普通高等教育“十五”国家级规划教材

工科数学分析基础

(第二版)(下册)

马知恩　王绵森　主编

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

普通高等教育“十五”国家级规划教

工科数学分析基础

（第 二 版）

下 册

马知恩 王绵森 主编

高等教育出版社

内容提要

本书第一版为教育部“高等教育面向21世纪教学内容和课程体系改革计划”的研究成果，是面向21世纪课程教材和教育部工科数学学科“九五”规划教材，同时又是普通高等教育“九五”国家级重点教材。第二版是普通高等教育“十五”国家级规划教材，保持了第一版的框架结构和主要特色。全书分为上下两册。上册主要内容为一元微积分和无穷级数，下册主要内容为多元函数微积分，常微分方程组，无限维分析入门。

本书在编写时，适当降低了某些内容的难度，并改写了部分内容，使得整体思路更加明确，更易被读者接受。从应用的需要考虑，增添了相关的内容。在习题的选配上，分为A、B两类，并增加了基本训练习题。

本书可供高等理工科院校对数学要求较高的非数学类专业本科生教材，也可供其他专业选用和社会读者阅读。

图书在版编目（CIP）数据

工科数学分析基础. 下册 / 马知恩，王绵森主编.
2版.—北京：高等教育出版社，2006.2
ISBN 7-04-018751-5

Ⅰ.工… Ⅱ.①马…②王… Ⅲ.数学分析-高等学校-教材 Ⅳ.O17

中国版本图书馆CIP数据核字（2005）第161080号

策划编辑 马　丽　**责任编辑** 李　陶　**封面设计** 王凌波　**责任绘图** 尹文军
版式设计 马静如　**责任校对** 殷　然　**责任印制** 韩　刚

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-58581118
社　　址	北京市西城区德外大街4号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100011	网　　址	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
			http://www.landraco.com.cn
经　　销	蓝色畅想图书发行有限公司	畅想教育	http://www.widedu.com
印　　刷	高等教育出版社印刷厂		
		版　　次	1998年11月第1版
开　　本	787×960　1/16		2006年2月第2版
印　　张	28.25	印　　次	2006年2月第1次印刷
字　　数	700 000	定　　价	29.40元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换。
版权所有　侵权必究

物料号　18751-00

目　　录

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

第五章　多元函数微分学及其应用

在上册中，我们讨论了一元函数微积分，研究的对象是仅依赖于一个自变量的一元函数. 然而，在实际问题中常会遇到依赖于两个或两个以上自变量的所谓多元函数，因此，还需要讨论多元函数的微积分. 多元函数微积分的基本概念、理论和方法是一元函数微积分中相应概念、理论和方法的推广与发展，它们既有许多相似之处，又有很多本质上的不同. 读者在学习多元函数微积分的时候，要善于将它与一元函数微积分进行比较，既要注意它们的共同点和相互联系，更要注意它们之间的区别，研究所出现的新情况和新问题. 这样，才能深刻理解，融会贯通.

本章讨论多元函数微分学. 首先简要介绍 n 维 Euclid 空间 $\mathbf{R}^n$ 中点集的初步知识，在此基础上将极限、连续的概念推广到多元函数. 然后重点讲解多元函数（包括多元数量值函数与多元向量值函数）的导数、微分与微分法以及它们的应用，包括利用多元函数微分讨论曲线和曲面的一些基本性质.

第一节　n 维 Euclid 空间 $\mathbf{R}^n$ 中点集的初步知识

由于多元函数的定义域是 n 维 Euclid 空间 $\mathbf{R}^n$ 中的子集，因此，本节先介绍 $\mathbf{R}^n$ 中点集的初步知识.

1.1　n 维 Euclid 空间 $\mathbf{R}^n$

在线性代数中已经学习过 n 维 Euclid 空间 $\mathbf{R}^n$ 的有关知识，现就其中主要之点作如下复习.

我们称一个 $n(n\geqslant 2)$ 元有序实数组

$$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \quad (x_i \in \mathbf{R}, i = 1,2,\cdots,n)$$

为一个 **n 维实向量**，记 n 维实向量全体所构成的集合为

$$\mathbf{R}^n = \{\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \mid x_i \in \mathbf{R}, i = 1,2,\cdots,n\}.$$

设 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\mathbf{R}^n$，$\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,\cdots,y_n)\in\mathbf{R}^n$，定义两个向量的加法为

$$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=(x_1+y_1,x_2+y_2,\cdots,x_n+y_n),\tag{1.1}$$

向量与数 $\alpha\in\mathbf{R}$ 的乘法为

$$\alpha\boldsymbol{x}=(\alpha x_1,\alpha x_2,\cdots,\alpha x_n),\tag{1.2}$$

则 $\mathbf{R}^n$ 按照上述向量加法及数与向量的乘法构成一个 **n 维实向量空间**(或 **n 维实线性空间**).

