高等教育教材

YIYUAN WEIJIFEN

一元微积分

YIYUAN WEIJIFEN

YIYUAN WEIJIFEN

一元微积分教材编写组

高等教育出版社

高　等　教　育　教　材

一元微积分

一元微积分教材编写组

高等教育出版社

内容提要

本书根据《应用数学基础》基本要求编写的. 供高等专科学校的学生和五年制高职学生使用. 本书具有工程类、财经类及农林类三书的特点,是一本各专业均可通用的教材,内容包含有除级数以外的一元微积分的全部内容. 遵循"拓宽基础、强化能力、立足应用"和"必需、够用为度"的原则,介绍了最基本知识和解决实际问题的方法. 本书也可作为成人高校和中职学校的教材.

图书在版编目(CIP)数据

一元微积分/《一元微积分》编写组编. —北京: 高等教育出版社, 2003.7

ISBN 7-04-013349-0

Ⅰ.一… Ⅱ.一… Ⅲ.微积分-高等学校: 技术学校-教材 Ⅳ.0172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 047611 号

责任编辑 蒋锦梁 **封面设计** 吴昊 **责任印制** 潘文瑞

书 名 一元微积分
编 著 教材编写组

出版发行 高等教育出版社
社 址 北京市西城区德外大街 4 号
邮政编码 100011
总 机 010-82028899
传 真 021-56965341

购书热线 010-64054588
021-56964871
免费咨询 800-810-0598
网 址 http://www.hep.edu.cn
http://www.hep.com.cn
http://www.hepsh.com

排 版 南京理工排版校对公司
印 刷 上海三印时报印刷有限公司

开 本 787 × 1092 1/16
印 张 14.75
字 数 380 000

版 次 2003 年 8 月第 1 版
印 次 2003 年 8 月第 1 次
定 价 14.80 元

高专高职教材编委会

编 者 的 话

根据2000年教育部《应用数学基础课程基本要求》和1996年国家教委颁布的专科学校《高等数学课程教学基本要求》，我们编写了此教材，供高专、高职学生各专业使用，也可作为中等职业学校的数学教材。

本教材遵循“拓宽基础、强化能力、立足应用”与“必需、够用为度”的原则编写。强调与计算机应用相结合，书中编写了Mathematica软件的使用简介。教师应在教学中适当安排时间组织数学实验，以便学生掌握该软件，解决相关问题。

为把学生培养成有较宽的数学基础，具有创新意识，懂得管理，有较强应用能力的高素质人才，本书对传统数学体系削枝强干，力求深入浅出，在不影响数学体系的前提下，淡化理论推导，强化实践能力培养。教材加强了例题和习题的编写，使数学理论和实际应用结合得更紧密。教材渗透了数学建模思想，整体上有一定的创新。

教材展示了数学在经济活动中的应用，编写了大量新颖的例题、习题。这些题目有助于开阔学生视野，启迪思维，激发学生对数学的学习兴趣，从而不仅会学数学，也会用数学。教师可根据专业的特点进行选讲，同时也有利于学生自学。教材每节都有对知识的基本要求，这对于帮助学生掌握知识会有所裨益。

教材富有弹性，大部分内容是用宋体印刷的，少部分内容是用楷体印刷的。楷体部分的内容，供教师根据专业的特点与学生的实际选用。本书立足“好教、好学”，每章复习题分A和B两组题。A组为基本题；B组为难度稍大的题，供学生选用。在内容选择和文字叙述上，始终贯穿编写原则，力求使本教材成为师生欢迎的教材。

本书由周世武任主编、陈少云、陈鉴、许栩任副主编，安雪梅、兰华龙等参加编写，由林军任主审，张一新、鄢祝波任副主审，参与审稿的有许必才。

四川大学数学科学学院熊华鑫、白苏华教授审阅了全书稿，提出了许多宝贵意见，在此表示衷心的感谢。

由于编者水平有限和时间仓促，错误之处在所难免，恳请使用本教材的广大师生批评指正，以便我们修订提高。

一元微积分教材编写组

2003年5月

目　　录

第一章　极限与连续

极限是微积分学的重要基本概念，它是导数、定积分以及重积分的基础，而连续函数也是微积分学研究的主要对象. 本章将在复习和加深函数概念的基础上，首先介绍函数极限的概念，然后讨论函数极限的性质、运算法则，最后，介绍函数连续性的概念.

