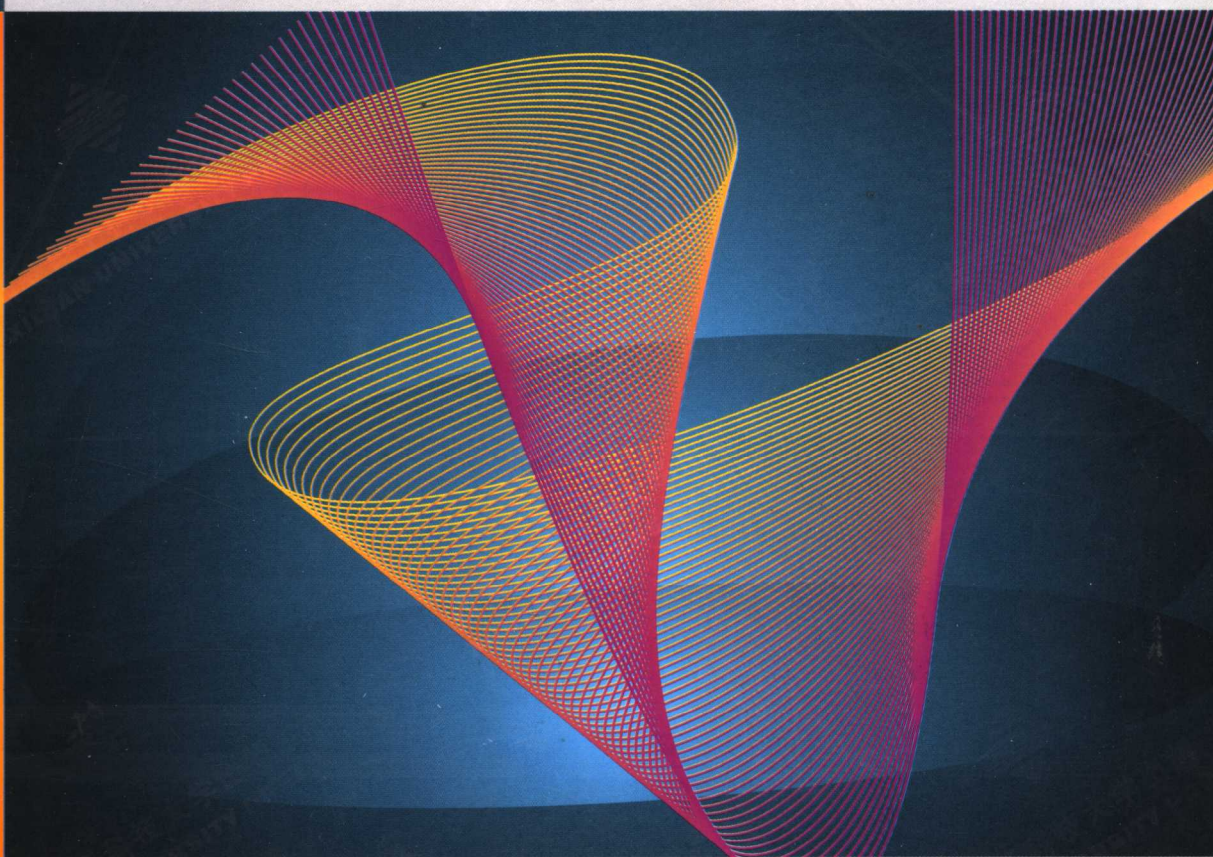


MATLAB

MATLAB

小波分析高级技术



□ 周 伟 主编
桂 林 周 林 张家祥等 编著

西安电子科技大学出版社
[http:// www.xduph. com](http://www.xduph.com)

MATLAB

小波分析高级技术

周 伟 主编

桂林 周林 张家祥 等编著

西安电子科技大学出版社

2006

内 容 简 介

本书以最新推出的 MATLAB 7.0 中的小波分析工具箱 Wavelet Toolbox 3.0 为基础,从工程应用的角度出发,详细地介绍了使用 MATLAB 小波分析工具箱进行信号处理、图像处理、机械故障诊断、数字水印以及语音信号处理的方法和技巧,最后介绍了 MATLAB 7.0 中新增的提升小波变换以及在 Visual C++ 中使用 MATLAB 小波分析工具箱的方法。

本书适用于信号处理、图像处理、机械故障诊断、数字水印以及语音信号处理等领域中使用 MATLAB 小波技术的工程技术人员,同时也是理工科各专业的高年级本科生、研究生学习小波理论必不可少的参考书。

本书的例子代码均可在下列网站免费下载:

<http://interzym.nease.net/books/matlabxb/index.htm>

图书在版编目(CIP)数据

MATLAB 小波分析高级技术/周伟主编.

—西安:西安电子科技大学出版社,2005.12

ISBN 7-5606-1581-3

I. M… II. 周… III. 计算机辅助计算—软件包, MATLAB—应用—小波分析

IV. ① TP391.75 ② 0177

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 111420 号

策 划 毛红兵

责任编辑 毛红兵 王中伟

出版发行 西安电子科技大学出版社(西安市太白南路 2 号)