在 n 维实向量空间 $\mathbf{R}^n$ 中定义两个向量 $\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{y}$ 的**内积**为

$$\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i,\tag{1.3}$$

则 $\mathbf{R}^n$ 按照内积(1.3)构成一个 **n 维 Euclid 空间**.

n 维 Euclid 空间 $\mathbf{R}^n$ 中的向量也称为点，向量 $\boldsymbol{x}$ 的第 i 个分量 x_i 也称为点 $\boldsymbol{x}$ 的第 i 个坐标. $\mathbf{R}^n$ 中的点(向量)常用小写黑体英文字母 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 等表示，有时也用大写英文字母 P、Q 等来表示 $\mathbf{R}^n$ 中的点.

特别地，$\mathbf{R}^2$ 中的点(向量)常用(x,y)来表示，所以可以把 $\mathbf{R}^2$ 看作是 xOy 坐标平面上的全体点所组成的集合；$\mathbf{R}^3$ 中的点(向量)常用(x,y,z)来表示，所以可以把 $\mathbf{R}^3$ 与几何空间看成是等同的.

$\mathbf{R}^n$ 中向量 $\boldsymbol{x}$ 的**长度**(或**范数**)定义为

$$\|\boldsymbol{x}\|=\sqrt{\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}\rangle}=\sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2},\tag{1.4}$$

两点 $\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{y}$ 之间的**距离**定义为

$$\rho(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+\cdots+(x_n-y_n)^2}.\tag{1.5}$$

$\mathbf{R}^n$ 中上述概念是三维空间 $\mathbf{R}^3$ 中相应概念的直接推广.

1.2 $\mathbf{R}^n$ 中点列的极限

现在，我们仿照数列(即 $\mathbf{R}$ 中的点列)极限概念和有关性质来讨论 $\mathbf{R}^n$ 中的点列极限概念和有关性质.

定义 1.1(点列的极限) 设 $\{\boldsymbol{x}_k\}$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中的一个点列，其中 $\boldsymbol{x}_k=(x_{k,1},x_{k,2},\cdots,x_{k,n})$，又设 $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$是 $\mathbf{R}^n$ 中的一固定点，若当 $k\to\infty$ 时，$\rho(\boldsymbol{x}_k,\boldsymbol{a})\to 0$，即

$$\forall\varepsilon>0,\exists N\in\mathbf{N}_+,\text{使得 }\forall k>N,\text{恒有 }\|\boldsymbol{x}_k-\boldsymbol{a}\|<\varepsilon,\tag{1.6}$$

则称点列$\{\boldsymbol{x}_k\}$的**极限存在**,且称 $\boldsymbol{a}$ 为它的**极限**,记作

$$\lim_{k\to\infty}\boldsymbol{x}_k=\boldsymbol{a}\quad 或\quad \boldsymbol{x}_k\to\boldsymbol{a}(k\to\infty).$$

这时也称点列$\{\boldsymbol{x}_k\}$**收敛于** $\boldsymbol{a}$.

定理 1.1　设点列$\{\boldsymbol{x}_k\}\subseteq\mathbf{R}^n$,点 $\boldsymbol{a}\in\mathbf{R}^n$,则$\lim\limits_{k\to\infty}\boldsymbol{x}_k=\boldsymbol{a}$ 的充要条件是$\forall i=1,2,\cdots,n$,都有$\lim\limits_{k\to\infty}x_{k,i}=a_i$.

证　由于$\forall i=1,2,\cdots,n$,恒有

$$|x_{k,i}-a_i|\leqslant\|\boldsymbol{x}_k-\boldsymbol{a}\|.$$

根据定义 1.1 立即可证明必要性. 下面证明充分性. 设$\forall i=1,2,\cdots,n$,都有$\lim\limits_{k\to\infty}x_{k,i}=a_i$,则

$$\forall\varepsilon>0,\exists N_i\in\mathbf{N}_+,使得\ \forall k>N_i,恒有\ |x_{k,i}-a_i|<\frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}.$$

令 $N=\max\{N_1,N_2,\cdots,N_n\}$,则$\forall k>N$,必有

$$|x_{k,i}-a_i|<\frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}(i=1,2,\cdots,n).$$

从而$\forall k>N$,有

$$\|\boldsymbol{x}_k-\boldsymbol{a}\|=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_{k,i}-a_i)^2}<\varepsilon,$$

故$\lim\limits_{k\to\infty}\boldsymbol{x}_k=\boldsymbol{a}$.　▌

定理 1.1 表明,$\mathbf{R}^n$ 中点列$\{\boldsymbol{x}_k\}$收敛于 $\boldsymbol{a}$ 等价于该点列的各个坐标(或分量)所构成的数列$\{x_{k,i}\}$分别收敛于点 $\boldsymbol{a}$ 的相应坐标(或分量)a_i. 因此,它把研究 $\mathbf{R}^n$ 中点列的收敛问题转化为实数列的收敛问题. 这样,第一章中所讨论过的收敛数列的许多性质就可以利用该定理很容易地推广到 $\mathbf{R}^n$ 中的收敛点列. 读者不难证明下面的定理.