§1-1　初等函数

基本要求

1. 复习函数的基本概念和基本性质；
2. 理解复合函数的概念，熟练掌握复合函数的分解；
3. 能够就一些简单实际问题建立数学关系式.

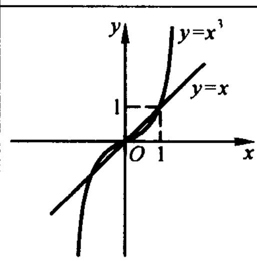
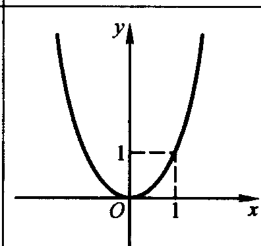
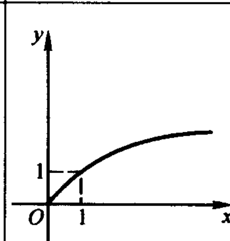
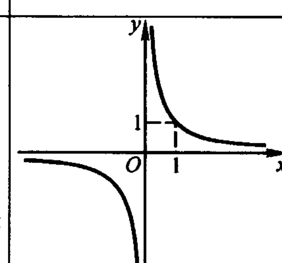
一、基本初等函数

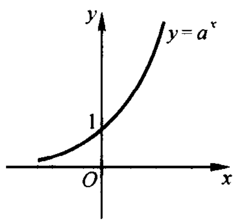
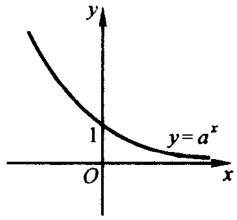
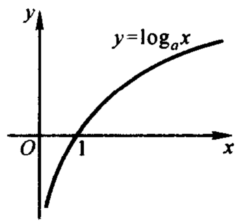
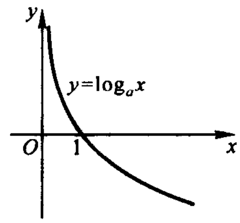
我们已经学习了函数的定义及其有关概念. 为了今后学习方便，下面将函数的有关知识重述一下.

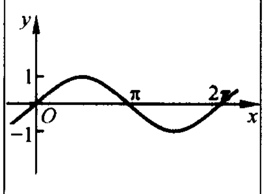
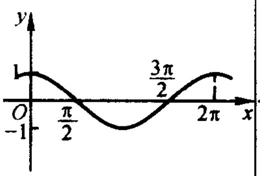
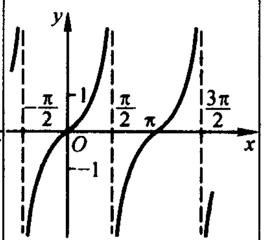
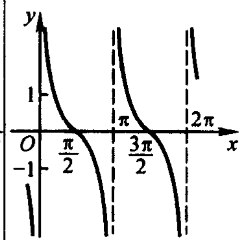
设 D 为一个数集. 如果对于 D 中的每一个元素 x，按照某个对应关系 f，y 都有唯一确定的值与它对应，则 y 就称为定义在 D 中的 x 的**函数**，记为 $y = f(x)$，x 称为**自变量**，数集 D 称为函数的**定义域**，当 x 取遍 D 中的一切元素时，与它对应的函数值的集合 M 称为函数的**值域**.

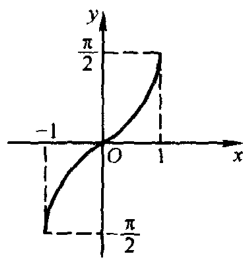
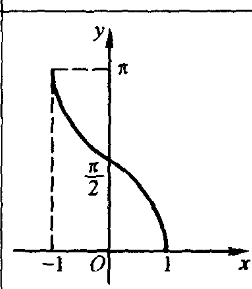
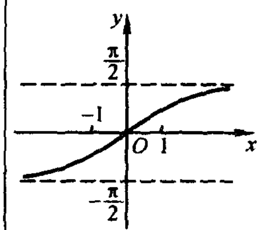
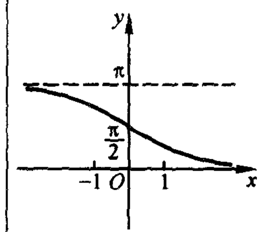
在函数 $y = f(x)$ 中，当 x 取定 $x_0(x_0 \in D)$ 时，则称 $f(x_0)$ 为 $y = f(x)$ 在 x_0 处的函数值.

