文都教育考研精品系列

2005

考研数学历年真题精析

(数学一

主　编：蔡子华

副主编：韩於羹　曾祥金　童　武　樊启斌

现代出版社

文都教育

2005年

考研数学历年真题精析(数学一)

主　编:蔡子华
副主编:韩於羹　曾祥金　童　武　樊启斌
策　划:文都考研信息中心

现代出版社

图书在版编目(CIP)数据

2005年考研数学历年真题解析/蔡子华编. —北京：现代出版社，2004

ISBN 7－80188－280－6

Ⅰ.2… Ⅱ.蔡… Ⅲ.数学—研究生—入学考试—解题 Ⅳ.D0－44

中国版本图书馆CIP数据核字(2004)第026507号

编　　者：蔡子华
责任编辑：张俊国
出版发行：现代出版社
地　　址：北京市安定门外华安里504号
邮政编码：100011
电　　话：010－64267325　64240483(传真)
电子邮箱：xiandai@cnpitc.com.cn
印　　刷：北京长阳汇文印刷厂
开　　本：787×1092毫米 1/16
印　　张：13
版　　本：2004年4月第1版　2004年4月第1次印刷
印　　数：1—6000册
书　　号：ISBN 7－80188－280－6
套书定价：66.00元

考研数学精品名师简介

蔡子华

全国著名考研数学辅导专家，连续五年担任研究生入学考试数学阅卷组组长。蔡老师从事考研辅导工作十几年，熟悉考生的弱点和考试的难点，深谙命题规律和重点，授课针对性极强，效果卓著。同时蔡子华老师更以能全程讲授微积分、线代、概率并能融会贯通和押题精准而闻名。

韩於羹

北京航空航天大学数学系教授，具有多年考研辅导经验。“从来不需要想起，永远也不会忘记”，是韩老师的经典名句，他诙谐幽默却又不失生动技巧的讲课方式使你对数学的兴趣猛增，从更深，更广泛的层面去理解数学，掌握数学，从而顺利渡过考研难关。

曾祥金

著名考研辅导专家，数学系博士生导师，长期参与研究生考试的命题研究、辅导及阅卷工作。全国经济博弈论专业委员会常务理事，主持或参与了多项国家级科学研究基金资助项目以及多项教学研究项目，并有多项成果获奖励。

童　武

著名考研辅导专家，首都师范大学教授、北京大学客座教授。以全程讲解微积分、线性代数、概率论与数理统计而著称考研数学界。其从事考研辅导数十年。足迹遍及华夏，桃李广布九州，授课上一直倡导“在课堂上解决问题”，其解题方法独特，记忆方法更是令人叫绝，受到广大学员的一致好评。

樊启斌

武汉大学博士生导师，长期从事考研数学的辅导工作，讲课通俗易懂，注重基础，突出重点，举一反三，其辅导效果得到学员的一致认可。

2005 年版本前言

毛泽东同志在1930年5月就“反对本本主义”提出了这样一个建议：你对于那个问题不能解决吗？那末，你就去调查那个问题的现状和历史吧！…… 调查就是解决问题。

同样的道理，如果考生对考研数学的试题和命题规律不了解或者不甚了解的话，那么考生就应该去接触并尝试考研数学历年真题. 了解的角度有多种多样，如每年教育部制订的《全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲》（以下简称《考试大纲》）、试题、答案、评分标准、名家评析等。

《考试大纲》每年都在修订，其中1997年之前的试卷与1997年之后（含1997年）的试卷，无论从考试规定还是对考生要求来讲，都有很大的不同，比如1997年之前考研数学分为五类，其中数学三是理工类，1997年之后考研数学改为四类，其中数学三是经济类。另外，即使同样是理工类的数学一，要求也不一样。

1997年之后的试卷之所以具有足够代表性的另外一个原因是，考生只要有最新8年的试卷分析，就足以掌握考研数学的规律与命题思想。如（A 表示考察知识点相同，A^+ 表示类似题型，A^{++} 表示几乎完全相同的题目）：