定理 1.2　设$\{\boldsymbol{x}_k\}$是 $\mathbf{R}^n$ 中的收敛点列,则

(1) $\{\boldsymbol{x}_k\}$的极限是唯一的;

(2) $\{\boldsymbol{x}_k\}$是有界点列,即$\exists M(\in\mathbf{R})>0$,使得$\forall k\in\mathbf{N}_+$,恒有$\|\boldsymbol{x}_k\|\leqslant M$;

(3) 若 $\boldsymbol{x}_k\to\boldsymbol{a},\boldsymbol{y}_k\to\boldsymbol{b}$,则 $\boldsymbol{x}_k\pm\boldsymbol{y}_k\to\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b},\alpha\boldsymbol{x}_k\to\alpha\boldsymbol{a},\langle\boldsymbol{x}_k,\boldsymbol{y}_k\rangle\to\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$,其中 $\alpha\in\mathbf{R}$;

(4) 若$\{\boldsymbol{x}_k\}$收敛于 $\boldsymbol{a}$,则它的任一子(点)列也收敛于 $\boldsymbol{a}$.

由于 $\mathbf{R}^n$ 中的向量不能比较大小,也不能相除,因此,数列极限中与单调性、

保序性、确界以及商有关的概念与命题不能直接地推广到 $\mathbf{R}^n$ 中的点列. 但是，Bolzano – Weierstrass 定理与 Cauchy 收敛原理在 $\mathbf{R}^n$ 中仍然成立.

利用第一章定理 2.8 不难证明下面的定理.

定理 1.3 (Bolzano – Weierstrass 定理) $\mathbf{R}^n$ 中的有界点列必有收敛子列. ($\mathbf{R}^n$ 中点列 $\{\boldsymbol{x}_k\}$ 的收敛子列的极限也称为 $\{\boldsymbol{x}_k\}$ 的**极限点**.)

设 $\{\boldsymbol{x}_k\}$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中的点列，若

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbf{N}_+, \text{使得 } \forall k > N \text{ 及 } p \in \mathbf{N}_+, \text{恒有 } \|\boldsymbol{x}_{k+p} - \boldsymbol{x}_k\| < \varepsilon,$$

则称 $\{\boldsymbol{x}_k\}$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中的**基本点列**或 **Cauchy 点列**. 类似于定理 1.1 不难证明：$\{\boldsymbol{x}_k\}$ 是 Cauchy 点列的充要条件是 $\forall i = 1, 2, \cdots, n$, $\{x_{k,i}\}$ 都是 Cauchy 数列. 根据第一章中所介绍的数列的 Cauchy 收敛原理，立即可以得到 $\mathbf{R}^n$ 中点列的 Cauchy 收敛原理如下.

定理 1.4 (Cauchy 收敛原理) $\mathbf{R}^n$ 中点列 $\{\boldsymbol{x}_k\}$ 收敛于 $\mathbf{R}^n$ 中的点的充要条件为 $\{\boldsymbol{x}_k\}$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中的 Cauchy 点列.

这个定理刻画了空间 $\mathbf{R}^n$ 的完备性，就是说，$\mathbf{R}^n$ 中的 Cauchy 点列必收敛于 $\mathbf{R}^n$ 中的点. 现代数学中就是以此作为抽象空间完备性定义的，关于这个问题在第八章中再作进一步说明.

1.3 $\mathbf{R}^n$ 中的开集与闭集

本段简要地介绍 $\mathbf{R}^n$ 中点集的基本知识，包括开集、闭集与区域等. 虽然这些概念都是在空间 $\mathbf{R}^n$ 中定义的，但读者可以在平面 $\mathbf{R}^2$ 中去理解它们.

定义 1.2 设 A 是 $\mathbf{R}^n$ 中的一个点集，$\boldsymbol{a} \in \mathbf{R}^n$. 若存在 A 中的点列 $\{\boldsymbol{x}_k\}$, $\boldsymbol{x}_k \neq \boldsymbol{a}$ $(k = 1, 2, \cdots)$，使得 $\boldsymbol{x}_k \to \boldsymbol{a}$ $(k \to \infty)$，则称 $\boldsymbol{a}$ 是 A 的一个**聚点**. A 的所有聚点构成的集合称为 A 的**导集**，记作 A'. 集合 $\overline{A} = A \cup A'$ 称为 A 的**闭包**. 若 $\boldsymbol{a} \in A$，但 $\boldsymbol{a} \overline{\in} A'$，则称 $\boldsymbol{a}$ 为 A 的**孤立点**. 若 $A' \subseteq A$，则称 A 为**闭集**.

