中学生读物

尹家治

代数式变形例解

广东科技出版社

中学生读物

代数式变形例解

尹 家 治

广 东 科 技 出 版 社

Daishushi Bianxing Lijie

代数式变形例解

尹 家 治

广东科技出版社出版发行
广 东 省 新 华 书 店 经 销
广 东 番 禺 印 刷 厂 印 刷
787×1092毫米 32开本 3.375印张 72,000字
1988年5月第1版 1988年5月第1次印刷
印数1— 6,300册
ISBN 7—5359—0143—3
O.11 定价0.90元

内 容 简 介

本书通过例题介绍中学代数中各种代数式的恒等变形（因式分解、多项式、分式、根式、指数式、对数式的变形和求值）的方法与技巧，全书汇编了典型题详解95例，练习题219道，书末附有练习题的答案、提示或略解。

目　录

一、因 式 分 解

因式分解是乘法的逆运算，就是将多项式化为若干个因式的连乘积的形式。

第一课　形为ma＋mb的多项式的因式分解

多项式$ma+mb$通过提取公因式，分解为

$$ma+mb=m(a+b)$$

m有时表示一个多项式．下面列举几个可提取公因式进行因式分解的例子．

例1　分解因式：$(x-2y)x^3-(y-2x)y^3$

解：原式两项没有公因式出现，应当去括号展开来分组。

$$\begin{aligned}
\text{原式}&=x^4-2x^3y-y^4+2xy^3\\
&=(x^4-y^4)-(2x^3y-2xy^3)\\
&=(x^2+y^2)(x^2-y^2)-2xy(x^2-y^2)\\
&=(x^2-y^2)(x^2+y^2-2xy)\\
&=(x+y)(x-y)(x-y)^2\\
&=(x+y)(x-y)^3
\end{aligned}$$

例2　分解因式：$x^3-6x^2+5x+12$

解*：因为x^3的系数是1，常数项是12，故此顺次以

---

*前一段的叙述，是解题的思考过程，读者在解题时可不必写出来。以下同。

$x=\pm 1$，± 2，± 3，± 4代入原式，如其值为零者，则（$x-a$）必是其中的一个因式（$a=\pm 1$，± 2，± 3，± 4）。把$x=-1$代入原式，则

原式$=(-1)^3-6(-1)^2+5(-1)+12=0$，

故$x-(-1)$即（$x+1$）是原式的一个因式。为达到分解因式的目的，可添一些项，如

$$
\begin{aligned}
\text{原式}&=x^3+x^2-7x^2-7x+12x+12\\
&=x^2(x+1)-7x(x+1)+12(x+1)\\
&=(x+1)(x^2-7x+12)\\
&=(x+1)(x-3)(x-4)
\end{aligned}
$$

例3　分解因式：$a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$

解：

$$
\begin{aligned}
\text{原式}&=a^2b-a^2c+b^2c-b^2a+c^2(a-b)\\
&=(a^2b-b^2a)-(a^2c-b^2c)+c^2(a-b)\\
&=ab(a-b)-c(a^2-b^2)+c^2(a-b)\\
&=(a-b)(ab-ca-cb+c^2)\\
&=(a-b)[a(b-c)-c(b-c)]\\
&=(a-b)(b-c)(a-c)
\end{aligned}
$$

（请注意：这例题的因式分解，以后在分式的变形中会遇到）

例4　分解因式：$(a+2b+c)^3-(a+b)^3-(b+c)^3$

解：注意到$a+2b+c=a+b+b+c$，因此用A、B分别表示$a+b$和$b+c$，式子就简单了，关系就容易看出来了。

设$a+b=A$，$b+c=B$。则$a+2b+c=A+B$。于是

$$
\begin{aligned}
\text{原式}&=(A+B)^3-A^3-B^3=(A+B)^3-(A^3+B^3)\\
&=(A+B)^3-(A+B)(A^2-AB+B^2)\\
&=(A+B)[(A+B)^2-(A^2-AB+B^2)]\\
&=(A+B)[A^2+B^2+2AB-A^2+AB-B^2]
\end{aligned}
$$

$$=(A+B)\cdot 3AB$$

以$A=a+b$，$B=b+c$代还入

$$\text{原式}=3(a+2b+c)(a+b)(b+c)$$

另外，如果利用公式

$$(A+B)^3=A^3+3A^2B+3AB^2+B^3$$
$$=A^3+B^3+3AB(A+B)$$

代入，得

$$(A+B)^3-A^3-B^3=3AB(A+B)$$

则更为简单.

