撰写时，参阅了国内外大量的相关资料，并凝聚了作者近10年来从事研究生、本科生“组合数学”课程教学的体会，力求内容新，取舍、繁简得当。

本书是在西安电子科技大学校内讲义《组合数学》的基础上编写而成的。原讲义经过多

年的试用，这次正式出版，吸取了老师和同学们大量的意见，进行了修改、补充与完善。

本书在编写过程中，西安工程科技学院(原西北纺织工学院)院长、洪堡学者、教授姜寿山博士提出了许多建设性意见，特表示感谢．姜博士与我们合作，完成了《组合数学——方法与应用》一书，成为本书的姊妹作，作为研究生配套教材，正在校内使用，待修订完善后，予以正式出版．

此书承蒙西安建筑科技大学马光思同志审稿，在此表示感谢。

由于作者水平有限，书中缺点和错误在所难免，故恳请读者批评指正．

本书出版得到西安电子科技大学研究生教材建设基金的支持。

姜建国　岳建国

2003 年 3 月于西安电子科技大学

目　录

第一章　组合数学基础

1.1　绪　　论

组合数学起源于数学游戏. 例如幻方问题：给定自然数 1，2，…，n^2，将其排列成 n 阶方阵，要求每行、每列和每条对角线上 n 个数字之和都相等. 这样的 n 阶方阵称为 n 阶幻方. 每一行(或列、或对角线)之和称为幻和. 图 1.1.1 是一个 3 阶幻方，其幻和等于 15. 首先，人们要问：

8	1	6
3	5	7
4	9	2

图 1.1.1　3 阶幻方

(1) 存在性问题：即 n 阶幻方是否存在？

(2) 计数问题：如果存在，对某个确定的 n，这样的幻方有多少种？

(3) 构造问题：即枚举问题，亦即如何构造 n 阶幻方？

【例 1.1.1】 36 名军官问题：有 1，2，3，4，5，6 共六个团队，从每个团队中分别选出具有 A、B、C、D、E、F 6 种军衔的军官各一名，共 36 名军官. 问能否把这些军官排成 6×6 的方阵，使每行及每列的 6 名军官均来自不同的团队且具有不同军衔？

本问题的答案是否定的.

【例 1.1.2】 用 3 种颜色红(r)、黄(y)、蓝(b)涂染平面正方形的四个顶点，若某种染色方案在正方形旋转某个角度后，与另一个方案重合，则认为这两个方案是相同的. 例如，对图 1.1.2 的涂染方案(a)，当正方形逆时针旋转 90°时就变为方案(b)，因此，在正方形可旋转的前提下，这两种方案实质上是一种方案. 那么，我们要问：不同的染色方案共有多少种？

r	y
b	b

(a)

y	b
r	b

(b)

图 1.1.2　正方形的顶点染色

染色方案的存在性是不可争议的，而且可知共有 $3^4=81$ 种方案，问题是要计算不同的染色方案，显然属于计数问题. 后面将会看到，在旋转条件下，不同的染色方案总数为

$$L=\frac{1}{4}(3^4+3^2+2\times 3)=24$$

【例 1.1.3】 不同身高的 26 个人随意排成一行，那么，总能从中挑出 6 个人，让其出列后，他们的身高必然是由低到高或由高到低排列的.

计算机科学中涉及的算法大致可分为两类. 第一类是计算方法，它主要解决数值计算

问题，如方程求根、解方程组、求积分等，其数学基础是高等数学与线性代数. 第二类是组合算法，它解决搜索、排序、组合优化等问题，其数学基础就是组合数学.

按所研究问题的类型，组合数学所研究的内容可划分为：组合计数理论、组合设计、组合矩阵论和组合优化. 本书将以组合计数理论为主，部分涉及其它内容.

组合学问题求解的方法大致可以分为两类. 一类是从组合学基本概念、基本原理出发解题的所谓常规法，例如，利用容斥原理、二项式定理、波利亚(Pólya)定理解计数问题；解递推关系的特征根方法、母函数方法；解存在性问题的抽屉原理等. 另一类方法则不同，它们通常与问题所涉及的组合学概念无关，而对多种问题均可使用. 常用的有：

(1) **数学归纳法**.