电 话 (029)88242885 88201467 邮 编 710071

<http://www.xduph.com> E-mail: xdupfxb@pub.xaonline.com

经 销 新华书店

印刷单位 陕西天意印务有限责任公司

版 次 2006 年 1 月第 1 版 2006 年 1 月第 1 次印刷

开 本 787 毫米×1092 毫米 1/16 印张 17.25

字 数 408 千字

印 数 1~4000 册

定 价 26.00 元

ISBN 7-5606-1581-3/TP·0907

XDUP 1872001-1

*** 如有印装问题可调换 ***

本社图书封面为激光防伪覆膜,谨防盗版。

前 言

目前小波分析在许多工程领域中都得到了广泛的应用,成为科技工作者经常使用的工具之一。MATLAB作为一种高性能的数值计算和可视化软件,经过各个领域专家的努力,现已包含信号处理、图像处理、通信、小波分析、系统辨识、优化以及控制系统等不同应用领域的工具箱。本书以MATLAB 7.0中的小波分析工具箱3.0为蓝本,结合工程实际中的各应用领域,由浅入深地讲解了如何应用MATLAB来实现小波分析。

与同类书籍相比,本书并没有过多拘泥于MATLAB小波分析工具箱中小波函数的介绍,而是更侧重于小波分析技术在具体工程实践中的应用。

本书各章内容安排如下:

第1章简要介绍了小波变换的基本理论。

第2章对MATLAB小波分析工具箱进行了简要介绍。

第3章介绍了MATLAB小波分析工具箱的图形用户接口。

第4章讲述了MATLAB小波在信号处理中的应用。主要介绍了MATLAB小波在信号分解、信号重构、信号去噪、信号压缩、信号分析和信号检测六个方面的应用。

第5章讲述了MATLAB小波在图像处理中的应用。从图像分解、图像重构、图像去噪、图像压缩、图像增强以及图像融合等方面介绍了MATLAB小波在图像处理中的应用。

第6章介绍了MATLAB小波在机械故障诊断中的应用。以发动机故障诊断和齿轮故障诊断为例,从故障的机理以及小波的特点重点分析说明了MATLAB小波在机械故障诊断中的应用。

第7章介绍了MATLAB小波在数字水印中的应用,包括基于小波变换域的主要数字水印算法,以及MATLAB小波在数字水印中的应用实例。

第8章介绍了MATLAB小波在语音信号处理中的应用。重点介绍了小波在语音信号增强和语音信号压缩中的应用。

第9章介绍了MATLAB提升小波变换及其应用。在介绍了MATLAB的提升小波变换函数后,介绍了提升小波变换在一维信号和二维信号处理中的应用。

第10章介绍了Visual C++调用MATLAB小波实例。介绍了VC调用MATLAB函数的两种方法:VC通过MATLAB引擎调用MATLAB函数以及VC调用MATLAB编译生成的C/C++函数。

本书通过大量的实例对如何应用 MATLAB 进行小波分析进行了讲解,力求图文并茂、深入浅出,有很强的可操作性和可移植性。读者可以根据本书的内容迅速掌握 MATLAB 7.0 小波分析工具箱的使用。

本书的例子代码均可在 <http://interzym.nease.net/books/matlabxb/index.htm> 免费下载。

本书由周伟主编,参加本书编写工作的有周伟、桂林、周林、张家祥、韩超、王勇、阮坚、王鹏、邓强、高宏伟、刘东、张雄明、潘海龙、张晖、严虎等。

由于时间仓促以及作者本身水平有限,书中错误之处在所难免,敬请各位专家和广大读者批评指正。

编 者

2005 年 7 月

目 录

第 1 章 小波变换概述	1
1.1 小波变换的历史与现状	1
1.2 Haar 小波	1
1.2.1 Haar 小波简介	2
1.2.2 基于 Haar 小波的信号分解与重构算法	3
1.3 一维连续小波变换	5
1.4 离散小波变换	6
1.5 多分辨分析与小波构造	7
1.6 小波包分析	9
第 2 章 MATLAB 小波分析工具箱简介	11
2.1 MATLAB 小波分析工具箱的小波分析函数	11
2.2 自定义小波函数	18
2.2.1 添加一个新的小波函数的准备工作	18
2.2.2 添加一个新的小波函数	21
2.2.3 使用新的小波函数	24
2.3 MATLAB 小波分析工具箱的面向对象设计方法	25
2.3.1 小波分析工具箱中的主要对象	25
2.3.2 对象的应用	29
第 3 章 MATLAB 小波分析工具箱的图形用户接口	42
3.1 进入 GUI 工作环境	42
3.2 GUI 的主要特征	43
3.2.1 颜色设置	43
3.2.2 图形绘制的关联性	43
3.2.3 使用鼠标	44
3.2.4 控制颜色	44
3.2.5 控制颜色数目	45
3.2.6 控制染色模式	45
3.2.7 使用菜单	46
3.2.8 使用 View Axes 按钮	48
3.2.9 使用层次独立的阈值设置工具	50
3.3 一维连续小波分析工具介绍	51
3.4 一维离散小波分析工具介绍	53
3.5 二维离散小波分析工具介绍	63
3.6 一维小波包分析工具介绍	75
3.7 二维小波包分析工具介绍	81
第 4 章 MATLAB 小波在信号处理中的应用	87
4.1 信号分解	87