因式分解要注意在什么数的范围内进行，对于整式的因式分解，如果没有特别指出，一般都要求把一个整式分解为有理系数的质因式的积．所谓质因式，就是一个整式$F(x)$除常数c和$F(x)$外，不能被其他整式整除，则这个整式$F(x)$叫质因式.

练 习 一

1．把下列各式分解因式：

（1）$ab(x^2+y^2)+xy(a^2+b^2)$；

（2）$(a+2b)a^3-(b+2a)b^3$；

（3）$n^2x-xy-n^4y+2n^2y^2-y^3$；

（4）$(1+b^2)(1+a)^2-(1+b)^2(1+a^2)$.

2．把下列各式分解因式：

（1）x^3+3x-4；

（2）x^3+x+30；

（3）$x^4-2x^3-7x^2+8x+12$；

（4）$x^4-5x^3+2x^2+20x-24$；

(5) $ab(a-b)+bc(b-c)+ca(c-a)$;

(6) $ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)+2abc$.

3. 分解因式：

(1) $(a^2+b^2+c^2)^3-a^6-b^6-c^6$;

(2) $(xy-1)^2+(x+y-2)(x+y-2xy)$;

(3) $(a^2+ab+b^2)^2+4ab(a+b)^2$;

(4) $(a-2b)^3a-(b-2a)^3b$.

第二课 形为$x^2+(a+b)x+ab$的多项式的因式分解

根据多项式乘法，$x^2+(a+b)x+ab$分解因式为

$$x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$$

例1 分解因式：$x^2-7x-60$

解： $\because a+b=-7$，$ab=-60$，$\therefore$ $a=-12$，$b=5$，故

$$原式=(x-12)(x+5)$$

例2 分解因式：$(x^2-4x)^2-2(x^2-4x)-15$

解： 从式中的x^2-4x想到把它当作一个数，用u代之，则原式变为：

$$\begin{aligned}原式&=u^2-2u-15=(u-5)(u+3)\\&=(x^2-4x-5)(x^2-4x+3)\\&=(x-5)(x+1)(x-1)(x-3).\end{aligned}$$

例3 分解因式：$(x^2+7x+6)(x^2+7x+12)-280$

解： 设$u=x^2+7x$，则

$$\begin{aligned}原式&=(u+6)(u+12)-280\\&=u^2+18u+72-280=u^2+18u-208\\&=(u+26)(u-8)\end{aligned}$$

$$=(x^2+7x+26)(x^2+7x-8)$$
$$=(x^2+7x+26)(x+8)(x-1)$$

另设$u=x^2+7x+9$，则

$$\text{原式}=(u-3)(u+3)-280$$
$$=u^2-9-280=u^2-289=u^2-17^2\text{（下略）}$$

把原式变为二次三项式进行分解，是根本方法。

例4　分解因式：$(x-4)(x-2)(x+1)(x+3)-24$

解：注意到，$(x-4)(x+3)=\underline{x^2-x}-12$，$(x-2)(x+1)=\underline{x^2-x}-2$，设$u=x^2-x$，则

$$\text{原式}=(x^2-x-12)(x^2-x-2)-24$$
$$=(u-12)(u-2)-24=u^2-14u+24-24$$
$$=u^2-14u=u(u-14)=(x^2-x)(x^2-x-14)$$
$$=x(x-1)(x^2-x-14)$$

利用乘法的交换律和结合律，四个因式的乘积①×②×③×④（①，②，③，④表示四个相乘的因式）可有下面三种乘法

(①×③)×(②×④)

(①×②)×(③×④)

(①×④)×(②×③)

该例用的是第三种方法。变换时必须注意到x的系数相等。

例5　分解因式：$(x^2+11x+24)(x^2+14x+24)-4x^2$

解：式中x的系数不同，但常数项是相等的，因此，可设$u=x^2+24$，则

$$\text{原式}=(u+11x)(u+14x)-4x^2$$
$$=u^2+25ux+154x^2-4x^2$$
$$=u^2+25ux+150x^2$$
$$=(u+10x)(u+15x)$$

$$=(x^2+10x+24)(x^2+15x+24)$$
$$=(x+4)(x+6)(x^2+15x+24)$$

例 6　分解因式：$4x^2-4xy-3y^2-4x+10y-3$

解：把原式按x的降幂排列整理，再用“十字相乘”法。得

$$\begin{aligned}\text{原式}&=4x^2-4(y+1)x-(3y^2-10y+3)\\&=4x^2-4(y+1)x-(3y-1)(y-3)^{*}\\&=[2x-(3y-1)][2x+(y-3)]^{**}\\&=(2x-3y+1)(2x+y-3)\end{aligned}$$