(2) **迭代法**. 例如已知数列$\{h_n\}$满足关系$\begin{cases} h_n=2h_{n-1}+1 \\ h_1=1 \end{cases}$，求$h_n$的解析表达式.

直接迭代即得

$$\begin{aligned} h_n &= 2(2h_{n-2}+1)+1 \\ &= 2^2h_{n-2}+2+1 \\ &= 2^2(2h_{n-3}+1)+2+1 \\ &= 2^3h_{n-3}+2^2+2+1 \\ &\vdots \\ &= 2^{n-1}h_1+2^{n-2}+2^{n-3}+\cdots+2^2+2+1 \\ &= 2^n-1 \end{aligned}$$

(3) **一一对应技术**. 这是组合数学理论常用的一个计数技巧. 其原理就是建立两个事物之间的一一对应关系，把一个较复杂的组合计数问题 A 转化成另一个容易计数的问题 B，从而利用对 B 的计数运算达到对 A 的各种不同方案的计数. 它的应用是多方面的，在组合学中最常见的是利用它将问题的模式转化为一种已经解决的问题模式.

(4) **殊途同归方法**. 即从不同角度讨论计数问题，以建立组合等式，尤其是在组合恒等式的证明中，故也称组合意义法.

(5) **数论方法**. 特别是利用整数的奇偶性、整除性等数论性质进行分析推理的方法.

本书用的较多的是方法(3)与(4)，关于组合意义法，将在 1.4 节中详细介绍. 此处先给出一一对应技术的两个实例，以体会该方法的巧妙之处.

【例 1.1.4】 有 100 名选手参加羽毛球比赛，如果采用单循环淘汰制，问要产生冠军共需要进行多少场比赛?

解 因为采用的是单循环淘汰制，所以每两名选手比赛产生一个失败者，且每个失败者只能失败一次. 因此，失败的人数与比赛场数之间一一对应，计算比赛场数问题转化为计算失败人数问题. 后者的解显然是 99 人，故应该比赛 99 场.

【例 1.1.5】 设某地的街道将城市分割成矩形方格，某人在其住处 $A(0, 0)$的向东 7 个街道、向北 5 个街道的大厦 $B(7, 5)$处工作(见图 1.1.3)，按照最短路径(即只能向东或向北走)，他每次上班必须经过某 12 个街道，问共有多少种不同的上班路线?

解 将图中所有街区抽象为大小一样的矩形，其东西方向的长为 x，南北方向的长为 y. 从 $A(0, 0)$点出发，向东走一段为 x，向北走一段为 y. 那么不管怎么走，从 A 点出发，

总是要经过 7 个 x，5 个 y，方能到达 B 点. 所以，一条从 A 到 B 的路线对应一个由 7 个 x，5 个 y 共 12 个元素构成的排列. 反之，给定一个这样的排列，按照 x、y 的含义，必对应一条从 A 到 B 的行走路线. 例如，排列

$$x\ y\ y\ y\ y\ x\ x\ y\ x\ x\ x\ x$$

对应的路线为：由 A 点出发，先向东走一段街道，再向北走 4 个街道，又转向东走 2 个街道，再向北走 1 个街道，最后再向东走 4 个街道，即到达目的地 B.

所以，从 $A(0, 0)$到 $B(7, 5)$的最短路径与 7 个 x，5 个 y 的排列一一对应. 故所求的上班路线数为

$$N = C_{7+5}^{5} = C_{12}^{5} = \frac{12!}{5!\cdot 7!} = 792$$

一般来说，从$(0,0)$点到达(m,n)点的不同的最短路径数为

$$N = C_{m+n}^{m}$$

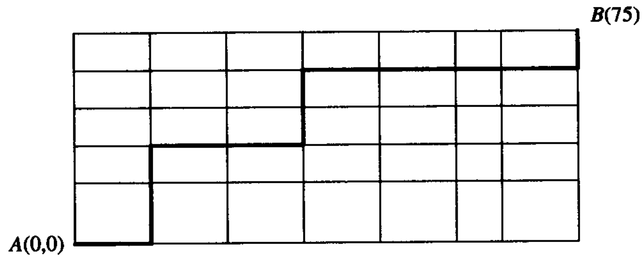


图 1.1.3　最短路径

1.2　两个基本法则

1.2.1　加法法则

加法法则　如果完成一件事情有两个方案，而第一个方案有 m 种方法，第二个方案有 n 种方法可以实现，只要选择任何方案中的某一种方法，就可以完成这件事情，并且这些方法两两互不相同，则完成这件事情共有 $m+n$ 种方法.