我们已学过的幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数统称为**基本初等函数**(basic elementary functions). 现将其性质和图像罗列如下：

函　数	幂函数 $y = x^{\alpha}$			
	$\alpha = 1, 3$	$\alpha = 2$	$\alpha = \frac{1}{2}$	$\alpha = -1$
图　像				
定义域	$(-\infty, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$	$[0, +\infty)$	$(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$
值　域	$(-\infty, +\infty)$	$[0, +\infty)$	$[0, +\infty)$	$(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$
奇偶性	奇函数	偶函数	非奇非偶	奇函数
单调性	单调递增	在$(-\infty, 0]$内单调递减 在$[0, +\infty)$内单调递增	单调递增	在$(-\infty, 0)$,$(0, +\infty)$ 内分别单调递减

函　数	指数函数 $y=a^x(a>0,\ a\neq 1)$		对数函数 $y=\log_a x\ (a>0,\ a\neq 1)$	
	$a>1$	$0<a<1$	$a>1$	$0<a<1$
图　像				
定义域	$(-\infty,+\infty)$	$(-\infty,+\infty)$	$(0,+\infty)$	$(0,+\infty)$
值　域	$(0,+\infty)$	$(0,+\infty)$	$(-\infty,+\infty)$	$(-\infty,+\infty)$
单调性	单调递增	单调递减	单调递增	单调递减

函　数	$y=\sin x$（正弦函数）	$y=\cos x$（余弦函数）	$y=\tan x$（正切函数）	$y=\cot x$（余切函数）
图　像				
定义域	$(-\infty,+\infty)$	$(-\infty,+\infty)$	$\left(k\pi-\frac{\pi}{2},\ k\pi+\frac{\pi}{2}\right)$ $(k\in\mathbf{Z})$	$[k\pi,\ (k+1)\pi]$ $(k\in\mathbf{Z})$
值　域	$[-1,\ 1]$	$[-1,\ 1]$	$(-\infty,+\infty)$	$(-\infty,+\infty)$
奇偶性	奇函数	偶函数	奇函数	奇函数
周期性	$T=2\pi$	$T=2\pi$	$T=\pi$	$T=\pi$
单调性 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$	单调递增	单调递减	单调递增	单调递减
单调性 $\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$	单调递减	单调递减	单调递增	单调递减
单调性 $\left(\pi,\frac{3\pi}{2}\right)$	单调递减	单调递增	单调递增	单调递减
单调性 $\left(\frac{3\pi}{2},2\pi\right)$	单调递增	单调递增	单调递增	单调递减

函　数	$y=\arcsin x$ （反正弦函数）	$y=\arccos x$ （反余弦函数）	$y=\arctan x$ （反正切函数）	$y=\operatorname{arccot} x$ （反余切函数）
图　像				
定义域	$[-1,1]$	$[-1,1]$	$(-\infty,+\infty)$	$(-\infty,+\infty)$
值　域	$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$	$[0,\pi]$	$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$	$(0,\pi)$
单调性	单调递增	单调递减	单调递增	单调递减
$f(-x)$	$\arcsin(-x)=$ $-\arcsin x$	$\arccos(-x)=$ $\pi-\arccos x$	$\arctan(-x)=$ $-\arctan x$	$\operatorname{arccot}(-x)=$ $\pi-\operatorname{arccot} x$

二、复合函数

设某企业的收入 R 是产量 q 的函数

$$R=f(q)=3q+9 \tag{1}$$

但企业的产量 q 又是投入的劳动力 l 的函数

$$q=g(l)=2l^2-4l+6 \tag{2}$$

将(2)代入(1)，得

$$R=f[g(l)]=6l^2-12l+27 \tag{3}$$

上式为收入 R 与投入的劳动力 l 之间的关系，即总收入 R 为投入的劳动力 l 的函数. 下面我们就讨论这类函数.