4.1.1 信号的连续小波分解	87
4.1.2 信号的离散小波分解	90
4.1.3 信号的小波包分解	94
4.2 信号重构	97
4.2.1 信号的小波重构	97
4.2.2 信号的小波包重构	103
4.3 信号去噪	105
4.3.1 信号的阈值去噪	105
4.3.2 信号阈值去噪实例	111
4.4 信号压缩	115
4.4.1 信号压缩	115
4.4.2 信号压缩实例	115
4.5 信号分析	117
4.5.1 分离信号的不同成分	117
4.5.2 识别某一频率区间上的信号	121
4.5.3 识别信号的发展趋势	123
4.6 信号检测	124
4.6.1 检测信号的自相似性	124
4.6.2 信号奇异性检测	125
第 5 章 MATLAB 小波在图像处理中的应用	129
5.1 图像分解	129
5.1.1 图像的小波分解	129
5.1.2 二维小波包分解	134
5.2 图像重构	136
5.2.1 图像的小波分解重构	136
5.2.2 图像的小波包分解重构	143
5.3 图像去噪	145
5.3.1 图像阈值去噪概述	145
5.3.2 图像阈值去噪实例	146
5.4 图像压缩	150
5.4.1 图像压缩概述	150
5.4.2 图像压缩实例	150
5.5 图像增强	153
5.6 图像融合	154
5.6.1 图像融合概述	154
5.6.2 图像融合实例	155
第 6 章 MATLAB 小波在机械故障诊断中的应用	158
6.1 机械状态监测中的非平稳信号	158
6.2 发动机故障诊断	158
6.2.1 故障机理分析	158
6.2.2 故障检测方法	159
6.3 齿轮故障诊断	162
6.3.1 齿轮故障机理	162

6.3.2 齿轮点蚀	163
6.3.3 齿轮疲劳	166
第7章 MATLAB小波在数字水印中的应用	171
7.1 数字水印技术概述	171
7.2 数字水印算法	171
7.2.1 空间域算法	172
7.2.2 变换域算法	173
7.2.3 压缩域算法	173
7.2.4 NEC算法	174
7.2.5 生理模型算法	174
7.3 基于小波变换域的数字水印	174
7.3.1 基于小波变换域的数字水印简述	174
7.3.2 基于小波变换域的数字水印实例	176
第8章 MATLAB小波在语音信号处理中的应用	185
8.1 语音信号处理概述	185
8.2 基于小波的语音信号处理	185
8.2.1 小波在语音信号增强中的应用	186
8.2.2 小波在语音信号压缩中的应用	188
第9章 MATLAB提升小波变换及其应用	191
9.1 提升小波变换概述	191
9.1.1 提升小波变换	191
9.1.2 提升小波逆变换	192
9.1.3 提升小波变换系数的提取或重构	193
9.2 提升小波变换应用实例	194
9.2.1 提升小波变换用于信号处理	194
9.2.2 提升小波变换用于图像处理	205
第10章 在VC环境中使用MATLAB小波分析工具箱	217
10.1 VC调用MATLAB引擎	217
10.1.1 引擎库函数	217
10.1.2 mx-函数	219
10.1.3 VC调用MATLAB引擎的设置	225
10.1.4 实例:小波去噪	229
10.2 VC调用MATLAB的C/C++函数	233
10.2.1 设置	233
10.2.2 实例:信号的小波分解与重构	234
附录 MATLAB小波分析工具箱函数	241
一、通用小波变换函数	241
二、小波函数	247
三、离散平稳小波变换	250
四、小波包算法	252
五、树管理	255
六、提升小波变换	264

第1章 小波变换概述

目前,小波变换在许多工程领域中都得到了广泛的应用,成为科技工作者经常使用的工具之一。本章将对小波变换的基本概念进行简要的介绍。

1.1 小波变换的历史与现状

自从1822年傅里叶发表“热传导解析理论”以来,傅里叶变换一直是传统信号处理的基本方法。傅里叶变换的基本思想是将信号分解成许多不同频率的正弦波的叠加,将信号从时间域转换到频率域。

傅里叶变换能够满足大多数应用的需求,但是由于在进行傅里叶变换的时候丢掉了时间信息,因此无法对某一时间段所对应的频域信息或者某一频率段所对应的时间信息进行分析。

傅里叶变换的这种特性在分析非平稳性信号时,表现出严重的不足。然而实际中的信号均包含大量的非平稳成分,例如偏移、趋势、突变等,它们往往反映了信号的重要特征。因此需要寻求一种同时具有时间分辨率和频域分辨率的分析方法。

为了研究信号在局部时间段的频域特征,1946年Gabor提出了著名的Gabor变换,之后发展成为短时傅里叶变换(Short Time Fourier Transform, STFT)。其基本思想是对信号加窗,然后对窗内的信号进行傅里叶变换,因此它可以反映出信号的局部特性。STFT在实践中得到了广泛的应用。但由于STFT的定义决定了其窗函数的大小和形状与时间和频率无关,为固定窗函数的大小和形状,(一般说来,实际中高频信号持续时间很短,而低频信号持续时间较长。)因此希望能够对低频信号采用大时间窗进行分析,而对于高频信号采用小时间窗进行分析。小波变换继承了STFT的思想,它的窗口大小不变,但窗口形状可以改变,是一种时间窗和频率窗都可改变的时频分析方法,即在低频部分具有较高的频率分辨率和较低的时间分辨率,在高频部分具有较高的时间分辨率和较低的频率分辨率,因此在时频域都具有很强的表征信号局部特征的能力。

1.2 Haar 小波

在小波分析中,尺度函数 φ 和小波函数 ψ 起着非常重要的作用,实际上信号的分析处理都是通过这两个函数生成的函数族对信号实现分解和重构的。尺度函数和小波函数之间具有非常紧密的关系,有时人们也称尺度函数为“父”小波,称小波函数为“母”小波。小波是从一定的现代数学分析和信号处理等实际应用中发展而来的,具有较高的理论要求和工程背景,学习时有一定的难度。本节将以最早最简单的小波——Haar小波为例,希望通过

对 Haar 小波的学习能够对小波分析这种方法有所了解。

1.2.1 Haar 小波简介

定义 1 Haar 函数 $\varphi(x)$ 的定义为

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0, 1) \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

显然, 对于正数(负数) k , $\varphi(x-k)$ 的图形为 $\varphi(x)$ 向右(左)平移单位 k 后的结果。假设 V_0 为所有线性组合