若用集合语言，加法法则可以描述为：设有限集合 A 有 m 个元素，B 有 n 个元素，且 A 与 B 不相交，则 A 与 B 的并共有 $m+n$ 个元素.

也可以从概率论角度描述为：设事件 A 有 m 种产生方式，事件 B 有 n 种产生方式，则事件"A 或 B"有 $m+n$ 种产生方式. 当然，A 与 B 各自所含的基本事件是互相不同的.

【例 1.2.1】　某班有男生 18 人，女生 12 人，从中选出一名代表参加会议，问共有多少种选法？

解　用集合 A 表示男生，B 表示女生，则该班中的学生要么属于 A，要么属于 B. 根据加法法则，全班共有 18+12=30 个学生，故有 30 种选法.

【例 1.2.2】　用一个小写英文字母或一个阿拉伯数字给一批机器编号，问总共可能编出多少种号码？

解　英文字母共有 26 个，数字 0～9 共 10 个，由加法法则，总共可以编出 26+10=36

个号码.

1.2.2 乘法法则

乘法法则 如果完成一件事情需要两个步骤，而第一步有 m 种方法、第二步有 n 种方法去实现，则完成该件事情共有 $m \cdot n$ 种方法.

乘法法则也可以用集合语言描述为：设有限集合 A 有 m 个元素，B 有 n 个元素，$a \in A$，$b \in B$，记(a,b)为一有序对. 所有有序对构成的集合称为 A 和 B 的积集(或笛卡儿乘积)，记作 $A \times B$. 那么，$A \times B$ 共有 $m \cdot n$ 个元素.

同理，读者不难从概率论角度理解乘法法则.

【例 1.2.3】 仍设某班有男生 18 人，女生 12 人，现要求从中分别选出男女生各一名代表全班参加比赛，问共有多少种选法?

解 仍像例 1.2.1 那样，用集合 A 表示男生，B 表示女生，那么，根据乘法法则，共有 $18 \times 12 = 216$ 种选法.

【例 1.2.4】 给程序模块命名，需要用 3 个字符，其中首字符要求用字母 $A \sim G$ 或 $U \sim Z$，后两个要求用数字 $1 \sim 9$，问最多可以给多少种程序命名?

解 首先，由加法法则，首字符共有 $7+6=13$ 种选法. 其次，再由乘法法则，最多可以产生 $13 \times 9 \times 9 = 1053$ 个不同的名称.

【例 1.2.5】 从 A 地到 B 地有 n_1 条不同的道路，从 A 地到 C 地有 n_2 条不同的道路，从 B 地到 D 地有 m_1 条不同的道路，从 C 地到 D 地有 m_2 条不同的道路，那么，从 A 地经 B 或 C 到达目的地 D 共有多少种不同的走法?

解 首先，由乘法法则，从 A 地经 B 到达 D 地共有 $n_1 \times m_1$ 种走法，由 A 经 C 到达 D 共有 $n_2 \times m_2$ 种走法，再由加法法则知，从 A 地经 B 或 C 到达 D 地共有 $n_1m_1 + n_2m_2$ 种不同的走法.

1.3 排列与组合

1.3.1 相异元素不允许重复的排列数和组合数

从 n 个相异元素中不重复地取 r 个元素的排列数和组合数在中学已经学过，它们分别为：

$$P_n^r = P(n,r) = n(n-1)\cdots(n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!} \tag{1.3.1}$$

$$C_n^r = C(n,r) = \binom{n}{r} = \frac{P_n^r}{r!} = \frac{n!}{(n-r)!r!} \tag{1.3.2}$$

相异元素不允许重复的排列问题也可以描述为：将 r 个有区别的球放入 n 个不同的盒子，每盒不超过一个，则总的放法数为 $P(n,r)$. 同样，若球不加区别，则有 $C(n,r)$种放法. 这就是排列与组合的数学模型.