由定义易见，集 A 的聚点不一定属于 A. 若 A 的所有聚点都属于 A，则 A 是闭集. 因此，若 A 是闭集，$\{\boldsymbol{x}_k\}$ 是 A 中的任一点列，且 $\boldsymbol{x}_k \to \boldsymbol{a}$ $(k \to \infty)$，则 $\boldsymbol{a} \in A$. 反之亦真. 这说明闭集对于极限运算是封闭的.

例如，设 $A = \left\{ \left(\dfrac{1}{k}, \dfrac{1}{k} \right) \middle| k \in \mathbf{N}_+ \right\}$ 是一平面点集，则点 $(0,0)$ 是 A 的唯一聚点，它不属于 A，并且 $A' = \{(0,0)\}$，$\overline{A} = A \cup \{(0,0)\}$，$A$ 中的所有点都是它的孤立点. A 不是闭集，但 $\overline{A} = A \cup \{(0,0)\}$ 是闭集.

定义 1.3 设 $\boldsymbol{a} \in \mathbf{R}^n$, $\delta > 0$，称点集

$$U(\boldsymbol{a}, \delta) = \{\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n \mid \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}\| < \delta\}$$

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

为以 $\boldsymbol{a}$ 为中心、δ 为半径的**开球**或点 $\boldsymbol{a}$ 的 δ **邻域**，称

$$\mathring{U}(\boldsymbol{a},\delta) = U(\boldsymbol{a},\delta)\setminus\{\boldsymbol{a}\}$$

为点 $\boldsymbol{a}$ 的**去心 δ 邻域**. 它们可分别简记为 $U(\boldsymbol{a})$ 与 $\mathring{U}(\boldsymbol{a})$.

在直线 $\mathbf{R}$ 上，开球 $U(a,\delta)$ 就是开区间 $(a-\delta,a+\delta)$；在平面 $\mathbf{R}^2$ 上，开球 $U(\boldsymbol{a},\delta)$ 就是以 $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2)$ 为中心，δ 为半径的圆周 $(x_1-a_1)^2+(x_2-a_2)^2=\delta^2$ 内的所有点构成的集合（称为开圆盘）；在空间 $\mathbf{R}^3$ 中，$U(\boldsymbol{a},\delta)$ 就是以 $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,a_3)$ 为中心，δ 为半径的球面 $(x_1-a_1)^2+(x_2-a_2)^2+(x_3-a_3)^2=\delta^2$ 内的所有点构成的集合，也就是通常所说的开球.

与数列极限类似，$\mathbf{R}^n$ 中点列收敛的概念也可以用邻域来刻画. 设 $\{\boldsymbol{x}_k\}$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中的一个点列，若

$$\forall\varepsilon>0,\exists N\in\mathbf{N}_+,\text{使得 }\forall k>N,\text{恒有 }\boldsymbol{x}_k\in U(\boldsymbol{a},\varepsilon),$$

则称点列 $\{\boldsymbol{x}_k\}$ 收敛于 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{a}$ 是 $\{\boldsymbol{x}_k\}$ 的极限.

定理 1.5　设 A 是 $\mathbf{R}^n$ 中的一个点集，$\boldsymbol{a}\in\mathbf{R}^n$，则 $\boldsymbol{a}\in A'$ 的充要条件为 $\forall\varepsilon>0$，$\mathring{U}(\boldsymbol{a},\varepsilon)\cap A\neq\varnothing$. 也就是说，$\boldsymbol{a}$ 为 A 的聚点当且仅当 $\boldsymbol{a}$ 的任何去心 ε 邻域中都含有 A 中的点.

证　必要性　设 $\boldsymbol{a}\in A'$，根据定义 1.2，存在 A 中的点列 $\{\boldsymbol{x}_k\}$，$\boldsymbol{x}_k\neq\boldsymbol{a}(k=1,2,\cdots)$，使得 $\lim\limits_{k\to\infty}\boldsymbol{x}_k=\boldsymbol{a}$. 用邻域来表示，即 $\forall\varepsilon>0$，$\exists N\in\mathbf{N}_+$，使得 $\forall k>N$，恒有 $\boldsymbol{x}_k\in\mathring{U}(\boldsymbol{a},\varepsilon)$. 由于 $\{\boldsymbol{x}_k\}\subseteq A$，从而得知，$\forall\varepsilon>0$，$\mathring{U}(\boldsymbol{a},\varepsilon)\cap A\neq\varnothing$.