2004 年数学一第(5) 题与 2003 年数学二第一大题第(6) 小题(A^+)；

2004 年数学一第(20) 题与 2002 年数学三第九大题(A^{++})；

2004 年数学一第(22) 题与 1999 年数学三第十一大题(A^{++})；

2004 年数学三第(20) 题与 2000 年数学三第九大题(A^{++})；

2004 年数学三、四第(22) 题与 1999 年数学三第十一大题(A^{++})；

2004 年数学三第(23) 题与 2002 年数学一第十二大题(A)；

2004 年数学四第(18) 题与 2002 年数学四第七大题(A^{++})；

1997 — 2003 年之间重复出现的题型或考察相同知识点的题目有：

2003 年数学一第三大题与 2001 年数学三第六大题(A^+)；

2003 年数学一第四大题与 2001 年数学一第五大题(A^{++})；

2003 年数学二第七大题与 1997 年数学二第八大题(A^+)；

2003 年数学二第十一大题与 1999 年数学四第九大题(A^{++})；

2003 年数学三第九大题与 2002 年数学三第九大题(A^+)；

2003 年数学四第七大题与 1998 年数学三第八大题(A^+)；

2003 年数学四第十大题与 1999 年数学三第九大题(A^{++})；

2002 年数学二第十一大题(2) 与 1997 年数学二第三大题(6)(A^{++})；

2002 年数学三第十一大题(1) 与 1999 年数学三第十一大(1)(A^{++})；

2001 年数学一第六大题与 1997 年数学一第三大题(2)(A^{++})；

2001 年数学二第一大题(5) 与 2000 年数学一第一大题(4)(A^{++})；

2001 年数学三、数学四第三大题与 1997 年数学三第四大题(A^{++})；

2000 年数学二第二大题(2) 与 1997 年数学二第二大题(3)(A^{++})；

2000 年数学四第十大题与 1999 年数学四第九大题(A)；

……

事实上，真题就是最好的模拟题，考生应着力把最近 8 年的试题练精钻透。题不在多，贵在精！

因此，我们从题库中节选了从 1997 − 2004 年的考研数学的全部真题，我们特聘请全国著名考研辅导专家、连续五年担任研究生入学考试数学阅卷组组长的蔡子华老师担任主编，同时诚邀北京大学、清华大学等全国知名高等学府的数学教授参与编写这套丛书。

这套丛书的主要特点有以下几个方面：

1. 按数学一、数学二、数学三和数学四分类，分册出版；

2. 将历年真题以填空题 / 选择题 / 解答题的顺序安排到考试大纲规定的章节中，便于考生在复习时自我训练；

3. 将答案解析放在第三部分，并从[考点]→[分析]→[详解]→[讲评]→[得分率]等五个角度来展开分析与讲评.

值得注意的是，2004 数学试卷结构做了一些调整，增加两个选择题，减少一个解答题，解答题总分为 94 分，有意思的是，有些客观题(填空题和选择题)和解答题的设计思路非常巧妙，如：

例 1 客观题[04. 4(5)] 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{3\times 3}$ 是实正交矩阵，且 $a_{11}=1$，$\mathbf{b}=(1,0,0)^{\mathrm{T}}$，则线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 的解是________

例 2 解答题[04. 3(17)] 设 $f(x)$，$g(x)$ 在$[a,b]$上连续，且满足$\int_a^x f(t)\mathrm{d}t \geqslant \int_a^x g(t)\mathrm{d}t, x\in[a,b)$，$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t=\int_a^b g(t)\mathrm{d}t$，证明：$\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b xg(x)\mathrm{d}x$.

总而言之，近 8 年考研数学真题分析充分揭示出这样的命题原则或者说遵循这样的指导思想："既要有利于国家对高层次人才的选拔，也要有利于促进高等学校各类数学课程教学质量的提高"。

希望 2005 年考生在使用本书的时候，牢记两个"有利于"的指导思想。充分利用真题，提高分析问题、解决问题的能力。值得补充的是，由于近几年不少理工类的考题随后出现在经济类试卷之中，因此我们建议经济类考生在复习数学三、数学四的同时，可以参阅理工类的数学一、数学二。

由于时间仓促，错误和疏漏之处难免，恳请广大读者、数学同仁批评指正。

最后，祝 2005 年考生取得满意的成绩！

编者

2004 年 3 月

目　　录

第一部分　题型集萃

第二部分　历年试题

第三部分　真题解析

第一部分　题型集萃

第一章　高数部分

第一节　函数、极限、连续

1997 年一(1)

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\sin x+x^2\cos\dfrac{1}{x}}{(1+\cos x)\ln(1+x)}=$__________.