定义 1　设 y 是 u 的函数：$y=f(u)$，而 u 又是 x 的函数：$u=g(x)$，且 $g(x)$的函数值的全部或部分在 $f(u)$的定义域内，此时称 y(通过 u)与 x 的函数关系 $y=f[g(x)]$，是 $y=f(u)$ 和 $u=g(x)$ **复合而成的函数**(compound function)，简称 x 的**复合函数**，称 u 为**中间变量**(intermediate argument).

例 1　试将下列各函数 y 表示成 x 的复合函数：

(1) $y=\sqrt{u}$, $u=x^3+x^2+1$;　　　　(2) $y=\ln u$, $u=2+v^2$, $v=\sec x$.

解　(1) $y=\sqrt{u}=\sqrt{x^3+x^2+1}$，即 $y=\sqrt{x^3+x^2+1}$；

(2) $y=\ln u=\ln(2+v^2)=\ln(2+\sec^2 x)$，即 $y=\ln(2+\sec^2 x)$.

例 2　指出下列各函数的复合过程，并求其定义域：

(1) $y=\sqrt{x^2-3x+2}$;　　(2) $y=\left(\arcsin\dfrac{1}{x}\right)^2$;　　(3) $y=\lg(2+\tan^2 x)$.

解　(1) $y=\sqrt{x^2-3x+2}$ 是由 $y=\sqrt{u}$, $u=x^2-3x+2$ 这两个函数复合而成的. 要使函数 $y=\sqrt{x^2-3x+2}$ 有意义，须 $x^2-3x+2\geqslant 0$. 解此不等式，得 $y=\sqrt{x^2-3x+2}$ 的定义域为

$$(-\infty, 1] \cup [2, +\infty);$$

(2) $y=\left(\arcsin\dfrac{1}{x}\right)^2$ 是由 $y=u^2$, $u=\arcsin v$, $v=\dfrac{1}{x}$ 这三个函数复合而成的. 要使函数 $y=\left(\arcsin\dfrac{1}{x}\right)^2$ 有意义, 只须 $\arcsin\dfrac{1}{x}$ 有意义, 即 $\left|\dfrac{1}{x}\right|\leqslant 1$. 因此 $y=\left(\arcsin\dfrac{1}{x}\right)^2$ 的定义域为

$$(-\infty, -1] \cup [1, +\infty);$$

(3) $y=\lg(2+\tan^2 x)$ 是由 $y=\lg u$, $u=2+v^2$, $v=\tan x$ 这三个函数复合而成. 当 $x=k\pi+\dfrac{\pi}{2}$ $(k\in\mathbf{Z})$ 时, $\tan x$ 不存在; 当 $x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2}$ 时, $2+\tan^2 x>0$, 因此 $y=\lg(2+\tan^2 x)$ 的定义域为

$$\left\{x \,\middle|\, x\neq k\pi+\frac{\pi}{2},\ k\in\mathbf{Z}\right\} \text{或} \left(k\pi-\frac{\pi}{2},\ k\pi+\frac{\pi}{2}\right),\ k\in\mathbf{Z}.$$

应当指出:(1)并不是任何两个函数: $y=f(u)$, $u=\varphi(x)$ 都可以复合成一个函数,这两个函数是否可以复合,关键在于外层函数 $y=f(u)$ 的定义域与内层函数 $u=\varphi(x)$ 的值域的交集是否为空集,若其交集不为空集,则这两个函数就可以复合成一个新函数,否则便不能复合. 例如 $y=\arcsin u$, $u=1.5+x^2$ 就不能复合成一个函数, 其原因在于 $u=1.5+x^2$ 的值域为 $[1.5, +\infty)$, 它与 $y=\arcsin u$ 的定义域 $[-1, 1]$ 的交集为空集,即 u 的任何函数值都超出了 y 的定义域;

(2) 分析一个复合函数的复合过程时,每个层次都应是基本初等函数(如例 2(2))或常数与基本初等函数的四则运算式(如例 2(3)中的 $2+v^2$); 当分解到常数与自变量的基本初等函数的四则运算式(我们称之为**简单函数**)时就不再分解了(如例 2 中的(1)).