1.3.2 相异元素允许重复的排列

从 n 个不同元素中允许重复地选 r 个元素的排列，简称 **r 元重复排列**. 其排列的个数

记为 $RP(\infty,r)$. 其对应的模型是将 r 个不相同的球放入 n 个有区别的盒子，每个盒子中的球数不加限制而且同盒的球不分次序.

显然，这样的排列数 $RP(\infty,r)=n^r$.

从集合的角度理解，问题也可以描述为：设集合 $S=\{\infty\cdot e_1,\infty\cdot e_2,\cdots,\infty\cdot e_n\}$，即 S 中共含有 n 类元素，每个元素有无穷多个，从 S 中取 r 个元素的排列数即为 $RP(\infty,r)$.

1.3.3　不尽相异元素的全排列

设 $S=\{n_1\cdot e_1,n_2\cdot e_2,\cdots,n_t\cdot e_t\}$，即元素 a_i 有 n_i 个($i=1,2,\cdots,t$)，且 $n_1+n_2+\cdots+n_t=n$，则此 n 个元素的全排列数为

$$RP(n,n)=\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_t!}\tag{1.3.3}$$

关于不尽相异元素的部分排列与组合问题，将在本书后边母函数的应用中进行详细讨论.

1.3.4　相异元素不允许重复的圆排列

【例 1.3.1】　把 n 个有标号的珠子排成一个圆圈，共有多少种不同的排法？

解　这是典型的圆排列问题. 对于围成圆圈的 n 个元素，同时按同一方向旋转，即每个元素都向左(或向右)转动一个位置，虽然元素的绝对位置发生了变化，但相对位置未变，即元素间的相邻关系未变，这样的圆排列认为是同一种，否则便是不同的圆排列. 下面从两种角度推导圆排列数的计算公式.

方法一：先令 n 个相异元素任意排成一行(称为**线排列**)，共有 $n!$ 种排法，再将其首尾相接围成一圆，当圆转动一个角度时，对应另一个线排列，当每个元素又转回到原先的位置时，相当于 n 个不同的线排列，故圆排列数为

$$CP(n,n)=\frac{P(n,n)}{n}=(n-1)!\tag{1.3.4}$$

方法二：先取出某一元素 k，放于圆上某确定位置，再令余下的 $n-1$ 个元素作成一个线排列，首尾置于 k 的两侧构成一个圆排列同样可得到 $CP(n,n)=(n-1)!$.

【例 1.3.2】　从 n 个相异元素中不重复地取 r 个围成圆排列，求不同的排列总数 $CP(n,r)$.

解　要完成这个圆排列，需先从 n 个元素中取 r 个，再将其组成圆排列，故

$$CP(n,r)=\frac{P(n,r)}{r}=\frac{n!}{r(n-r)!}\tag{1.3.5}$$

【例 1.3.3】　将 5 个标有不同序号的珠子穿成一环，共有多少种不同的穿法？

解　这是典型的**项链排列**问题. 首先，由例 1.3.1 知，5 个相异元素的圆排列共有 $(5-1)!=24$ 种. 其次，对于圆排列而言，将所穿的环翻过来，是另一种圆排列，但对于项链排列，这仍然是同一个排列(如图 1.3.1 所示)，故不同的排法共有 $24/2=12$ 种.

一般情形，从 n 个相异珠子中取 r 个穿成一个项链，共有

$$\frac{P(n,r)}{2r}=\frac{n!}{2r(n-r)!}\tag{1.3.6}$$

种不同的穿法.