1997 年一(3)

(2) 对数螺线 $\rho=e^{\theta}$ 在点$(\rho,\theta)=\left(e^{\frac{\pi}{2}},\dfrac{\pi}{2}\right)$处的切线的直角坐标方程为__________.

1998 年一(1)

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}-2}{x^2}=$__________.

1999 年一(1)

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x\tan x}\right)=$__________.

2003 年一(1)

(5) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{\ln(1+x^2)}}=$__________.

2003 年二(2)

(6) 设$\{a_n\}$，$\{b_n\}$，$\{c_n\}$ 均为非负数列，且$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$，$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=1$，$\lim\limits_{n\to\infty}c_n=\infty$，则必有(　　)

(A)$a_n<b_n$ 对任意 n 成立　　(B)$b_n<c_n$ 对任意 n 成立

(C) 极限$\lim\limits_{n\to\infty}a_nc_n$ 不存在　　(D) 极限$\lim\limits_{n\to\infty}b_nc_n$ 不存在

2004 年二(7)

(7) 把 $x\to 0^+$ 时的无穷小量 $\alpha=\int_0^x\cos t^2\,dt$，$\beta=\int_0^{x^2}\tan\sqrt{t}\,dt$，$\gamma=\int_0^{\sqrt{x}}\sin x^3\,dt$ 排列起来，使排在后面的是前一个的高阶无穷小，则正确的排列次序是　(　　)

(A)α,β,γ　　(B)α,γ,β　　(C)β,α,γ　　(D)β,γ,α

1998 年七

(8) 求$\lim\limits_{x\to\infty}\left[\dfrac{\sin\dfrac{\pi}{n}}{n+1}+\dfrac{\sin\dfrac{2\pi}{n}}{n+\dfrac{1}{2}}+\cdots+\dfrac{\sin\pi}{n+\dfrac{1}{n}}\right]$.

2000 年三

(9) 求$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\dfrac{\sin x}{|x|}\right)$

2002 年三

(10) 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某领域内具有一阶连续导数，且 $f(0)\neq 0, f'(0)\neq 0$，若 $af(h)+bf(2h)-f(0)$ 在 $h\to 0$ 时是比 h 高阶的无穷小，试确定 a,b 的值.

第二节　一元函数微分学

2002 年一(2)

(1) 已知函数 $y=y(x)$ 由方程 $e^y+6xy+x^2-1=0$ 确定，则 $y''(0)=$ ________.

2004 年一(1)

(2) 曲线 $y=\ln x$ 上与直线 $x+y=1$ 垂直的切线方程为________.

1998 年二(2)

(3) 函数 $f(x)=(x^2-x-2)|x^3-x|$ 不可导点的个数是 (　　)

(A)3　　(B)2　　(C)1　　(D)0

1999 年二(2)

(4) 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos x}{\sqrt{x}} & x>0\\ x^2g(x) & x\leqslant 0\end{cases}$，其中 $g(x)$ 是有界函数，则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处 (　　)

(A) 极限不存在　　(B) 极限存在，但不连续

(C) 连续，但不可导　　(D) 可导

2000 年二(1)

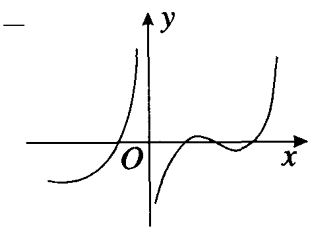
(5) 设 $f(x)$、$g(x)$ 是恒大于零的可导函数，且 $f'(x)g(x)-f(x)g'(x)<0$，则当 $a<x<b$ 时，有 (　　)