三、初等函数

定义 2 由基本初等函数和常数经过有限次四则运算和有限次复合步骤所构成的函数,称为**初等函数**(elementary function). 显然初等函数能用一个式子表示.

例如, $y=e^{\sin^2(3x+1)}$, $y=(1+\ln x)^5$, $y=\lg\sin e^{x+2}$ 等都是初等函数. 对于分段函数,则需认真考察. 一般地,分段函数若不能用一个式子表示,此时,该分段函数就不是初等函数.

例如,分段函数 $y=\begin{cases}x, & x\geqslant 0\\ -x, & x<0\end{cases}$ 即 $y=\sqrt{x^2}=|x|$, 它是由 $y=\sqrt{u}$, $u=x^2$ 复合而成的,因此它是一个初等函数.

又例如,分段函数 $y=\begin{cases}x+1, & x\geqslant 0\\ x^2+2, & x<0\end{cases}$ 就不能用一个式子表示出来,因此它不是初等函数.

初等函数是常见的函数,它是微积分研究的主要对象.

下面,我们简单介绍在应用中常见的双曲函数.

双曲正弦 $\operatorname{sh} x=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$, **双曲余弦** $\operatorname{ch} x=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$, **双曲正切** $\operatorname{th} x=\dfrac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}=\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$.

易见,它们的定义域均为 $(-\infty, +\infty)$, 双曲正弦、双曲余弦、双曲正切的图像如图 1-1、1-2

所示. 可以证明:双曲正弦和双曲正切为奇函数;双曲余弦为偶函数.

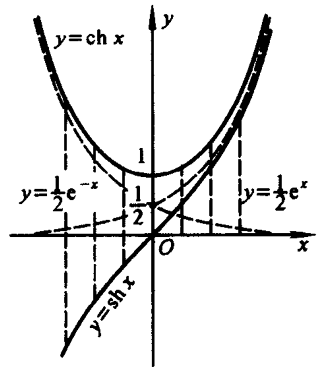


图 1-1

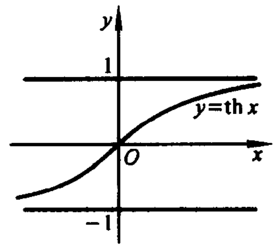


图 1-2

定义 3 设函数 $y=f(x)$ 在集合 X 上有定义(X 可以是函数$y=f(x)$ 的定义域,也可以是定义域的真子集),如果存在一个正数 M,使得对于集 X 中的任一元素 x,都有不等式 $|f(x)|\leqslant M$ 成立,则称函数 $f(x)$在 X 内是**有界的**,此时 M 称为 $f(x)$的**一个界**. 如果这样的 M 不存在,则称函数$f(x)$在 X 内是**无界的**.

例如,函数 $y=\sin x$ 在其定义域$(-\infty,+\infty)$内是有界的,因为对任一 $x\in(-\infty,+\infty)$,都有 $|\sin x|\leqslant 1$ 成立. 又如函数$y=\tan x$ 在$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$内是无界的,因为不存在正数 M,使得对于任一 $x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$,都有 $|\tan x|\leqslant M$成立. 但 $y=\tan x$ 在区间$\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$上是有界的,此时只要$M=1$ 就行了,即 $|\tan x|\leqslant 1,\ x\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$.

四、经济活动中几个常见的函数

为了学习和理解本书的内容,解释有关数学表达式的经济意义,现将经济中的常见函数略加介绍.