充分性　若 $\forall\varepsilon>0$，$\mathring{U}(\boldsymbol{a},\varepsilon)\cap A\neq\varnothing$，则 $\forall k\in\mathbf{N}_+$，取 $\varepsilon_k=\dfrac{1}{k}$，必存在点 $\boldsymbol{x}_k\in\mathring{U}(\boldsymbol{a},\varepsilon_k)\cap A$. 这就是说，存在 A 中的点列 $\{\boldsymbol{x}_k\}$，$\boldsymbol{x}_k\neq\boldsymbol{a}(k=1,2,\cdots)$，并且 $\|\boldsymbol{x}_k-\boldsymbol{a}\|<\varepsilon_k=\dfrac{1}{k}$，从而 $\lim\limits_{k\to\infty}\boldsymbol{x}_k=\boldsymbol{a}$，故 $\boldsymbol{a}\in A'$.　▌

由定义 1.2，若 $A'=\varnothing$，则 A 为闭集. 因此，单点集和有限点集都是闭集.

定义 1.4　设 $A\subseteq\mathbf{R}^n$，$\boldsymbol{a}\in\mathbf{R}^n$.

(1) 若存在 $\delta>0$，使 $U(\boldsymbol{a},\delta)\subseteq A$，则称 $\boldsymbol{a}$ 是集 A 的**内点**. 由 A 的所有内点构成的集称为 A 的**内部**，记作 A° 或 $\operatorname{int}A$；

(2) 若存在 $\delta>0$，使 $U(\boldsymbol{a},\delta)\cap A=\varnothing$，则称 $\boldsymbol{a}$ 是集 A 的**外点**. A 的所有外点构成的集称为 A 的**外部**，记作 $\operatorname{ext}A$；

(3) 若对任何 $\delta>0$，$U(\boldsymbol{a},\delta)$ 中既含有 A 中的点，也含有 A 的余集 A^c 中的点，则称 $\boldsymbol{a}$ 为集 A 的**边界点**. A 的所有边界点构成的集称为 A 的**边界**，记作 ∂A.

由定义易见，$\mathbf{R}^n$ 中的任一点是且仅是 A 的内点、外点与边界点中的一种，即

$$\mathbf{R}^n = A^\circ \cup \partial A \cup \operatorname{ext} A,$$

且右端三个点集互不相交（图 5.1）.

例 1.1　设 $A=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid (x-x_0)^2+(y-y_0)^2<\delta^2\}$，证明：

$$A^\circ = A, \partial A = \{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid (x-x_0)^2+(y-y_0)^2=\delta^2\},$$

$$\overline{A} = A\cup\partial A = \{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid (x-x_0)^2+(y-y_0)^2\leqslant\delta^2\}.$$

证　题中关于边界 ∂A 和闭包的结论是显然的，下面证明 $A^\circ=A$. 由定义知 $A^\circ\subseteq A$，因此只要证明 $A\subseteq A^\circ$. 设 $(\tilde{x},\tilde{y})\in A$，取 $\varepsilon<\delta-\sqrt{(\tilde{x}-x_0)^2+(\tilde{y}-y_0)^2}$，则点 $(\tilde{x},\tilde{y})$ 的 ε 邻域 $U((\tilde{x},\tilde{y}),\varepsilon)\subseteq A$，因而 $(\tilde{x},\tilde{y})$ 是 A 的内点（图 5.2），故 $A\subseteq A^\circ$. ▌

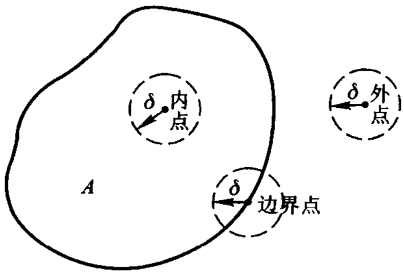


图 5.1

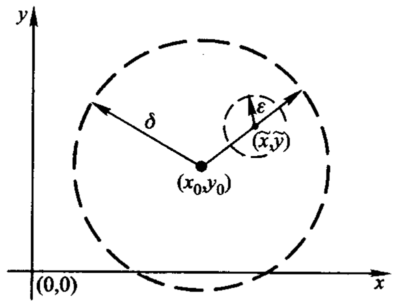


图 5.2

由定义易见，对于 $\mathbf{R}^n$ 中的任一点集 A，必有

$$\overline{A} = A\cup\partial A.$$

特别地，称开球与它的边界之并为**闭球**，记作

$$\overline{U}(\boldsymbol{a},\delta) = \{\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n \mid \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}\|\leqslant\delta\}.$$

例 1.2　设 $A=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid x^2+y^2=0, 1<x^2+y^2\leqslant 4\}$（如图 5.3(a) 所示）. 由定义 1.4 易知，$A^\circ=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid 1<x^2+y^2<4\}$，$\operatorname{ext} A=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid 0<x^2+y^2<1, x^2+y^2>4\}$，$\partial A=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid x^2+y^2=1, x^2+y^2=4\}\cup\{(0,0)\}$，原点 $(0,0)$ 是 A 的孤立点，$\overline{A}=A\cup\partial A=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid x^2+y^2=0, 1\leqslant x^2+y^2\leqslant 4\}$（$A^\circ$、$\operatorname{ext} A$、$\partial A$ 及 $\overline{A}$ 分别如图 5.3(b)、(c)、(d) 及 (e) 所示）.