(A) $f(x)g(b)>f(b)g(x)$

(B) $f(x)g(a)>f(a)g(x)$

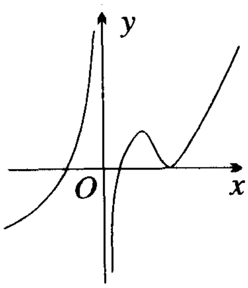
(C) $f(x)g(x)>f(b)g(b)$

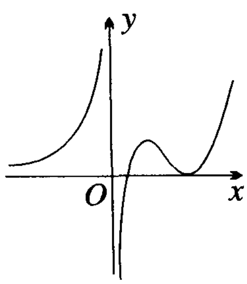
(D) $f(x)g(x)>f(a)g(a)$

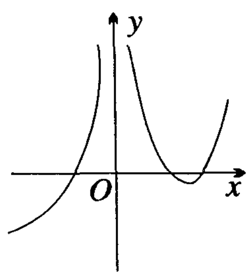


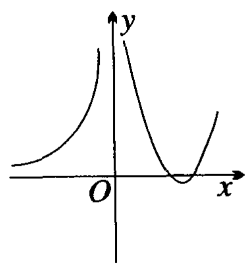
2001 年二(1)

(6) 设函数 $f(x)$ 在定义域内可导，$y=f(x)$ 的图形如右图所示，则导函数 $y=f'(x)$ 的图形为 (　　)









(A)　　(B)　　(C)　　(D)

2001 年二(3)

(7) 设 $f(0)=0$，则 $f(x)$ 在点 $x=0$ 可导的充要条件为 (　　)

(A) $\lim\limits_{h\to 0}\frac{1}{h^2}f(1-\cos h)$ 存在　　(B) $\lim\limits_{h\to 0}\frac{1}{h}f(1-e^h)$ 存在

(C) $\lim\limits_{h\to 0}\frac{1}{h^2}f(h-\sin h)$ 存在　　(D) $\lim\limits_{h\to 0}\frac{1}{h}[f(2h)-f(h)]$ 存在

2002 年二(3)

(8) 设函数 $y=f(x)$ 在$(0,+\infty)$ 内有界且可导,则 (　　)

(A) 当 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$,必有 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0$

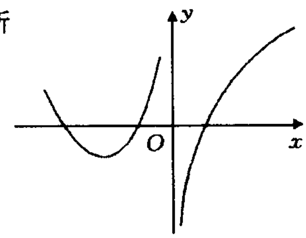
(B) 当 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)$ 存在时,必有 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0$

(C) 当 $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=0$,必有 $\lim\limits_{x\to 0^+}f'(x)=0$

(D) 当 $\lim\limits_{x\to 0^+}f'(x)$ 存在时,必有 $\lim\limits_{x\to 0^+}f'(x)=0$

2003 年二(1)

(9) 设函数 $f(x)$ 在$(-\infty,+\infty)$ 内连续,其导函数的图形如图所示,则 $f(x)$ 有 (　　)



(A) 一个极小值点和两个极大值点

(B) 两个极小值点和一个极大值点

(C) 两个极小值点和两个极大值点

(D) 三个极小值点和一个极大值点

2004 年二(8)

(10) 设函数 $f(x)$ 连续,且 $f'(0)>0$,则存在 $\delta>0$,使得 (　　)

(A) $f(x)$ 在$(0,\delta)$ 内单调增加

(B) $f(x)$ 在$(-\delta,0)$ 内单调减少

(C) 对任意的 $x\in(0,\delta)$ 有 $f(x)>f(0)$

(D) 对任意的 $x\in(-\delta,0)$ 有 $f(x)>f(0)$

1998 年九

(11) 设 $y=f(x)$ 是区间$[0,1]$ 上的任一非负连续函数.

(1) 试证存在 $x_0\in(0,1)$,使得在区间$[0,x_0]$ 上以 $f(x_0)$ 为高的矩形面积,等于在区间$[0,1]$ 上以 $y=f(x)$ 为曲边的梯形面积.

(2) 又设 $f(x)$ 在区间$(0,1)$ 内可导,且 $f'(x)>-\frac{2f(x)}{x}$,证明(1) 中的 x_0 是惟一的.

1999 年六

(12) 试证:当 $x>0$ 时,$(x^2-1)\ln x\geqslant(x-1)^2$.

2000 年九

(13) 设函数 $f(x)$ 在$[0,\pi]$ 上连续,且 $\int_0^\pi f(x)\mathrm{d}x=0$, $\int_0^\pi f(x)\cos x\mathrm{d}x=0$. 试证:在$(0,\pi)$ 内至少存在两个不同的点 ξ_1、ξ_2,使 $f(\xi_1)=f(\xi_2)=0$.

