现代数学书丛

李群的表示论

黄劲松 著

湖南教育出版社

现代数学书丛

李群的表示论

黄劲松 著

湖南教育出版社

李群的表示论
黄劲松　著
责任编辑：郑绍辉

湖南教育出版社出版发行
湖南省新华书店经销　湖南省新华印刷三厂印刷

787×1092　32开　印张：6.25　字数：148900
2000年7月第1版　2000年7月第1次印刷
印数：1—1000
ISBN 7-5355-3227-6/G·3222
定价：9.00元

作 者 简 介

黄劲松，1962 年生于黄河之畔的泉城济南。1980 年由山东省实验中学考入北京大学数学系，1984 年获数学学士学位。翌年，获王安奖学金赴麻省理工学院(MIT)数学系，1989 年获数学哲学博士学位。他先后在普林斯顿高等研究院(IAS)与犹他大学（University of Utah）任职，从事研究与教学工作，现为香港科技大学终身教授，其研究领域为李群的表示论与非交换调和分析。

序

科学技术是第一生产力．经济发展必须有科学技术的支持.特别是进入21世纪后,科技的进步更将成为经济发展的主要动力．其中基础性的创新研究,将使经济出现飞跃式的进展,这已为过去的历史所证明,并已成为全世界有识之士的共识．对我国来说,科技兴国,已是当务之急,这些也已成为全国有识之士的共识．

数学作为一门基础学科,向来被认为是基础的基础．数学主要研究数量关系与空间形式,也通过数量关系与空间形式而渗透到种种各别的科学领域,一门科学的成熟程度,往往以应用数学的深入程度为一项重要衡量标志．在进入21世纪时,数学如何发挥它应有的作用,以支持并促进我国科技的进步与经济的发展,乃是一项重大的课题．为此,必须有一批优秀的跨世纪中青年数学人才作为主力,才能担负起这一重大责任．国家为此已为青年数学家创造了种种良好的研究条件和学术环境,设立了各种特殊的基金与资助,还举办了种种类型旨在培养与选拔拔尖人才的讲习班、暑期学校与研究班等．

早在若干年以前,在国际著名数学家陈省身教授的倡导之下,国家教委与国家基金委曾在天元基金的支持之下,乘每年暑期各大专院校休假之机,举办数学上各种专题的讲习班;此后又升级并改名为暑期学校．第一次1995年在湖北襄樊地区举行,

由武汉大学数学系主持其事，第二次1996年改在北京，由北大数学系主持，以后将转往其他地区，由一些著名的大学数学系轮流主持．这些暑期学校都主要由国内外卓有成就的中青年数学家就当前某些有重要意义的活跃领域作系统介绍，使参加学习的来自全国各地的年轻学子能迅速了解这些领域的情况，掌握它们的方法技术，并进入科研前沿．

湖南教育出版社热心中国数学事业的发展，提出由该社组织编辑一套《现代数学》书丛，大部分暑期学校的讲稿经过适当增改后都将收入这一书丛，第一批包括三本：

1．堵丁柱的《判定树理论导引》；

2．石赫的《机械化数学引论》；

3．张贤科的《代数数论导引》．

以后还将陆续分批出书，已定的有：

香港科技大学黄劲松的《李群的表示论》．

其余也在计划之中．

现试对此次出版的第一批的三本书略作介绍：

《判定树理论导引》一书的作者堵丁柱教授是我国著名的青年数学家，他解决了美国贝尔电话公司关于电话布线有关Steines树精测长期悬而未决的问题，并因此而被英国大百科全书列为当年十大科技成就之一．此书则涉及作者有着重要成就的另一领域：理论计算机科学中的计算复杂度理论．所谓Karp猜想的提出者Karp是这一理论的主要开创者之一，它引导到迄今还成为悬案的所谓P—NP问题．本书作者“将心比心”与“设身处地”深入浅出地介绍这一猜想，并如作者所希望的那样，这一猜想的解决可能会出自于阅读这本小册子的青年学子之手．