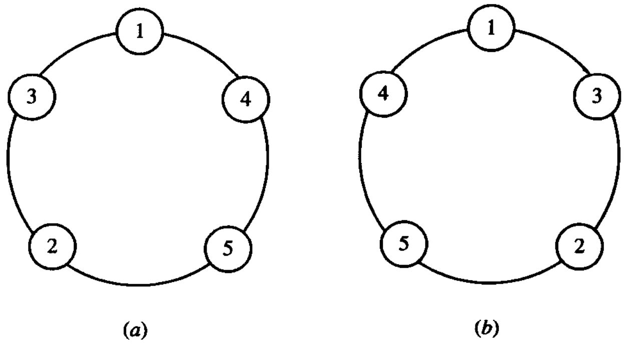


图 1.3.1 项链排列

至于允许重复的圆排列问题，情况将变得非常复杂，请参见反演公式相关内容.

1.3.5 相异元素允许重复的组合问题

设 $S=\{\infty\cdot e_1, \infty\cdot e_2, \cdots, \infty\cdot e_n\}$，从 S 中允许重复地取 r 个元素构成组合，称为 r 可重组合，其组合数记为 $\mathrm{RC}(\infty,r)$.

将 S 的 n 个不同元素分别用数字 1，2，…，n 来表示，那么，所取出的 r 个元素从小到大设为 a_1，a_2，… a_r，则 a_i 满足：

$$1\leqslant a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots\leqslant a_r\leqslant n$$

令 $b_i=a_i+(i-1)$，$i=1, 2, \cdots, r$，则

$$1\leqslant b_1<b_2<\cdots<b_r\leqslant n+(r-1)$$

对应一个从 $n+r-1$ 个相异元素中不允许重复地取 r 个元素的组合. 反之，后者的一种组合也与前者的一种组合相对应. 所以，两种组合一一对应. 从而

$$\mathrm{RC}(\infty,r)=C(n+r-1, r)=\frac{(n+r-1)!}{r!\ (n-1)!} \tag{1.3.7}$$

重复组合的模型是将 r 个无区别的球放入 n 个不同的盒子，每个盒子的球数不受限制.

【例 1.3.4】 不同的 5 个字母通过通信线路被传送，每两个相邻字母之间至少插入 3 个空格，但要求空格的总数必须等于 15，问共有多少种不同的传送方式?

解 5 个字母的全排列数为 $P(5,5)=5!$. 对每一排列，按照位置先后的不同而有 4 个相异的间隔. 先将 12 个空格均匀地放入 4 个间隔内，再将余下的 3 个(相同的)空格插入 4 个(不同的)间隔，其方案数即为从 4 个相异元素中可重复地取 3 个元素的组合数 $\mathrm{RC}(\infty,3)=C(4+3-1, 3)=20$. 故总的传送方式有 $5!\cdot 20=2400$ 种.

1.3.6 不尽相异元素任取 r 个的组合问题

设集合 $S=\{n_1\cdot e_1, n_2\cdot e_2, \cdots, n_t\cdot e_t\}$，$n_1+n_2+\cdots+n_t=n$，从 S 中任取 r 个，求其组合数 $\mathrm{RC}(n,r)$.

本问题比较复杂，这里只给出简单的结论和一个例子，一般的计算将在母函数的应用中详细讨论.

设多项式

$$\prod_{i=1}^{t}\sum_{j=0}^{n_i} x^j = \prod_{i=1}^{t}(1+x+x^2+\cdots+x^{n_i}) = \sum_{r=0}^{n} a_r x^r$$

则 RC(n,r)就是多项式中 x^r 的系数，即

$$\mathrm{RC}(n,\ r) = a_r$$

【例 1.3.5】 整数 360 有几个正约数？

解 分解 360 为素因子的幂的乘积

$$360 = 2^3 \times 3^2 \times 5$$

显然，360 的正约数有

$$1 = 2^0 \times 3^0 \times 5^0,\ 2,\ 3,\ 5,\ 2^2,\ 2\times 3 = 3\times 2,\ \cdots,\ 2^3\times 3^2\times 5 = 360$$