2001 年七

(14) 设 $y=f(x)$ 在$(-1,1)$ 内具有二阶连续导数且 $f''(x)\neq 0$,试证:

(1) 对于$(-1,1)$ 内的任一 $x\neq 0$,存在惟一的 $\theta(x)\in(0,1)$,使 $f(x)=f(0)+$

$xf'(\theta(x)x)$ 成立；

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\theta(x)=\dfrac{1}{2}$.

2003 年七

(15) 设函数 $y=y(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内具有二阶导数，且 $y'\neq 0$，$x=x(y)$ 是 $y=y(x)$ 的反函数.

(1) 试将 $x=x(y)$ 所满足的微分方程 $\dfrac{d^2x}{dy^2}+(y+\sin x)\left(\dfrac{dx}{dy}\right)^3=0$ 变换为 $y=y(x)$ 满足的微分方程；

(2) 求变换后的微分方程满足初始条件 $y(0)=0,y'(0)=\dfrac{3}{2}$ 的解.

2004 年三(15)

(16) 设 $e<a<b<e^2$，证明 $\ln^2 b-\ln^2 a>\dfrac{4}{e^2}(b-a)$.

第三节　一元函数积分学

1999 年一(2)

(1) $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_0^x \sin(x-t)^2 dt=$ __________.

2000 年一(1)

(2) $\displaystyle\int_0^1\sqrt{2x-x^2}\,dx=$ __________.

2002 年一(1)

(3) $\displaystyle\int_e^{+\infty}\frac{dx}{x\ln^2 x}=$ __________.

2004 年一(2)

(4) 已知 $f'(e^x)=xe^{-x}$，且 $f(1)=0$，则 $f(x)=$ __________.

1997 年二(2)

(5) 设在区间 $[a,b]$ 上 $f(x)>0,f'(x)<0,f''(x)>0$，令 $S_1=\displaystyle\int_a^b f(x)dx$，$S_2=f(b)(b-a)$，$S_3=\dfrac{1}{2}[f(a)+f(b)](b-a)$，则 (　　)

(A) $S_1<S_2<S_3$　　(B) $S_2<S_1<S_3$

(C) $S_3<S_1<S_2$　　(D) $S_2<S_3<S_1$

1997 年二(3)

(6) 设 $F(x)=\displaystyle\int_x^{x+2\pi}e^{\sin t}\sin t\,dt$，则 $F(x)$ (　　)

(A) 为正常数　　(B) 为负常数

(C) 恒为零　　(D) 不为常数

1998 年二(1)

(7) 设 $f(x)$ 连续,则 $\dfrac{d}{dx}\int_0^x tf(x^2-t^2)dt=$ (　　)

(A) $xf(x^2)$　　(B) $-xf(x^2)$　　(C) $2xf(x^2)$　　(D) $-2xf(x^2)$

1999 年二(1)

(8) 设 $f(x)$ 是连续函数,$F(x)$ 是 $f(x)$ 的原函数,则 (　　)

(A) 当 $f(x)$ 是奇函数时,$F(x)$ 必是偶函数

(B) 当 $f(x)$ 是偶函数时,$F(x)$ 必是奇函数

(C) 当 $f(x)$ 是周期函数时,$F(x)$ 必是周期函数

(D) 当 $f(x)$ 是单调增函数时,$F(x)$ 必是单调增函数

2004 年二(10)

(9) 设 $f(x)$ 为连续函数,$F(t)=\int_1^t dy\int_y^t f(x)dx$,则 $F'(2)$ 等于 (　　)

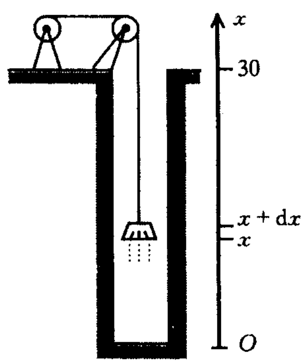
(A) $2f(2)$　　(B) $f(2)$　　(C) $-f(2)$　　(D) 0

1997 年五

(10) 设 $f(x)$ 连续,$\varphi(x)=\int_0^1 f(xt)dt$,且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=A$($A$ 为常数),求 $\varphi'(x)$ 并讨论 $\varphi'(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性.