数学中的公理化演绎体系几乎是尽人皆知的，20世纪重大发明之一的计算机，使数学面临变革而有进入一个新时代的可

能,即数学的机械化.计算机科学大师 Knuth 曾称计算机科学是一种算法的科学.我国某些数学史家曾论证数学发展的历史过程中,公理化的演绎倾向与机械化的算法倾向往往互为消长交替成为当时数学的主流.由于计算机的出现,为后一倾向带来了新的生命力.丛书的第二本对于数学机械化作了较详细的介绍,作者石赫教授是中国科学院系统科学所的研究员,多年来从事这方面的研究,有过不少重要的贡献.例如书中关于理论物理中杨振宁与 Baxter 方程组的解法,即是石赫教授自己的一项杰作,希望读者在阅读本书之后,能迅速进入这一方兴未艾的新颖领域,并作出多方面的贡献.

数论,它的研究对象始于最简单不过的整数,却有着最丰富不过的内涵.早在古希腊时期,欧几里得的《几何原本》一书,就有专章通过素数概念以及素数积惟一分解与素数个数无限等定理创立了朴素而诱人的整数理论.在中国古代,虽然整数的性质理论并非主要贯注所在,也有中国剩余定理这种光辉篇章,到近代的几个世纪,整数的理论往往吸引着许多伟大的数学家,诸如 Fermat,Euler,Gauss,Riemann,Jacobi,Dirichlet 等,他们的贡献使数论成为数学中最有魅力的一个分支,著名的难题如 Goldbach 问题,Fermat 大问题,以及 Riemann 猜测等,已成为数百年来许多大数学家所殚精竭虑的焦点.在本世纪中,由于诸如编码等实际上的需要,使数论除了本身理论的优美以外,还成为解决实际问题的一种重要手段.

在本世纪中,由于数学中代数、拓扑、分析等多方面的发展对数论引进了诸多新的手段,经过数代人的努力,终于使 Fermat 大问题得到完全解决,至于在我国,则通过华罗庚、闵嗣鹤等诸前辈的倡导,出现了一批优秀的数论专家,以陈景润等为代表,在 Goldbach 问题上作出了卓越的贡献,为国外所推崇.《代

数数论导引》一书的作者张贤科是清华大学的教授,长期从事代数数论的研究,作出过不少重要的贡献.此书从现代数学的角度介绍了代数数论的基本内容和类域论等很重要的现代理论.国内有志于数论的青年学子,尽可通过此书发愤学习而成才,迅速进入数论这一领域,并在21世纪中与国外学者争奇斗胜.

我们希望书丛中以后出版的著作,能对国内的青年学者,起到同样的作用.

吴文俊

1998年1月22日

前　　言

本书是在南开举办的全国数学暑期学校英文讲稿的基础上删简整理而成．在南开大学开设“李群的表示论”课程的目的是向在读的研究生介绍李群、李代数及其表示论的基础知识和一些最新的研究课题．

当人类迈向21世纪之际，数学在当今社会的作用日益受到重视．数学处于所有科学的核心，因为所有的科学分支都需要数学来阐明其真理．在数学之中群的对称性又是被视为灵魂的部分．表示论是用线性代数来研究群对称的基本工具．群对称遍及数学的各个分支：几何、分析和代数．表示论在当今数学和理论物理的发展上起了十分重要的作用．本世纪著名的数学家I.Gerfand曾经说过：“所有的数学都可视作某种表示理论．”

A.Einstein曾经说过：“所有科学理论应该尽量地简化，直到不能再简化为止．”这一点对数学理论来说尤其重要．因此，在编写本书时我们只假定读者具备完整的线性代数知识和一些基本的抽象代数知识．为了使读者容易理解，我们大致把本书分为四个部分：Ⅰ．有限群；Ⅱ．李代数；Ⅲ．紧李群；Ⅳ．非紧李群．每一部分又分为三章，第1章介绍结构理论，第2章介绍基本的表示理论，第3章介绍比较专门化的理论或应用．