其中

$$* \quad \begin{array}{ccc} 3 & \times & -1 \\ 1 & & -3 \\ \hline & & -10 \end{array} \qquad\qquad ** \quad \begin{array}{ccc} 2 & \times & -(3y-1) \\ 2 & & +(y-3) \\ \hline & & -4(y+1) \end{array}$$

练　习　二

1．分解因式：

（1）$(x^2+5x)^2+10(x^2+5x)+24$；

（2）$(xy+ab)(xy-ab)-a^2(xy-b^2)-b^2(xy-a^2)$；

（3）$(x^2+3x-2)(x^2+3x+4)-16$；

（4）$(x^2+x+1)(x^2+x+2)-12$；

（5）$(a^2+3a+2)x^2+(2a^2+2a-1)xy+(a^2-a)y^2$。

2．分解因式：

（1）$(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)-24$；

（2）$(x+1)(x+3)(x+5)(x+7)+15$；

（3）$x(x+1)(x+2)(x+3)+1$；

(4) $(x^2-x-6)(x^2+3x-4)+24$.

3. 分解因式：

(1) $x^2+2xy-8y^2+2x+14y-3$；

(2) $2x^2-xy-6y^2+2x+17y-12$；

(3) $a^2+ab-6b^2+a+13b-6$；

(4) $(a+b-2ab)(a+b-2)+(1-ab)^2$.

第三课　形为a^2-b^2的多项式的因式分解

利用乘法公式

$$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$$

进行因式分解

例1　分解因式：$4x^3y-4xy^3$

解：原式$=4xy(x^2-y^2)$

$=4xy(x-y)(x+y)$

例2　分解因式：$25z^2-4x^2+12xy-9y^2$

解：注意到：$4x^2-12xy+9y^2=(2x-3y)^2$

原式$=25z^2-(4x^2-12xy+9y^2)$

$=(5z)^2-(2x-3y)^2$

$=(5z+2x-3y)(5z-2x+3y)$

例3　分解因式：$a^4-7a^2b^2+81b^4$

解：这式子如果作为二次三项式是很难分解的，注意到：$a^4+18a^2b^2+81b^4=(a^2+9b^2)^2$，则

原式$=a^4+18a^2b^2+81b^4-7a^2b^2-18a^2b^2$

$=a^4+18a^2b^2+81b^4-25a^2b^2$

$=(a^2+9b^2)^2-(5ab)^2$

$=(a^2+5ab+9b^2)(a^2-5ab+9b^2)$

例4　分解因式：a^4+64

解： 原式$=a^4+16a^2+64-16a^2$

$$=(a^2+8)^2-(4a)^2$$

$$=(a^2+4a+8)(a^2-4a+8)$$

从例3，4看出：有时为了达到分组的目的，必须添置一些辅助项。

例5　分解因式：$x^4+y^4+z^4-2x^2y^2-2x^2z^2-2y^2z^2$

解： 注意到公式

$$(A-B-C)^2=A^2+B^2+C^2-2AB-2AC+2BC$$

因此

原式$=x^4+y^4+z^4-2x^2y^2+2y^2z^2-2z^2x^2-4y^2z^2$

$$=(x^2-y^2-z^2)^2-(2yz)^2$$

$$=(x^2-y^2-z^2+2yz)(x^2-y^2-z^2-2yz)$$

$$=[x^2-(y-z)^2][x^2-(y+z)^2]$$

$$=(x+y-z)(x-y+z)(x+y+z)(x-y-z)$$

练　习　三

把下列各式因式分解：

（1）$(5x^2-3y^2)^2-(3x^2-5y^2)^2$；

（2）$a^2b^2-a^2-b^2+1$；

（3）$9x^2-4y^2-z^2-4yz$；

（4）x^4-23x^2+1；

（5）$a^4-3a^2b^2+b^4$；

（6）$x^4-7x^2y^2+y^4$；

（7）$(1-a^2)(1-b^2)-4ab$；

(8) $(c^2-a^2-b^2)^2-4a^2b^2$;

(9) $a^4+b^4+1-2a^2b^2-2a^2-2b^2$;

(10) $x^4-2x^2(y^2+z^2)+(y^2-z^2)^2$;

(11) $x^4+x^2-2ax+1-a^2$.