即从集合 $S=\{3\cdot 2,\ 2\cdot 3,\ 1\cdot 5\}$的 6 个元素中任取 0 个、1 个、……、6 个的组合数之和．亦即多项式

$$(1+x+x^2+x^3)(1+x+x^2)(1+x) = 1+3x+5x^2+6x^3+5x^4+3x^5+x^6$$

中各项系数之和．所以

$$\sum_{i=0}^{6}\mathrm{RC}(6,i) = 1+3+5+6+5+3+1 = 24$$

而更简单的办法是多项式

$$P_6(x) = (1+x+x^2+x^3)(1+x+x^2)(1+x)$$

的系数之和实质上就是 $P_6(1)$．所以

$$\sum_{i=0}^{6}\mathrm{RC}(6,i) = 4\times 3\times 2 = 24$$

进一步观察，还可知正整数 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$ 的约数个数为

$$(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\cdots(\alpha_k+1)$$

1.4　组合等式及其组合意义

组合等式的证明方法大致可归纳为以下三种：归纳法、母函数法和组合意义法．本节只介绍几种简单且最基本的组合恒等式，并着重用组合意义法证明之．所谓组合意义法，是指借助于阐明等号两端的不同表达式实质上是同一个组合问题的方案数，只是按照不同的途径进行统计而得(即殊途同归法)，或者虽是两个不同组合问题的方案数，但二者的组合方案之间存在着一一对应关系，因此等式两端必须相等，从而达到证明等式成立的目的．母函数法虽然是产生和证明组合恒等式的普遍方法，但组合意义法却对于恒等式的实质揭露的更为深刻，因此更值得重视和学习．下边如不特别声明，从 n 个元素中取 r 个的组合都是指不重复的组合．

等式 1　对称关系式

$$C(n,r) = C(n,n-r) \tag{1.4.1}$$

组合意义　从 n 个元素$\{a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n\}$中取走 r 个，必然余下 $n-r$ 个，故从 n 取 r 的组合与从 n 取 $n-r$ 的组合一一对应．

等式 2　加法公式

$$C(n,r)=C(n-1,r)+C(n-1,r-1) \tag{1.4.2}$$

组合意义　从 n 个元素 $\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ 中取 r 个组合，就其中某个元素，不妨设为 a_1 来看，全体组合可分为两类：

(1) 每次取出的 r 个元素中都含有 a_1. 这一类组合可视为从剩下的 $n-1$ 个元素中任取 $r-1$ 个元素，然后再加上 a_1 而构成的组合，其组合数为 $C(n-1, r-1)$.

(2) 不含元素 a_1. 这类组合可视为从其余 $n-1$ 个元素中任取 r 个元素的组合，其数目为 $C(n-1, r)$.

两类情况互不重复，由加法法则，式(1.4.2)成立.

例如，从{1，2，3，4，5}中取 3 个的组合情况为：

第一类(包含元素“1”)：123，124，125，134，135，145

第二类(不包含元素“1”)：234，235，245，345

加法公式(1.4.2)的等价形式是

$$C(m+n, m)=C(m+n-1, m)+C(m+n-1, m-1) \tag{1.4.3}$$

其组合意义可以解释为从(0，0)点到 (m, n) 点的路径数等于从(0，0)点分别到 $(m, n-1)$ 点和 $(m-1, n)$ 点的路径数之和. 因为从(0，0)到 (m, n)，要么经过 $(m, n-1)$ 到达 (m, n)，要么经过 $(m-1, n)$ 到达 (m, n)，而后二者到达 (m, n) 只需要一步，故得式(1.4.3).

等式 3　乘法公式

$$C(n, k)\, C(k, r)=C(n, r)\, C(n-r, k-r) \tag{1.4.4}$$

组合意义　这是一个在组合算式的推导中经常使用的恒等式. 考虑等式

$$C(n, n-k)\, C(k, k-r)\, C(r, r)=C(n, r)\, C(n-r, n-k)\, C(k-r, k-r) \tag{1.4.5}$$

其左端是组合问题“将 n 个元素分为 3 堆，要求第一堆有 $n-k$ 个元素，第二堆有 $k-r$ 个，那么，第三堆就只有 r 个元素”的组合方案数. 其右端是另一个类似的组合问题“将 n 个元素分为 3 堆，要求第三堆有 r 个元素，第二堆有 $n-k$ 个，第一堆有 $k-r$ 个元素”的组合方案数. 而这两个组合问题等价，故其方案数亦相等，即等式(1.4.5)成立.

再将对称关系式(1.4.1)代入式(1.4.5)并整理即得式(1.4.4).