本书前三部分所包括的都是表示论中比较基础的理论．这些理论可视为线性代数的延拓与应用，这部分内容在数学和物理的许多领域中都有广泛的应用．本书着重于介绍表示论的基本思想，而不是给出最完备的证明．完备的证明可以在书中列出的参考文献中找到．第一部分只涉及有限群，并不需要李群的知识．第二部分是关于复单李群的结构与表示理论．第三部分概括了紧李群的表示与一些应用，这部分的最后一章包括了将典型群表示的 Weyl 构造推广至非典型群，这一项工作是新的研究成果．第四部分包含了非紧李群的无限维表示的一些基本理论．这部分内容在表示论中一般被视为是比较高深的．我们采用最典型的例子 $SL(2,\mathbb{R})$的表示作为介绍．我们还包括了幂零伴随轨道和极小表示的理论．在南开暑期学校我们还介绍了一般实线性群 $GL(n,\mathbb{R})$和它的通用覆盖群$\widetilde{GL}(n,\mathbb{R})$的不可约酉表示的完全分类以及它们酉表示特征之间的关系．在我看来，这是表示论中十分精彩的部分．但是这部分内容并没有写进本书，原因是使这本表示论的入门书不致过长．有兴趣的读者可参阅以下三篇文献[V2]，[H1]和[AH]．在本书的最后一章，我们介绍了轨道方法、极小表示和对偶对的对应，这些理论在表示论中是举足轻重的．

D. Hilbert 在 1900 年的国际数学家大会曾断言："一个数学理论如果不能向你在大街上碰到的第一个人解释清楚，那么这个理论将会被认为是不完备的．"如此看来，表示论还处在不完备而且是正蓬勃发展的阶段．它将吸引许多年轻的数学家在这个领域内进行广泛地研究．可以预言，21 世纪将是表示论继续蓬勃发展的时代．

最后，我希望能借此机会向南开大学和南开数学研究所的数学家尤其是侯自新、周兴伟和梁科三位教授的款待表示衷心

的感谢，同时我也想对湖南教育出版社的郑绍辉先生与孟实华女士的帮助表示由衷的谢意。

黄劲松
1999年12月于
香港九龙清水湾
香港科技大学

目　　录

第一章　有限群

§1.1　群的概念

一个群是在一个集合 G 上定义了一种代数运算(称为乘法)使得 G 中任意二个元素 g_1 和 g_2 对应于 G 中另一个元素 g_1g_2．这种运算需要满足下列条件：

(i)结合律：$(g_1g_2)g_3=g_1(g_2g_3)$，$\forall g_1,g_2,g_3\in G$；

(ii)存在单位元：G 中含有一个元素 e，使得对所有的元素 $g\in G$ 都有 $ge=eg=g$；

(iii)存在逆元素：对 G 中任意一个元素 g，存在一个元素 g^{-1}使得 $gg^{-1}=g^{-1}g=e$．

注　1) 单位元素是惟一的．假设还存在一个单位元素 $e'\in G$，那么就有

$$e'=e'e=e.$$

2)给定一个元素 $g\in G$，那么 g 的逆元素也是惟一的．假设 x 和 y 同为 g 的逆元素，那么就有

$$x=xe=x(gy)=(xg)y=ey=y.$$

例　1) 所有整数组成的集合$\mathbb{Z}$，所有有理数组成的集合$\mathbb{Q}$，所有实数组成的集合$\mathbb{R}$ 以及所有复数组成的集合$\mathbb{C}$ 在通常加法

的运算下都是群.

2) 所有非零的有理数组成的集合$\mathbb{Q}^{\times}$,所有非零的实数组成的集合$\mathbb{R}^{\times}$以及所有非零的复数组成的集合$\mathbb{C}^{\times}$在通常定义的乘法的运算下都是群.