1999 年七

(11) 为清除井底的污泥,用缆绳将抓斗放入井底,抓起污泥后提出井口,已知井深 $30m$,抓斗自重 $400N$,缆绳每米重 $500N$,抓斗抓起的污泥重 $2000N$,提升速度为 $3m/s$,在提升过程中,污泥以 $20N/s$ 的速度从抓斗缝隙中漏掉.现将抓起污泥的抓斗提升至井口,问克服重力需作多少焦耳的功?(说明:①$1N\times 1m=1J$;m,N,s,J 分别表示米,牛顿,秒,焦耳,② 抓斗的高度及位于井口上方的缆绳长度忽略不计.)



2001 年三

(12) 求 $\int\dfrac{\arctan e^x}{e^{2x}}dx$.

2002 年四

(13) 已知两曲线 $y=f(x)$ 与 $y=\int_0^{\arctan x}e^{-t^2}dt$ 在点(0,0)处的切线相同,写出此切线方程,并求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}nf\left(\dfrac{2}{n}\right)$.

2003 年三

(14) 过坐标原点作曲线 $y=\ln x$ 的切线,该切线与曲线 $y=\ln x$ 及 x 轴围成平面图形 D.

(1) 求 D 的面积 A;

(2) 求 D 绕直线 $x=e$ 旋转一周所得旋转体的体积 V.

2003 年七

(15) 设函数 $y=y(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内具有二阶导数,且 $y'\neq 0$,$x=x(y)$ 是 $y=y(x)$

的反函数.

(1) 试将 $x=x(y)$ 所满足的微分方程 $\frac{d^2x}{dy^2}+(y+\sin x)\left(\frac{dx}{dy}\right)^3=0$ 变换为 $y=y(x)$ 满足的微分方程；

(2) 求变换后的微分方程满足初始条件 $y(0)=0, y'(0)=\frac{3}{2}$ 的解.

第四节　向量代数和空间解析几何

1998 年三

(1) 求直线 $l: \frac{x-1}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z-1}{1}$ 在平面 $\pi: x-y+2z-1=0$ 上的投影直线 l_0 的方程，并求 l_0 绕 y 轴旋转一周所成曲面的方程.

第五节　多元函数微分学

1998 年一(2)

(1) 设 $z=\frac{1}{x}f(xy)+y\varphi(x+y)$，$f$、$\varphi$ 具有二阶连续导数，则 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}=$ ________.

2000 年一(2)

(2) 曲面 $x^2+2y^2+3z^2=21$ 在点 $(1,-2,2)$ 的法线方程为________.

2003 年一(2)

(3) 曲面 $z=x^2+y^2$ 与平面 $2x+4y-z=0$ 平行的切平面的方程是________.

1997 年二(1)

(4) 二元函数 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$，在点 $(0,0)$ 处　(　　)

(A) 连续，偏导数存在　(B) 连续，偏导数不存在

(C) 不连续，偏导数存在　(D) 不连续，偏导数不存在

2001 年二(2)

(5) 设函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 附近有定义，且 $f_x'(0,0)=3, f'_y(0,0)=1$，则　(　　)

(A) $dz\Big|_{(0,0)}=3dx+dy$

(B) 曲面 $z=f(x,y)$ 在点 $(0,0,f(0,0))$ 的法向量 $\{3,1,1\}$

(C) 曲线 $\begin{cases}z=f(x,y)\\ y=0\end{cases}$ 在点 $(0,0,f(0,0))$ 的切向量为 $\{1,0,3\}$

(D) 曲线 $\begin{cases}z=f(x,y)\\ y=0\end{cases}$ 在点 $(0,0,f(0,0))$ 的切向量为 $\{3,0,1\}$

2002 年二(1)

(6) 考虑二元函数 $f(x,y)$ 的下面 4 条性质：

①$f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处连续；

②$f(x,y)$ 在点(x_0,y_0)处的两个偏导数连续；

③$f(x,y)$ 在点(x_0,y_0)处可微；

④$f(x,y)$ 在点(x_0,y_0)处的两个偏导数存在.