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \varphi(x-k), \quad a_k \in \mathbb{R}$$

所构成的空间, 其元素可以通过图 1.1 来表示。

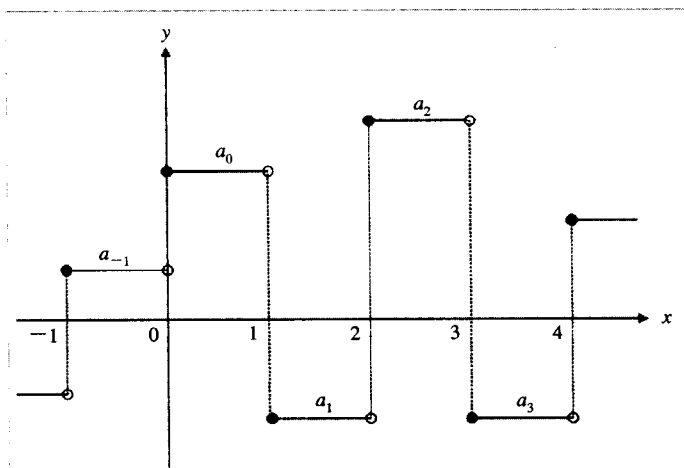


图 1.1 空间 V_0

基于 Haar 函数可以对信号的高、低频部分进行分析。由函数

$$\{\dots, \varphi(2^n x + 1), \varphi(2^n x), \varphi(2^n x - 1), \varphi(2^n x - 2), \dots\}$$

生成的函数集合构成的空间 V_n 描述的是在时间区间长度为 $1/2^n$ 内取常数的信号。显然 n 越大, 表示信号变化越剧烈, 而 n 越小, 表示信号变化越缓慢。

空间序列 V_n 具有如下性质:

(1) 单调性: 空间序列 V_n 具有递增性质: $V_0 \subset V_1 \subset V_2 \cdots V_{n-1} \subset V_n \subset V_{n+1} \cdots$, 由于 $\varphi(2x) \in V_1$, $\varphi(2x) \notin V_0$, 因此包含关系严格成立;

(2) 伸缩性: 对于函数 $f(x)$, 当且仅当 $f(2^n x) \in V_n$ 时, $f(x) \in V_0$;

(3) 逼近性: $\bigcap_{j \in \mathbb{Z}} V_j = \{0\}$, $\overline{\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j} = L^2(\mathbb{R})$;

(4) 平移不变性: $f(x) \in V_0 \Rightarrow f(x-k) \in V_0, \forall k \in \mathbb{Z}$;

(5) 正交基性质: 函数 $\{2^{\frac{n}{2}} \varphi(2^n x - k); k \in \mathbb{Z}\}$ 构成空间 V_n 的标准正交基。

在信号去噪等典型应用实践中, 噪音常常表现为信号的高频部分, 因此去噪相当于将信号中的高、低频成分分离出来。高频分量表现为变换比较快的部分, 这可以通过取 n 较

大值时的函数集合 $\{2^{\frac{n}{2}}\varphi(2^n x - k); k \in \mathbf{Z}\}$ 来刻画。注意到 V_n 是至少宽度为 $1/2^n$ 的区间上取常数的简单函数组成的空间序列, 在 V_n 中的信号高频部分(对应于噪声)最大可能为当且仅当在时间长度为 $1/2^n$ 内取常数值信号的部分, 因此要达到去噪的目的只需要将信号分为当且仅当在时间长度为 $1/2^n$ 内取常数值信号的部分(对应空间 W_n)和至少宽度为 $1/2^{n-1}$ 的区间内为常数值的部分(对应空间 V_{n-1})。

下一步需要解决的问题是如何求解 W_n 。基本思想是: 找到一个函数 $\psi(x)$, 像函数 $\varphi(x)$ 的伸缩和平移 $\{2^{\frac{n}{2}}\varphi(2^n x - k); k \in \mathbf{Z}\}$ 能够张成空间 V_n 一样, 函数 $\psi(x)$ 的伸缩和平移 $\{2^{\frac{n}{2}}\psi(2^n x - k); k \in \mathbf{Z}\}$ 也能张成空间 W_n , 同时要求 $\psi(x)$ 和 $\varphi(x)$ 能够建立直接的联系。

定理 1 设 W_n 是由形如

$$\sum_{k \in \mathbf{Z}} a_k \varphi(2^n x - k), a_k \in \mathbf{R}$$

的函数所组成的线性空间, 其中 a_k 含有限个非 0 项, 则 W_n 构成 V_n 在 V_{n+1} 中的正交补, 并且 $V_{n+1} = V_n \oplus W_n$ 。

定理 2 能量有限空间 $L^2(\mathbf{R})$ 可以分解为如下直和:

$$L^2(\mathbf{R}) = V_0 \oplus W_0 \oplus W_1 \oplus \cdots$$

因此 $f \in L^2(\mathbf{R})$ 可以惟一地表示为

$$f = f_0 + \sum_{k=0}^{\infty} w_k$$

其中, $f_0 \in V_0, w_k \in W_k$ 。

1.2.2 基于 Haar 小波的信号分解与重构算法

基于 Haar 小波的信号分解与重构算法的基本步骤如下:

第一步(采样), 如果待分解的是模拟信号 $f(t)$, 选择 $N=2^n$ (大于 Nyquist 速率), 得到采样信号值 $a_k^n = f\left(\frac{k}{2^n}\right)$, 其中 k 的取值保证 $\frac{k}{N}$ 位于信号 $f(t)$ 发生的时间范围之内, 并在每一个不小于 $\frac{1}{N}$ 的时间段内都能取到采样信号 $a_k^n = f\left(\frac{k}{2^n}\right)$, 于是可以用信号

$$f_n(x) = \sum_{k \in \mathbf{Z}} a_k^n \varphi(2^n x - k)$$

对连续信号 $f(t)$ 进行高精度的近似。

第二步(分解), 设信号 $f_n(x)$ 逐级分解为

$$\begin{aligned} f_n(x) &= W_{n-1}(x) + W_{n-2}(x) + \cdots + W_{l-1}(x) + f_{l-1}(x) \\ &= W_{n-1}(x) + W_{n-2}(x) + \cdots + W_0(x) + f_0(x) \end{aligned}$$

其中

$$W_{l-1}(x) = \sum_{k \in \mathbf{Z}} b_k^{l-1} \psi(2^{l-1} x - k), f_{l-1}(x) = \sum_{k \in \mathbf{Z}} a_k^{l-1} \varphi(2^{l-1} x - k)$$

系数 a_k^{l-1} 与 b_k^{l-1} 按照上标从大到小的顺序从 $l=n$ 开始直到 $l=0$ 结束, 满足

$$b_k^{l-1} = \frac{a_{2k}^l - a_{2k+1}^l}{2}, \quad a_k^{l-1} = \frac{a_{2k}^l + a_{2k+1}^l}{2}$$

第三步(信号的处理), 将分解后的信号表示成下面的形式

$$\begin{aligned} f_n(x) &= \sum_{l=0}^{n-1} W_l(x) + f_0(x) \\ &= \sum_{l=0}^{n-1} \left[\sum_{k \in \mathbb{Z}} b_k^l \psi(2^l x - k) \right] + \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k^0 \varphi(x - k) \end{aligned}$$

信号处理的过程就是根据实际问题的需要对系数 b_k^l 作适当的修正, 例如, 如果信号处理用于去噪目的, 则可以将某个认为不可能存在的频率范围对应的系数 b_k^l 设置为 0; 如果信号处理用于压缩目的, 则可以根据压缩比的大小以及小波系数的取值范围设置适当的阈值, 当小波系数绝对值小于该阈值时, 则令其为 0。设修正后的小波系数记为 $\tilde{b}_k^l$ 。

第四步(信号的重构), 设重构后的信号值满足

$$\tilde{f}_n(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k^n \varphi(2^n x - k)$$

则上述信号值可以通过下面的递推过程得到

$$\tilde{a}^l = \tilde{L}U\tilde{a}^{l-1} + \tilde{H}U\tilde{b}^{l-1}, \quad l = 1, 2, 3, \dots, n$$

其中, $\tilde{a}^0, \tilde{b}^l, l=0, 1, 2, \dots, n-1$ 是根据第二、第三步得到的修正系数。

下面通过一个例子来说明上面的算法。

【例 1】 利用 Haar 小波分解定义在时间区间 $[0, 1]$ 上的信号, 如图 1.2 所示。设采样点为 $f\left(\frac{k}{2^8}\right) = a_k^8, k=0, 1, 2, \dots, 2^8-1$ 。

按照上面的算法对信号进行分解, 得到信号在不同空间中的分量, 如图 1.3、图 1.4、图 1.5、图 1.6 所示。

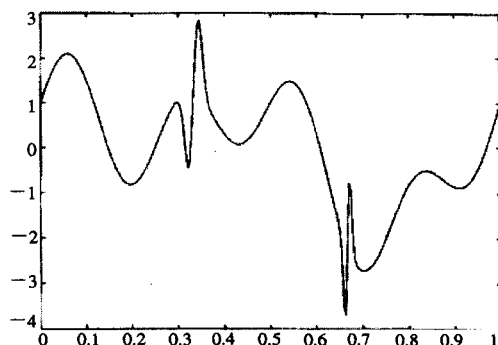


图 1.2 原始信号

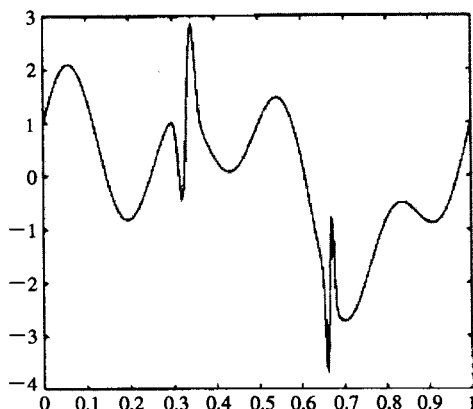


图 1.3 V_7 中的分量

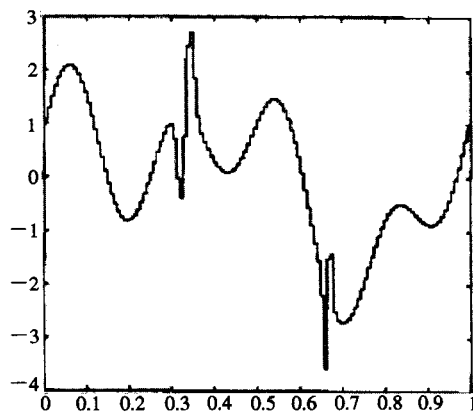
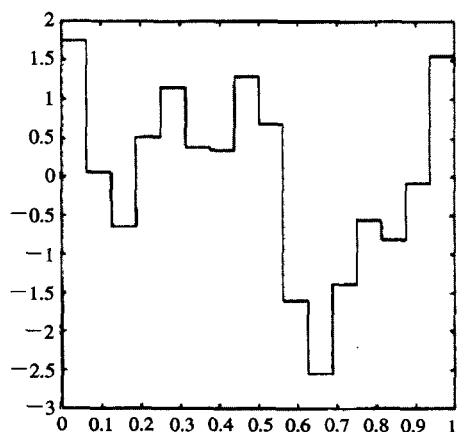
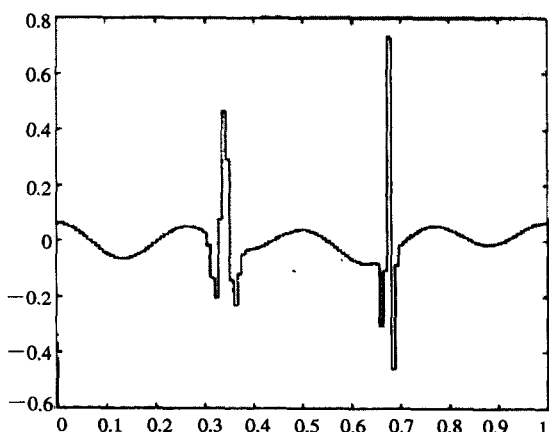