等式 4

$$\begin{aligned}C(n+r+1, r)&=\sum_{i=0}^{r} C(n+i, i)\\&=C(n+r, r)+C(n+r-1, r-1)\\&\quad+C(n+r-2, r-2)+\cdots+C(n, 0)\end{aligned} \tag{1.4.6}$$

或

$$\begin{aligned}C(n+r+1, r)&=\sum_{i=0}^{r} C(n+i, n)\\&=C(n+r, n)+C(n+r-1, n)\\&\quad+C(n+r-2, n)+\cdots+C(n, n)\end{aligned} \tag{1.4.7}$$

组合意义　从 $n+r+1$ 个元素 $\{a_1, a_2, \cdots, a_{n+r+1}\}$ 中取 r 个的组合情况，不外乎以下 $r+1$ 种：

(1) 将所有组合针对 a_1 分为两类：即所取 r 个元素中含元素 a_1 或不含元素 a_1，考虑不含元素 a_1 的情形，这相当于从 $n+r$ 个元素 $\{a_2, a_3, \cdots, a_{n+r+1}\}$ 中取 r 个的组合，其组合数为 $C(n+r, r)$；

(2) 仿照(1)，再将含有元素 a_1 的所有组合针对 a_2 分为两类：即所取 r 个元素中含 a_2 或不含 a_2，同样考虑不含 a_2 的情形，这又相当于从除去 a_1、a_2 后的 $n+r-1$ 个元素 $\{a_3, a_4, \cdots, a_{n+r+1}\}$ 中取 $r-1$ 个，再加上 a_1 而构成组合，其组合数为 $C(n+r-1, r-1)$；

(3) 同法，$r-1$ 组合中含元素 a_1、a_2，但不含 a_3 的组合数为 $C(n+r-2, r-2)$；

⋮

r 组合中含元素 a_1、a_2、……、a_{r-1}，但不含 a_r 的组合数为 $C(n+1, 1)$；

$r+1$ 组合中含元素 a_1、a_2、……、a_r 的组合数为 $C(n+1, 0)=C(n, 0)$.

各类情形的组合方案互不重复，将其求和即得式(1.4.6).

将组合等式(1.4.1)代入式(1.4.6)即得式(1.4.7).

实际上，组合等式 3 是等式 2 的推广，等式 2 只是将 r 组合分为两类，而等式 3 则是分为 $r+1$ 类来考虑问题的.

等式 5　范德蒙(Vandermonde)恒等式

$$\begin{aligned}\binom{m+n}{r} &= \sum_{i=0}^{r}\binom{n}{i}\binom{m}{r-i} \\ &= \binom{n}{0}\binom{m}{r}+\binom{n}{1}\binom{m}{r-1}+\cdots+\binom{n}{r}\binom{m}{0}, \quad r\leqslant \min(m,n)\end{aligned} \tag{1.4.8}$$

组合意义　现有 n 个相异的红球，m 个相异的蓝球，从 $n+m$ 个球中取 r 个的组合，其结果必是下列情形之一：有 i 个红球，$r-i$ 个蓝球($i=0, 1, \cdots, r$). 对固定的 i，应有 $C(n,i)C(m,r-i)$ 种选法. 然后按照加法法则对 i 求和就得式(1.4.8).

特例　当 $m=r$ 时，有

$$\binom{n+r}{r} = \sum_{i=0}^{r}\binom{n}{i}\binom{r}{i} = \binom{n}{0}\binom{r}{0}+\binom{n}{1}\binom{r}{1}+\cdots+\binom{n}{r}\binom{r}{r}, \quad r\leqslant n \tag{1.4.9}$$

这只要在式(1.4.8)中令 $m=r$，并利用对称关系式 $C(r, r-i)=C(r, i)$ 即得式(1.4.9).

等式 6　和式公式

$$\sum_{i=0}^{n} C(n,i) = 2^n \tag{1.4.10}$$

组合意义　对 n 个元素而言，每一个元素都有“取”与“不取”两种可能，并由此构成所有状态. 根据乘法法则，其总数为 2^n. 它等于从 n 个元素中分别取 0 个，1 个，……，n 个元素的总组合数.