定义 1.5　设 $A\subseteq\mathbf{R}^n$，若 $A^\circ=A$，即 A 中的点全是 A 的内点，则称 A 为**开集**.

下面的定理刻画了开集与闭集的关系.

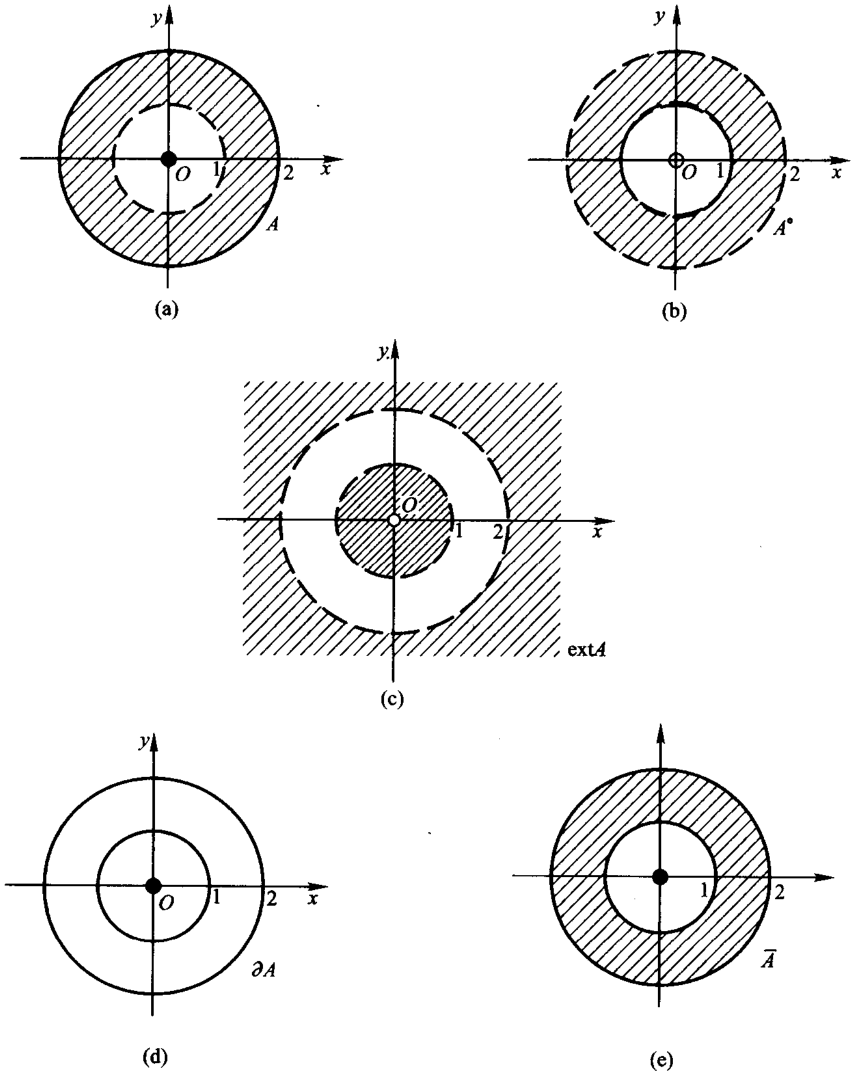


图 5.3

定理 1.6 $A \subseteq \mathbf{R}^n$ 是开集的充要条件为 A^c 是闭集.

*__证__ 必要性 设 A 是开集,故 $A^\circ = A$. 为了证明 A^c 是闭集,只要证明 $(A^c)' \subseteq A^c$. 若 $(A^c)' = \varnothing$,则显然有 $(A^c)' \subseteq A^c$. 若 $(A^c)' \neq \varnothing$,设 $\boldsymbol{x} \in (A^c)'$,则 $\forall \varepsilon > 0$,

$$\mathring{U}(\boldsymbol{x}, \varepsilon) \cap A^c \neq \varnothing.$$

由内点的定义知 $\boldsymbol{x} \overline{\in} A^\circ = A$,即 $\boldsymbol{x} \in A^c$,故 $(A^c)' \subseteq A^c$.