图 1.4 V_6 中的分量

图 1.5 V_4 中的分量图 1.6 W_7 中的分量

1.3 一维连续小波变换

本节将对一维连续小波变换的定义和性质进行简要介绍。

定义 2 设 $\psi(t) \in L^2(\mathbf{R})$, 其傅里叶变换为 $\hat{\psi}(w)$, 当 $\hat{\psi}(w)$ 满足容许条件(完全重构条件或恒等分辨率条件)

$$C_\psi = \int_{\mathbf{R}} \frac{|\hat{\psi}(w)|^2}{|w|} dw < \infty$$

时, 称 $\psi(t)$ 为一个基本小波或母小波。将母函数 $\psi(t)$ 经伸缩和平移后得

$$\psi_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \quad a, b \in \mathbf{R}; a \neq 0$$

称其为一个 小波序列。其中, a 为伸缩因子, b 为平移因子。

对于任意的函数 $f(t) \in L^2(\mathbf{R})$ 的连续小波变换为

$$W_f(a, b) = \langle f, \psi_{a,b} \rangle = |a|^{-\frac{1}{2}} \int_{\mathbf{R}} f(t) \overline{\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)} dt$$

其重构公式(逆变换)为

$$f(t) = \frac{1}{C_\psi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{a^2} W_f(a, b) \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) da db$$

由于基本小波 $\psi(t)$ 生成的小波序列 $\psi_{a,b}(t)$ 在小波变换中对被分析信号起着观测窗的作用, 因此 $\psi(t)$ 还应该满足一般函数的约束条件

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(t)| dt < \infty$$

故 $\hat{\psi}(w)$ 是一个连续函数。这意味着为了满足完全重构条件, $\hat{\psi}(w)$ 在原点必须等于 0, 即

$$\hat{\psi}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) dt = 0$$

为了使信号重构的实现在数值上是稳定的, 除了满足完全重构条件外, 还要求小波

$\psi(t)$ 的傅里叶变换满足下面的稳定性条件:

$$A \leq \sum_{j=-\infty}^{\infty} |\hat{\psi}(2^{-j}\omega)|^2 \leq B$$

式中 $0 < A \leq B < \infty$ 。

从稳定性条件可以引出一个重要的概念。

定义 3(对偶小波) 若小波 $\psi(t)$ 满足稳定性条件, 则定义一个对偶小波 $\tilde{\psi}(t)$, 其傅里叶变换 $\hat{\tilde{\psi}}(\omega)$ 为

$$\hat{\tilde{\psi}}(\omega) = \frac{\hat{\psi}^*(\omega)}{\sum_{j=-\infty}^{\infty} |\hat{\psi}(2^{-j}\omega)|^2}$$

从上式可以看出, 稳定条件实际上是对分母的约束条件, 它的作用是保证对偶小波的傅里叶变换存在。

值得注意的是, 一个小波的对偶小波一般不是惟一的, 然而在实际应用中通常希望一个小波具有惟一对偶小波。因此寻找具有惟一一对偶小波的合适小波就成为小波分析的基本问题之一。

通过总结我们可以看出, 连续小波变换主要具有以下重要性质:

- (1) 线性性: 一个多分量信号的小波变换等于各个分量的小波变换之和。
- (2) 平移不变性: 若 $f(t)$ 的小波变换为 $W_f(a, b)$, 则 $f(t-\tau)$ 的小波变换为 $W_f(a, b-\tau)$
- (3) 伸缩共变性: 若 $f(t)$ 的小波变换为 $W_f(a, b)$, 则 $f(ct)$ 的小波变换为

$$\frac{1}{\sqrt{c}} W_f(ca, cb) \quad c > 0$$

- (4) 自相似性: 对应不同尺度参数 a 和不同的平移参数 b 的连续小波之间是自相似的。
- (5) 冗余性: 连续小波变换中存在信息表述的冗余。

1.4 离散小波变换

在实际运用中, 尤其是在计算机上实现时, 连续小波变换必须加以离散化。因此, 有必要讨论连续小波序列 $\psi_{a,b}(t)$ 和连续小波变换 $W_f(a, b)$ 的离散化。

在连续小波中, 考虑函数

$$\psi_{a,b} = |a|^{-\frac{1}{2}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right)$$

这里 $b \in \mathbf{R}$, $a \in \mathbf{R}_+$, 且 $a \neq 0$, ψ 是容许的, 为方便起见, 在离散化中, 总限制 a 只取正值, 这样相容性条件就变为

$$C_\psi = \int_0^\infty \frac{|\hat{\psi}(\bar{\omega})|}{|\bar{\omega}|} d\bar{\omega} < \infty$$