1. 需求函数(demand function)

某种商品的需求量是消费者愿意购买此种商品,并且有支付能力购买该种商品的数量,它不一定是商品的实际销售量. 消费者对某种商品的购买量,除了与该商品的价格有直接关系外,还与消费者的收入、偏好、其他可取代的商品的价格有关. 本书中 Q 表示商品数量,用 p 表示商品价格. 现排除其他因素,只考虑商品的需求量 Q 与其价格 p 之间的关系 $Q=D(p)$,我们称 $Q=D(p)$ 为**需求函数**,p 为**需求价格**(demand price),其中,Q 和 p 取非负值. 由需求函数所作出的图形称为**需求曲线**(demand curve). 并称 $Q=D(0)$ 为**最大需求**.

一般来说,需求函数是一个减函数. 需求函数 $Q=D(p)$ 的反函数 $p=D^{-1}(Q)$ 通常称为**需求价格函数**,有时也称为需求函数,当需求函数为一次函数 $Q=a-bp$ 时,通常有 a、$b>0$.

2. 供给(应)函数(supply function)

某种商品的供给量是指在一定时期内,生产者(厂家)在一定价格下,愿意并可能出售商品的数量. 记供给量为 Q,厂家愿意接受的价格为 p,则供给量与价格之间的关系 $Q=S(p)$ 称为**供给(应)函数**,p 称为**供给价格**(supply price),其中 Q 和 p 取非负值. 由供给函数所作的图形称作**供给曲线**(supply curve).

一般来说,供给函数是一个增函数.当供给函数为一次函数 $Q=-c+dp$ 时,其中 c、d 应大于零.供给函数 $Q=S(p)$ 的反函数 $p=S^{-1}(Q)$ 通常称为**供给价格函数**,有时也称为供给函数.

需求函数 $Q=D(p)$ 与供给函数 $Q=S(p)$ 的图像如图 1-3.

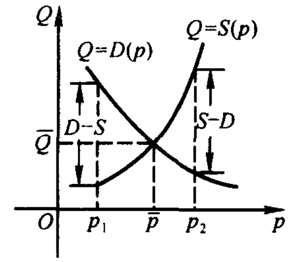


图 1-3

3. 市场的局部均衡(local equicibrium)

从图 1-3 中可以看出,当 $p=p_1$ 时,需求量 $D(p)$ 大于供给量 $S(p)$,此时称 $D(p)-S(p)$ 为**过剩需求**;当 $p=p_2$ 时,供给量 $S(p)$ 大于需求量 $D(p)$,此时称 $S(p)-D(p)$ 为**过剩供给**.对同一种商品市场而言,过剩需求将使价格有上涨趋势;过剩供给将使价格有下跌的趋势.当需求量和供给量相等,即 $D(p)=S(p)$ 时,市场处于相对均衡(the equilibrium of supply and demand),此时需求价格和供给价格相一致,我们称此价格 $\overline{p}$ 为**均衡价格**,曲线 $Q=S(p)$ 和曲线 $Q=S(p)$ 的交点 $(\overline{p},\overline{Q})$ 称作**均衡点**,$\overline{Q}$ 称作**均衡供应量或均衡需求量**.

应该指出,市场的均衡是暂时的,当条件变了,原有的均衡被破坏,从而在新的条件下建立新的均衡.

例如,若 $D(p)=a-bp$,$S(p)=-c+dp$ $(a,b,c,d>0)$,当市场处于局部均衡,即 $D(p)=S(p)$ 时有

$$\overline{Q}=a-b\overline{p}=-c+d\overline{p},$$

从而得

$$\overline{p}=\frac{a+c}{b+d},\quad \overline{Q}=\frac{ad-bc}{b+d}.$$

这里为了保证 $\overline{Q}>0$,还需 $ad-bc>0$.

4. 成本函数和平均成本函数

成本(cost)是指生产某种一定数量产品所需要的费用.它包括**固定成本**(fixed cost)和**变动成本**(variable cost).

固定成本是不随产量而变动的成本.例如厂房费、机器折旧费、一般管理费及管理人员的工资等.变动成本是随产量的变化而变化的成本.例如原材料、燃料和动力费、生产工人的工资等.

若记成本为 C,固定成本为 C_0,Q 为产量,$C_1(Q)$ 为可变成本,则有

$$C=C(Q)=C_0+C_1(Q),$$

其中,$C_0\geqslant 0$;$Q>0$,易见成本函数是增函数.