若用“$P\Rightarrow Q$”表示可由性质 P 推出性质 Q，则有 ( )

(A)②⇒③⇒①　　(B)③⇒②⇒①

(C)③⇒④⇒①　　(D)③⇒①⇒④

2003 年二(3)

(7) 已知函数 $f(x,y)$ 在点$(0,0)$的某个领域内连续，且$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{f(x,y)-xy}{(x^2+y^2)^2}=1$，则 ( )

(A) 点$(0,0)$不是 $f(x,y)$ 的极值点

(B) 点$(0,0)$是 $f(x,y)$ 的极大值点

(C) 点$(0,0)$是 $f(x,y)$ 的极小值点

(D) 根据所给条件无法判断点$(0,0)$是否为 $f(x,y)$ 的极值点

1997 年四(1)

(8) 设直线 $l:\begin{cases}x+y+b=0\\ x+ay-z-3=0\end{cases}$ 在平面 π 上，而平面 π 与曲面 $z=x^2+y^2$ 相切于点$(1,-2,5)$，求 a、b 之值.

1997 年四(2)

(9) 设函数 $f(u)$ 具有二阶连续导数，而 $z=f(e^x\sin y)$ 满足方程 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=e^{2x}z$，求 $f(u)$.

1999 年三

(10) 设 $y=y(x)$，$z=z(x)$ 是由方程 $z=xf(x+y)$ 和 $F(x,y,z)=0$ 所确定的函数，其中 f 和 F 分别具有一阶连续导数和一阶连续偏导数，求$\dfrac{dz}{dx}$.

2000 年四

(11) 设 $z=f\left(xy,\dfrac{x}{y}\right)+g\left(\dfrac{y}{x}\right)$，其中 f 具有二阶连续偏导数，g 具有二阶连续导数，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

2001 年四

(12) 设函数 $z=f(x,y)$ 在点$(1,1)$处可微，且 $f(1,1)=1$，$\left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{(1,1)}=2$，$\left.\dfrac{\partial f}{\partial y}\right|_{(1,1)}=3$，$\varphi(x)=f(x,f(x,x))$. 求$\left.\dfrac{d}{dx}\varphi^3(x)\right|_{x=1}$

2002 年八

(13) 设有一小山，取它的底面所在的平面为 xOy 坐标面，其底部所占的区域为 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2-xy\leqslant 75\}$，小山的高度函数为 $h(x,y)=75-x^2-y^2+xy$.

(1) 设 $M(x_0,y_0)$ 为区域 D 上一点，问 $h(x,y)$ 在该点沿平面上什么方向的方向导数

最大?若记此方向导数的最大值为 $g(x_0,y_0)$，试写出 $g(x_0,y_0)$ 的表达式.

(2) 现欲利用小山开展攀岩活动，为此需要在山脚寻找一上山坡度最大的点作为攀登的起点. 也就是说，要在 D 的边界线 $x^2+y^2-xy=75$ 上找出使(1)中的 $g(x,y)$ 达到最大值的点. 试确定攀登起点的位置.

2004 年三(19)

(14) $z=z(x,y)$ 是由 $x^2-6xy+10y^2-2yz-z^2+18=0$ 确定的函数，求 $z=z(x,y)$ 的极值点和极值.

第六节　多元函数积分学

1998 年一(3)

(1) 设 l 为椭圆 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$，其周长记为 a，则 $\oint_l(2xy+3x^2+4y^2)\mathrm{d}s=$ ________.

2001 年一(2)

(2) 设 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，则 $\mathrm{div}(\mathrm{grad}r)\Big|_{(1,-2,2)}=$ ________.

2001 年一(3)

(3) 交换二次积分的积分次序：$\int_{-1}^{0}\mathrm{d}y\int_{2}^{1-y}f(x,y)\mathrm{d}x=$ ________.

2004 年一(3)

(4) 设 L 为正向圆周 $x^2+y^2=2$ 在第一象限中的部分，则曲线积分 $\int_L x\mathrm{d}y-2y\mathrm{d}x$ 的值为 ________.