通常, 把连续小波变换中尺度参数 a 和平移参数 b 的离散化公式分别取作 $a = a_0^j$,

$b = ka_0^j b_0$, 这里 $j \in \mathbf{Z}$, 扩展步长 $a_0 \neq 1$ 是固定值, 为方便起见, 总是假定 $a_0 > 1$ (由于 m 可取正也可取负, 因此这个假定无关紧要)。所以对应的离散小波函数 $\psi_{j,k}(t)$ 即可写作

$$\psi_{j,k}(t) = a_0^{-\frac{j}{2}} \phi\left(\frac{t - ka_0^j b_0}{a_0^j}\right) = a_0^{-\frac{j}{2}} \phi(a_0^{-j}t - kb_0)$$

而离散化小波系数则可表示为

$$C_{j,k} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \psi_{j,k}^*(t) dt = \langle f, \psi_{j,k} \rangle$$

其重构公式为

$$f(t) = C \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_{j,k} \psi_{j,k}(t)$$

C 是一个与信号无关的常数。

1.5 多分辨分析与小波构造

定义 4 (多分辨分析) 空间 $L^2(\mathbf{R})$ 中一列闭子空间 $\{V_j\}_{j \in \mathbf{Z}}$ 称为 $L^2(\mathbf{R})$ 的一个多分辨分析(MRA), 如果该序列满足下列条件:

- (1) 单调性: $\cdots \subseteq V_{j-1} \subseteq V_j \subseteq V_{j+1} \subseteq \cdots, \forall j \in \mathbf{Z}$;
- (2) 逼近性: $\bigcap_{j \in \mathbf{Z}} V_j = \{0\}, \overline{\bigcup_{j \in \mathbf{Z}} V_j} = L^2(\mathbf{R})$;
- (3) 伸缩性: $f(x) \in V_j \Leftrightarrow f(2x) \in V_{j+1}, \forall j \in \mathbf{Z}$;
- (4) 平移不变性: $f(x) \in V_0 \Rightarrow f(x-k) \in V_0, \forall k \in \mathbf{Z}$;
- (5) Riesz 基存在性: 存在 $g \in V_0$, 使 $\{g(x-k) | k \in \mathbf{Z}\}$ 构成 V_0 的 Riesz 基。

多分辨分析是由一个尺度函数建立起来的, 因此多分辨分析的建立等价于寻找尺度函数在多分辨分析的框架下的性质, 下面根据 $V_j \subset V_{j+1}$ 以及 $V_{j+1} = V_j \oplus W_j$ 建立尺度函数方程的关系式。

定理 3 设 $\{V_n; n \in \mathbf{Z}\}$ 为一个具有尺度函数 φ 的正交多分辨分析, 则下列尺度关系式成立:

$$\varphi(x) = \sum_{k \in \mathbf{Z}} h_k \varphi(2x - k)$$

其中 $h_k = 2 \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) \overline{\varphi(2x-k)} dx$, 并且有 $\varphi(2^{j-1}x-l) = \sum_{k \in \mathbf{Z}} h_{k-2l} \varphi(2^jx-k)$, 有时等价地表示为 $\varphi_{j-i,l} = \frac{\sqrt{2}}{2} \sum_{k \in \mathbf{Z}} h_{k-2l} \varphi_{jk}$, 其中 $\varphi_{jk}(x) = 2^{\frac{j}{2}} \varphi(2^jx-k)$ 。

例 2 在 Haar 小波系统中系数 h_k 的值满足 $h_0 = h_1 = 1$, 而其他系数 h_k 均为 0。

例 3 Daubechies 在 1988 年给出的一个更好的简单例子是一个仅有 4 个非 0 系数的小波(俗称 D4 小波), 相关系数 h_k 的值为:

$$h_0 = \frac{1+\sqrt{3}}{4}, h_1 = \frac{3+\sqrt{3}}{4}, h_2 = \frac{3-\sqrt{3}}{4}, h_3 = \frac{1-\sqrt{3}}{4}$$

而其他的系数为 0, 对应尺度函数的图形如图 1.7 和图 1.8 所示。

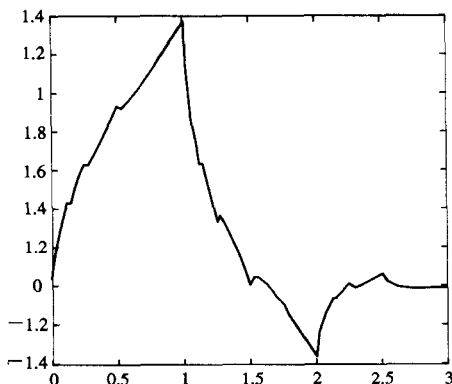


图 1.7 D4 尺度函数

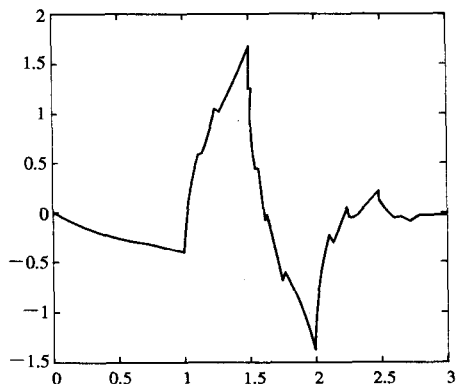


图 1.8 D4 小波函数

尺度函数计算取决于尺度方程的系数 h_k , 求尺度函数等价于求 h_k 。下面介绍 Mallat 在 1989 年得出的结论。

定理 4 (Mallat, 1989) 设 $(\{V_m; m \in \mathbf{Z}\}; \varphi(t))$ 是一个正交 MRA, 则存在 $\{h_k\} \in \ell^2$ 使得下面的双尺度方程