充分性　设 A^c 是闭集，即 $(A^c)'\subseteq A^c$. 为了证明 A 是开集，由于 $A^\circ\subseteq A$，所以只要证明 $A\subseteq A^\circ$. 设 $\boldsymbol{x}\in A$，则 $\boldsymbol{x}\overline{\in}A^c$. 又因 A^c 为闭集，故有 $(A^c)'\subseteq A^c$，所以有 $\boldsymbol{x}\overline{\in}(A^c)'$. 根据定理 1.6，必 $\exists\delta_0>0$，使 $\mathring{U}(\boldsymbol{x},\delta_0)\cap A^c=\varnothing$，故 $\mathring{U}(\boldsymbol{x},\delta_0)\subseteq A$，又由 $\boldsymbol{x}\in A$，知 $\boldsymbol{x}\in A^\circ$，所以 $A\subseteq A^\circ$. ▎

例 1.3　$\mathbf{R}^n$ 中的开球 $U(\boldsymbol{a},\delta)$ 与开区间

$$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=\{\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\mathbf{R}^n\mid a_i<x_i<b_i,i=1,2,\cdots,n\}$$

都是开集. 闭球 $\overline{U}(\boldsymbol{a},\delta)$ 与闭区间

$$[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]=\{\boldsymbol{x}\in(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\mathbf{R}^n\mid a_i\leqslant x_i\leqslant b_i,i=1,2,\cdots,n\}$$

都是闭集. 例 1.2 中的 A° 与 ext A 都是开集，∂A 与 $\overline{A}$ 都是闭集.

读者应当注意，开集与闭集是常常碰到的两类点集，但是还存在着很多其他类型的点集. 例如，直线 $\mathbf{R}$ 上的有理点集与无理点集既不是开集，又不是闭集，因为它们都没有内点，而且任一实数都是它们的聚点. 因此，不能说一个点集“非开即闭”.

下面的定理刻画了开集的特征.

定理 1.7　在 n 维 Euclid 空间 $\mathbf{R}^n$ 中，开集有如下性质：

(1) 空集 $\varnothing$ 与全空间 $\mathbf{R}^n$ 是开集；

(2) 任意多个开集的并是开集；

(3) 有限多个开集的交是开集.

***证**　根据定义，性质(1)显然成立.

(2) 设 $A_\alpha\subseteq\mathbf{R}^n(\alpha\in\Lambda,\Lambda$ 称为指标集)是一族开集. 任取 $\boldsymbol{x}\in\bigcup\limits_{\alpha\in\Lambda}A_\alpha$，则必 $\exists\alpha_0\in\Lambda$ 使 $\boldsymbol{x}\in A_{\alpha_0}$. 由于 A_{α_0} 是开集，所以 $\exists\delta>0$，使 $U(\boldsymbol{x},\delta)\subseteq A_{\alpha_0}\subseteq\bigcup\limits_{\alpha\in\Lambda}A_\alpha$，即 $\boldsymbol{x}$ 是 $\bigcup\limits_{\alpha\in\Lambda}A_\alpha$ 的内点，故 $\bigcup\limits_{\alpha\in\Lambda}A_\alpha$ 是开集.

(3) 设 $A_k\subseteq\mathbf{R}^n(k=1,2,\cdots,m)$ 是开集，任取 $\boldsymbol{x}\in\bigcap\limits_{k=1}^m A_k$，则 $\boldsymbol{x}\in A_k(k=1,2,\cdots,m)$. 由于 A_k 是开集，所以 $\forall k=1,2,\cdots,m$，$\exists\delta_k>0$，使 $U(\boldsymbol{x},\delta_k)\subseteq A_k$. 取 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_m\}$，则

$$U(\boldsymbol{x},\delta)\subseteq U(\boldsymbol{x},\delta_k)\subseteq A_k(k=1,2,\cdots,m).$$

因此，$U(\boldsymbol{x},\delta)\subseteq\bigcap\limits_{k=1}^m A_k$，即 $\boldsymbol{x}$ 是 $\bigcap\limits_{k=1}^m A_k$ 的内点，故 $\bigcap\limits_{k=1}^m A_k$ 是开集. ▎

由此定理，读者不难利用对偶原理(第一章定理 1.2)证明闭集的三个对应的基本性质：

(1) 空集$\varnothing$和全空间 $\mathbf{R}^n$ 是闭集；

(2) 任意多个闭集的交是闭集；

(3) 有限多个闭集的并是闭集.

1.4　$\mathbf{R}^n$ 中的紧集与区域

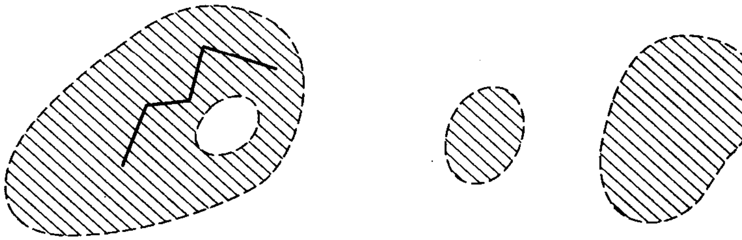
设 A 是 $\mathbf{R}^n$ 中的一个点集，如果存在一个常数 $M>0$，使得对于所有的 $\boldsymbol{x}\in A$，都有 $\|\boldsymbol{x}\|\leqslant M$，则称 A 是**有界集**，否则称为**无界集**. 显然，有界集的几何含义是它能包含在 $\mathbf{R}^n$ 中一个以原点 $\mathbf{0}$ 为中心、M 为半径的闭球 $\overline{U}(\mathbf{0},M)$ 中.