第四课　多项式$a^3+b^3+c^3-3abc$的因式分解

多项式$a^3+b^3+c^3-3abc$的因式分解如下：

$$\begin{aligned}\text{原式}&=(a+b)^3+c^3-3abc-3a^2b-3ab^2\\&=(a+b+c)[(a+b)^2-(a+b)c+c^2]\\&\quad-3ab(c+a+b)\\&=(a+b+c)(a^2+2ab+b^2-ac-bc+c^2-3ab)\\&=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)\end{aligned}$$

$$a^3+b^3+c^3-3abc$$
$$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$$

这是一个重要公式，学生应该掌握，因为它是一些乘法公式的概括。例如，设公式中的$c=0$，就得

$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$$

若设$c=-(a+b)$，则

$$\begin{aligned}&a^3+b^3-(a+b)^3+3ab(a+b)\\&=[a+b-(a+b)][a^2+b^2+(a+b)^2-ab\\&\quad+a(a+b)+b(a+b)]=0\end{aligned}$$

因此

$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$

公式还可以写成

$$a^3+b^3+c^3-3abc=\frac{1}{2}(a+b+c)(2a^2+2b^2+2c^2$$

$$-2ab-2bc-2ac)$$

$$=\frac{1}{2}(a+b+c)[(a-b)^2+(b-c)^2+(a-c)^2]$$

如果$a+b+c=0$时，则$a^3+b^3+c^3=3abc$。

如果$a+b+c>0$时，则$a^3+b^3+c^3\geqslant 3abc$（等号当且仅当$a=b=c$时成立）。

若设$x=a^3$，$y=b^3$，$z=c^3$，则有

$$x+y+z\geqslant 3\sqrt[3]{xyz},$$

$$\frac{x+y+z}{3}\geqslant\sqrt[3]{xyz}.$$

其中x，y，z均为正数（等号当且仅当$x=y=z$时成立）。

另外，在一些证明问题中也用到这个公式。

例1　分解因式：$x^3-8y^3-27-18xy$

解：原式$=x^3+(-2y)^3+(-3)^3-3x(-2y)(-3)$

$=(x-2y-3)(x^2+4y^2+9+2xy-6y+3x)$

例2　当$3x=a+b+c$时，求证

$$(x-a)^3+(x-b)^3+(x-c)^3-3(x-a)(x-b)(x-c)=0$$

证：因为求证的式子由$(x-a)$，$(x-b)$，$(x-c)$组成，所以可分别以X，Y，Z代之，又从$3x=a+b+c$得$3x-a-b-c=0$，即$(x-a)+(x-b)+(x-c)=0$，

$$X+Y+Z=0$$

因此

左边$=X^3+Y^3+Z^3-3XYZ$

$=(X+Y+Z)(X^2+Y^2+Z^2-XY-YZ-XZ)$

$=0$

例3 当$a+b+c=0$时，求证

$$(ax+by+cz)^3+(bx+cy+az)^3+(cx+ay+bz)^3$$
$$=3(ax+by+cz)(bx+cy+az)(cx+ay+bz)$$

证明：∵ $(ax+by+cz)+(bx+cy+az)+(cx+ay+bz)$
$=a(x+y+z)+b(x+y+z)+c(x+y+z)$
$=(a+b+c)(x+y+z)=0$

根据公式及例2可知

$$(ax+by+cz)^3+(bx+cy+az)^3+(cx+ay+bz)^3-3(ax+by+cz)(bx+cy+az)(cx+ay+bz)=0$$

∴ $(ax+by+cz)^3+(bx+cy+az)^3+(cx+ay+bz)^3$
$=3(ax+by+cz)(bx+cy+az)(cx+ay+bz)$

练 习 四

1．分解因式：

（1）$x^3-y^3+z^3+3xyz$；

（2）$8x^3+27y^3+18xy-1$；

（3）$x^3+8y^3-125z^3+30xyz$.

2．证明下列各式：

（1）$(a-b)^3+(b-c)^3+(c-a)^3=3(a-b)(b-c)(c-a)$；

（2）当$3y=x+2z$时，求证$x^3-27y^3+8z^3+18xyz=0$；