2000 年二(2)

(5) 设 $S:x^2+y^2+z^2=a^2(z\geqslant 0)$，$S_1$ 在 S 在第一卦限中的部分，则有　(　　)

(A) $\iint\limits_S x\mathrm{d}S=4\iint\limits_{S_1}x\mathrm{d}S$　　(B) $\iint\limits_S y\mathrm{d}S=4\iint\limits_{S_1}x\mathrm{d}S$

(C) $\iint\limits_S z\mathrm{d}S=4\iint\limits_{S_1}x\mathrm{d}S$　　(D) $\iint\limits_S xyz\mathrm{d}S=4\iint\limits_{S_1}xyz\mathrm{d}S$

1997 年三(1)

(6) 计算 $I=\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)\mathrm{d}V$，其中 Ω 为平面曲线 $\begin{cases}y^2=2z\\x=0\end{cases}$ 绕 z 轴旋转一周形成的曲面与平面 $z=8$ 所围成的区域.

1997 年三(2)

(7) 计算曲线积分 $\oint_C(z-y)\mathrm{d}x+(x-z)\mathrm{d}y+(x-y)\mathrm{d}z$，其中 C 是曲线 $\begin{cases}x^2+y^2=1\\x-y+z=2\end{cases}$，从 z 轴正向往 z 轴负向看，C 的方向是顺时针的.

1998 年四

(8) 确定常数 λ，使在右半平面 $x>0$ 上的向量 $\boldsymbol{A}(x,y)=2xy(x^4+y^2)^{\lambda}\boldsymbol{i}-x^2(x^4+y^2)^{\lambda}\boldsymbol{j}$ 为某二元函数 $u(x,y)$ 的梯度，并求 $u(x,y)$.

1998 年六

(9) 计算$\iint\limits_{\Sigma}\dfrac{ax\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(z+a)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}}$,其中$\sum$为下半球面$z=-\sqrt{a^2-x^2-y^2}$的上侧,$a$为大于零的常数.

1999 年四

(10) 求$I=\int_L(\mathrm{e}^x\sin y-b(x+y))\mathrm{d}x+(\mathrm{e}^x\cos y-ax)\mathrm{d}y$,其中$a$、$b$为正常数,$L$为从点$A(2a,0)$沿曲线$y=\sqrt{2ax-x^2}$到点$O(0,0)$的弧.

1999 年八

(11) 设S为为椭球面$\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{y^2}{2}+z^2=1$的上半部分,点$P(x,y,z)\in S$,$\pi$为$S$在点$P$处的切平面,$\rho(x,y,z)$为点$O(0,0,0)$到平面$\pi$的距离,求$\iint\limits_S\dfrac{z}{\rho(x,y,z)}\mathrm{d}S$.

2000 年五

(12) 计算曲线积分$I=\oint_L\dfrac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{4x^2+y^2}$,其中$L$是以点$(1,0)$为中心,$R$为半径的圆周$(R>1)$取逆时针方向.

2000 年六

(13) 计算曲线积分$I=\oint_L\dfrac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{4x^2+y^2}$,其中$L$是以点$(1,0)$为中心,$R$为半径的圆周$(R>1)$取逆时针方向.

2000 年八

(14) 设有一半径为R的球体,P_0是此球的表面上的一个定点,球体上任一点的密度与该点到P_0距离的平方成正比(比例常数$k>0$),求球体的重心位置.

2001 年六

(15) 计算$I=\oint_L(y^2-z^2)\mathrm{d}x+(2z^2-x^2)\mathrm{d}y+(3x^2-y^2)\mathrm{d}z$,其中$L$是平面$x+y+z=2$与柱面$|x|+|y|=1$的交线,从$z$轴正向看去,$L$为逆时针方向.

2001 年八

(16) 设有一高度为$h(t)$(t为时间)的雪堆在融化过程中,其侧面积满足方程$z=h(t)-\dfrac{2(x^2+y^2)}{h(t)}$(设长度单位为厘米,时间单位为小时),已知体积减少的速率与侧面积成正比(比例系数为0.9),问高度为130(厘米)的雪堆全部融化需多少小时?

2002 年五

(17) 计算二重积分$\iint\limits_D\mathrm{e}^{\max\{x^2,y^2\}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中$D=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1\}$.

2002 年六

(18) 设函数$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内具有一阶连续导数,L是上半平面$(y>0)$内的有向分段光滑曲线,其起点为(a,b),终点为(c,d).记