等式 7

$$\binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\binom{n}{2}-\cdots+(-1)^n\binom{n}{n}=0 \tag{1.4.11}$$

组合意义　n 个元素中取 r 个组合，r 为奇数的组合数目等于 r 为偶数的组合数(包括 $r=0$).

只要在 r 为奇数的组合与 r 为偶数的组合之间建立起一一对应的关系就等于证明了这个等式. 为此，从 n 个元素中任意取定某一个元素 a，所有 r 组合可以分为含有 a 和不含 a 两类. 设 r 为奇数($r\geqslant 1$)，若某个组合中含有元素 a，则去掉 a 后就得一个 $r-1$ 为偶数的组合，例如 3 组合 abc，去掉 a 便得 2 组合 bc；若该组合不含元素 a，则给其加上 a 便构成一个 $r+1$ 也为偶数的组合，例如 3 组合 bcd，加入 a 便得 4 组合 $abcd$. 反之，设 r 为偶数($r\geqslant 0$)，同样可将相应的组合通过去掉 a 或加上 a 而对应唯一的一个奇数组合. 从而说明两者是一一对应的，证毕.

例如，有 4 个元素 a，b，c，d，设 $\varnothing$ 为取 0 个元素的空组合，则所有组合情形如表 1.4.1 所示，其中同一列的两个组合符合上述对应关系，前 4 列为在第一行的奇数组合中去掉 a 而得到第二行的偶数组合，后 4 列则为加入 a 的情形.

表 1.4.1 组合情形表

r 为奇数的组合	a	abc	abd	acd	b	c	d	bcd
r 为偶数的组合	$\varnothing$	bc	bd	cd	ab	ac	ad	$abcd$

等式 8

$$(C_n^1)^2+2(C_n^2)^2+\cdots+n(C_n^n)^2=nC_{2n-1}^{n-1} \tag{1.4.12}$$

组合意义 从 n 名先生、n 名太太中选出 n 人，这 n 人中有一人担任主席，并且必须为太太，考虑有多少种选法.

一方面，先选一名太太任主席有 $C_n^1=n$ 种方法，再从其余的 $2n-1$ 人中选 $n-1$ 人有 C_{2n-1}^{n-1}种方法. 所以共有 nC_{2n-1}^{n-1}种选法.

另一方面，对于 $k=1,2,\cdots,n$，先从 n 名太太中选出 k 人，并从 k 人中选一人任主席，有 kC_n^k 种方法，然后再从 n 名先生中选 $n-k$ 人，有 $C_n^{n-k}=C_n^k$ 种方法(即在 n 名先生中选 k 人不去充当“代表”)，于是共有 $\sum\limits_{k=1}^{n}k(C_n^k)^2$ 种方法.

综合以上两个方面，便得式(1.4.12).

等式 9 设 r，M 都是自然数，$M\geqslant r$，则有

$$\frac{r}{M}+\frac{M-r}{M}\cdot\frac{r}{M-1}+\frac{M-r}{M}\cdot\frac{M-r-1}{M-1}\cdot\frac{r}{M-2}+\cdots+\frac{M-r}{M}\cdot\frac{M-r-1}{M-1}\cdots\frac{1}{r+1}\cdot\frac{r}{r}=1 \tag{1.4.13}$$

组合意义 设想一个袋中有 M 个大小相同的球，其中有 r 个是白的，其余的是黑的. 每次摸出一个球，不放回去，直至摸到白球为止.

这是一个必然事件(迟早会摸到白球)，所以概率为 1.

另一方面，第一次摸到白球的概率为$\frac{r}{M}$. 第一次未摸到白球，第二次摸到白球的概率为$\frac{M-r}{M}\cdot\frac{r}{M-1}$，……，第 k 次才摸到白球的概率为$\frac{M-r}{M}\cdot\frac{M-r-1}{M-1}\cdots\frac{M-r-(k-2)}{M-(k-2)}\cdot\frac{r}{M-(k-1)}$($k=2,3,\cdots;M-r+1$). 因此，摸到白球的概率为式(1.4.13)左端，从而式(1.4.13)成立.