3) 假设 V 是定义在域 $\mathbb{F}$ 上的线性空间(本书中我们只用到实的或复的线性空间),那么 V 上所有可逆的线性变换 $GL(V)$组成一个群. 这里涉及的代数运算就是线性变换的合成. 如果我们选定 V 上的一组基 $v_1, v_2, \cdots, v_n$,那么 $GL(V)$可以等同与所有可逆的 $n\times n$ 矩阵 $GL(n,\mathbb{F})$.

一个群被称为是交换群,如果 G 中任意二个元素 g_1, g_2 都满足 $g_1g_2=g_2g_1$.

例 1) $\mathbb{Z},\mathbb{Q},\mathbb{R},\mathbb{C}$ 都是交换群.

2) $\mathbb{Q}^{\times},\mathbb{R}^{\times},\mathbb{C}^{\times}$都是交换群.

3) $GL(n,\mathbb{F})$只有在 $n=1$ 时才是交换群.

一个群 G 中的子集 H 被称为子群,如果 H 在 G 中定义的运算下组成一个群.

例 1) 如果 n 是一个整数,那么$\mathbb{Z}$中子集

$$n\mathbb{Z}=\{nk \mid k\in\mathbb{Z}\}$$

组成$\mathbb{Z}$的一个子群.

2) 所有行列式为 1 的矩阵 $SL(n,\mathbb{F})$是 $GL(n,\mathbb{F})$的一个子群.

给定一个群 G. 我们在这里给出一类抽象子群的定义. 这是由 G 中某一个元素 x 生成的循环群. 由 x 生成的循环群 H 是由 x 的所有幂组成的集合,也就是

$$H=\{\cdots,x^{-2},x^{-1},e,x,x^{2},\cdots\}.$$

这里 x 的 n 次幂 x^n 是指 x 自乘 n 次(假定 $n>0$). x^{-n}是指 x^{-1}自乘 n 次. H 是 G 中包含 x 的极小子群.

3）四元数群 H 是由下列 8 个矩阵组成

$$H=\{\pm\mathbb{I},\pm\mathbb{i},\pm\mathbb{j},\pm\mathbb{k}\}.$$

H 是 $GL(2,\mathbb{C})$的一个子群．这里四元数群定义如下：

$$\mathbb{I}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix},\mathbb{i}=\begin{bmatrix}i&0\\0&i\end{bmatrix},\mathbb{j}=\begin{bmatrix}0&1\\-1&0\end{bmatrix},\mathbb{k}=\begin{bmatrix}0&i\\i&0\end{bmatrix}.$$

用矩阵的乘法不难得出

$$\mathbb{i}^2=\mathbb{j}^2=\mathbb{k}^2=-\mathbb{I},\ \mathbb{i}\mathbb{j}=-\mathbb{j}\mathbb{i}=\mathbb{k},$$

$$\mathbb{j}\mathbb{k}=-\mathbb{k}\mathbb{j}=\mathbb{i},\ \mathbb{k}\mathbb{i}=-\mathbb{i}\mathbb{k}=\mathbb{j},$$

显然，$\mathbb{I}$ 是 H 中的单位元素．

§1.2　群在集合上的作用

在数学史上变换群的概念早于一般的群的概念．人们正是在对变换群认识与了解的基础上提出了更一般的抽象的群的概念．在数学与物理的许多领域中群往往也是以变换群的面目出现的．

一个定义在集合 X 上的变换是一个 X 到 X 自身的一对一映射 f，也就是说存在一个映射 $f^{-1}: X\to X$，满足 $f\circ f^{-1}=f^{-1}\circ f=e$ 恒等映射．如果 f 和 g 都是 X 到自身的映射，我们就用 $f\circ g$ 表示这两个映射的复合．

一个变换群 G 是由在某个集合 X 上的一些变换组成的集合．它必须满足 G 中含有恒等映射 e，G 含有每一元集的逆映射，而且 G 中任意二个映射的复合也都是 G 中的元素．在这些条件下，不难看出变换群是一个我们在§1.1 中定义的群．我们把由 X 上所有变换组成的群称作 X 上的对称群，记作 Sym X．