定义 1.6　设 A 是 $\mathbf{R}^n$ 中的一个点集，若 A 是有界闭集，则称 A 为**紧集**.

根据 Bolzano – Weierstrass 定理，若 A 是 $\mathbf{R}^n$ 中的紧集，则 A 中任何点列都有收敛于 A 中点的子列.

定义 1.7　设 $A\subseteq\mathbf{R}^n$ 是一个点集，如果 A 中的任意两点 $\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{y}$ 都能用完全属于 A 的有限个线段①联结起来，则称 A 是**连通集**. 连通的开集称为**区域**. 区域与它的边界之并称为**闭区域**. ②

显然，$\mathbf{R}^2$ 中的开圆盘是区域，闭圆盘是闭区域，图 5.4(a) 所示的 $\mathbf{R}^2$ 的点集是区域，图 5.4(b) 所示点集不是区域，在开圆盘中去掉任意一条直径后所得到的集合也不是区域，因为它们都破坏了集合的连通性.



(a)　(b)

图 5.4

设 $A\subseteq\mathbf{R}^n$，若联结 A 中任意两点的线段都属于 A，即若 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2\in A$，则 $\forall t\in[0,1]$，$t\boldsymbol{x}_1+(1-t)\boldsymbol{x}_2\in A$，则称 A 是 $\mathbf{R}^n$ 中的**凸集**. 由定义 1.7 得知，任何凸集都是连通的，因而任何凸开集都是区域.

---

①　设 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中两个不同点，称 $\mathbf{R}^n$ 的点集

$$\{t\boldsymbol{a}+(1-t)\boldsymbol{b}\mid t\in\mathbf{R},0\leqslant t\leqslant 1\}$$

为 $\mathbf{R}^n$ 中联结点 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的**线段**.

②　严格地说，所谓区域是指开区域，但有时区域也用作开区域与闭区域的统称.

习题　5.1

(A)

1. 设$\{\boldsymbol{x}_k\}$为$\mathbf{R}^n$中的点列,$\boldsymbol{a}\in\mathbf{R}^n$,$\lim\limits_{k\to\infty}\boldsymbol{x}_k=\boldsymbol{a}$,证明:$\lim\limits_{k\to\infty}\|\boldsymbol{x}_k\|=\|\boldsymbol{a}\|$.

2. 求平面$\mathbf{R}^2$中下列点列的极限(其中$n\in\mathbf{N}_+$):

(1) $\left(\dfrac{(-1)^n}{n},\dfrac{n}{n-1}\right)$;　　(2) $\left(\dfrac{n^2+1}{n^2-n-1},\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\right)$.

3. 证明定理1.2中的(2),(4).

4. 求下列各集的导集,闭包,并说明是否为闭集:

(1) $A=\{(x,y)\mid x^2+y^2>2\}$;　　(2) $A=\left\{\left(\dfrac{1}{m},\dfrac{1}{n}\right)\middle| m,n\in\mathbf{N}_+\right\}$;

(3) $A=\{(x,y)\mid x,y$为整数$\}$;　　(4) $A=\{(x,y)\mid x,y$为有理数$\}$.

5. 下列集合是开集还是闭集,求出它们的内部、边界和闭包:

(1) $A=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2\mid x\geqslant 0,y\geqslant 0,x+y\leqslant 1\}$;

(2) $A=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2\mid y<x^2\}$;

(3) $A=\{\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^2\mid \|\boldsymbol{x}\|=1\}$;

(4) $A=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2\mid -1<x<1,y=0\}$.

6. 第5题中的集合是否为区域? 有界还是无界?

7. 说明下列集合是紧集:

(1) 有限点集;　　(2) $A=\left\{0,1,\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{3},\cdots\right\}$;

(3) $\mathbf{R}^n$中的闭区间;　　(4) $\mathbf{R}^n$中的单位球面$\{\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n\mid \|\boldsymbol{x}\|=1\}$.

(B)

1. 设$A\subseteq\mathbf{R}^n$是一个点集. 证明:

(1) A°与$\operatorname{ext}A$是开集;

(2) A',∂A是闭集;

(3) A为开集$\Leftrightarrow A\cap\partial A=\varnothing$.

2. 以$n=2$为例证明**聚点原理**:$\mathbf{R}^n$中的有界无限点集至少有一个聚点.

第二节　多元函数的极限与连续性

本节首先介绍多元数量值函数与多元向量值函数的概念,然后将一元函数

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com