$$\varphi(x) = \sum_k h_k \varphi(2x - k)$$

成立, 并且利用尺度函数 $\varphi(x)$ 构造函数

$$\psi(x) = \sum_k g_k \varphi(2x - k)$$

$\psi(x)$ 的伸缩和平移构成 $L^2(\mathbf{R})$ 的正交基, 其中 $g_k = (-1)^k \bar{h}_{1-k}$ 。进一步地, 当

$$W_j = \overline{\text{span} \{2^{j/2} \psi(2^j x - k); k \in \mathbf{Z}\}}$$

时, $W_j \perp W_{j'}, j \neq j', W_j \oplus W_{j+1} = W_{j+1}$ 。

上面定义的 $\psi(x)$ 称为小波函数。

下面介绍基于 Mallat 方法的信号分解重构算法。基本思想是: 设 $H_j f$ 为能量有限信号在分辨率 2^j 下的近似, 则 $H_j f$ 可以进一步分解为 f 在分辨率 2^{j-1} 下的近似 $H_{j-1} f$ 以及位于分辨率 2^{j-1} 与 2^j 之间的细节 $D_{j-1} f$ 之和, 其分解过程如图 1.9 所示。

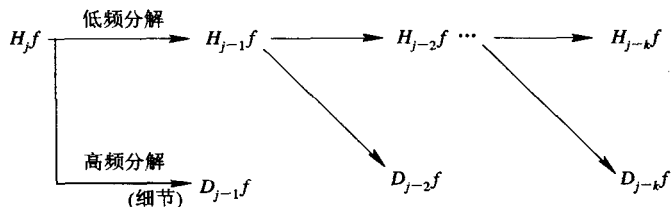


图 1.9 信号不同频带分解过程图

下面讨论实施上述分解过程的具体表达式。

引理 双尺度方程中系数 $\{h_k\}$ 、 $\{g_k\}$ 可以通过内积

$$h_{m-2n} = \sqrt{2} \langle \varphi_{j-1,n} \varphi_{j,m} \rangle, \quad g_{m-2n} = \sqrt{2} \langle \psi_{j-1,n} \varphi_{j,m} \rangle$$

来计算。因此设

$$H_{j-1}f(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k^{j-1} \varphi(2^{j-1}x - k)$$

$$D_{j-1}f(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} d_k^{j-1} \psi(2^{j-1}x - k)$$

$$H_j f(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k^j \varphi_{j,k}(x)$$

则信号分解与重构变为寻找系数 a_k^j 、 a_k^{j-1} 与 d_k^{j-1} 之间的关系。

通过推导可得到分解过程的系数表达式为

$$\begin{cases} a_l^{j-1} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \overline{h_{k-2l}} a_k^j \\ d_l^{j-1} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^k h_{1-k+2l} a_k^j \end{cases}$$

重构过程的系数表达式为

$$a_k^j = \sum_{l \in \mathbb{Z}} h_{k-2l} a_l^{j-1} + \sum_{l \in \mathbb{Z}} (-1)^k \overline{h_{1-k+2l}} d_l^{j-1}$$

1.6 小波包分析

多分辨分析可以对信号进行有效的时频分解，但由于其尺度函数是按二进制变化的，因此在高频段其频率分辨率较差，只能对信号的频段进行指数等间隔划分。小波包分解能够为信号提供一种更加精细的分析方法，通过把频带进行多层次划分，小波包分解能够对多分辨分析中没有细分的高频部分进一步分解，并能够根据被分析信号的特征，自适应地选择相应频段，使之与信号频谱相匹配，从而提高时频分辨率，因此具有广泛的应用价值。

下面以一个三层的分解说明小波包分析的概念，其小波包分析树如图 1.10 所示。

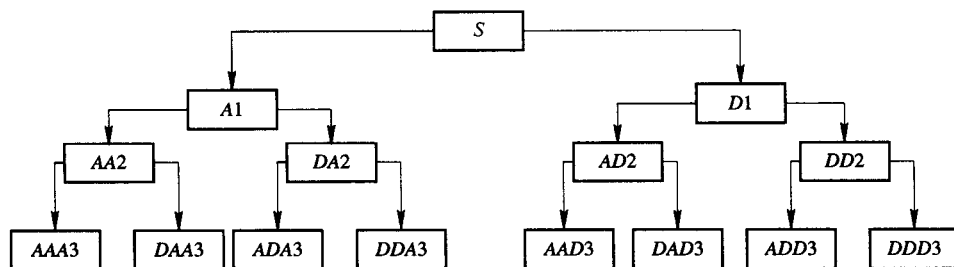


图 1.10 三层小波包树形分解图

小波包分解具有如下关系：

$$S = AAA3 + DAA3 + ADA3 + DDA3 + AAD3 + DAD3 + ADD3 + DDD3$$

小波包可以定义为：考察多分辨分析中的分解空间： $L^2(\mathbf{R}) = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} W_j$ ，该表达式表明多分辨分析是按照不同的尺度因子 j 把空间 $L^2(\mathbf{R})$ 分解为子空间 $W_j (j \in \mathbb{Z})$ 的直和。其中 W_j 为小波函数 $\{\varphi_{j,k}\}_{k \in \mathbb{Z}}$ 的闭包(小波子空间)。下面讨论如何进一步对小波子空间 W_j 按照二进制进行频率的细分，以达到提高频率分辨率的目的。

一种自然的作法是将尺度子空间 V_j 和小波子空间 W_j 用一个新的子空间 $U_j^{2^n}$ 统一起