平均成本(average cost)是生产每单位产品的成本,记为 $\overline{C}$,即

$$\overline{C}=\frac{C(Q)}{Q}=\frac{C_0}{Q}+\frac{C_1(Q)}{Q}.$$

5. 收益函数和利润函数

收益(revenue)是指生产者将产品出售后的收入.**平均收益**是指生产者出售一定数量的商品时,每单位产品所得的平均收入,即单位产品的平均售价.

若记 R 为收益,Q 为产量,$\overline{R}$ 为平均收益,产量为 Q 时的平均售价为 p,则有 $\overline{R}=p$.因此

$$R=R(Q)=\overline{R}Q=pQ,\ \overline{R}=\frac{R(Q)}{Q},$$

其中,Q、R 取正值.

利润(gross profit)**是指收益与成本之差**.**平均利润**是指生产一定数量产品时,每单位产品所

得的利润. 若记利润为 L,平均利润为$\overline{L}$,则有

$$L = L(Q) = R(Q) - C(Q),\ \overline{L} = \frac{L(Q)}{Q} = p - \overline{C}(Q).$$

五、建立函数关系举例

运用数学工具解决实际问题时,往往需要先把变量之间的函数关系表示出来,才能方便地进行计算和分析.

例 3 某罐头厂要生产容积为 $V\ \mathrm{cm}^3$ 的圆柱形罐头盒,将它的表面积表示成底半径的函数,并确定它的定义域.

解 设圆柱的底半径为 r,高为 h,表面积为 S.

因为 $V = \pi r^2 h$,于是$h = \dfrac{V}{\pi r^2}$,根据圆柱表面积公式有$S = 2\pi r^2 + 2\pi rh$,所以有$S = 2\pi r^2 + \dfrac{2V}{r}$.

其定义域为$(0,\ +\infty)$(实际上定义域为 $(0,\ a]$, $a > 0$).

例 4 如图 1-4 所示,电源的电压为 E,内阻为 r,负载电阻为 R,试建立输出功率 P 与负载电阻 R 的函数关系.

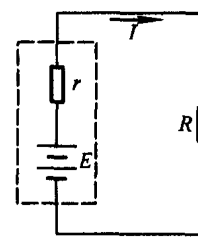


图 1-4

解 设电路中的电流为 I,由电学知 $P = I^2 R$,根据闭合电路的欧姆定律,有 $I = \dfrac{E}{R + r}$,代入上式得 P 与 R 的函数关系为

$$P = \left(\frac{E}{R + r}\right)^2 R\ (R > 0).$$

例 5 某运输公司规定一吨货物的运价为:在 a 公里内,每公里 k 元;超过 a 公里,每增加一公里为$\dfrac{4}{5}k$ 元. 试表示一吨货物的运费 y 和里程 s 之间的函数关系.

解 当里程在 a 公里内 $(0 \leqslant s \leqslant a)$ 时,运费 $y = ks$;当里程超过 a 公里$(s > a)$,则超过的里程为$(s - a)$ 公里时,此时运费为 $y = ka + \dfrac{4}{5}k(s - a)$, 于是

$$y = \begin{cases} ks, & 0 \leqslant s \leqslant a, \\ ka + \dfrac{4}{5}k(s - a), & s > a, \end{cases}$$

这里,y 与 s 的函数关系是用分段函数表示的,函数的定义域为$[0,\ +\infty)$.

建立实际问题的函数关系,首先应理解题意,分析问题中的量,找出常量、变量,选定自变量,根据问题所给的几何特性、物理规律或其他知识建立变量间的等量关系,整理化简得函数式. 有时还要根据给定条件确定函数式中常数的数值,然后根据题意,写出函数定义域.

习题 1-1

1. 判断题:

(1) $y = \sin 2x$ 是基本初等函数; ( )

(2) $y = 2a^x$(其中 $a > 0$ 且 $a \neq 1$) 不是基本初等函数; ( )

(3) $y = \mathrm{e}^u$, $u = \sin v$, $v = 3 + x$ 的复合函数是 $y = \mathrm{e}^{\sin(3+x)}$. ( )

(4) 任何函数都有反函数； ( )

(5) 基本初等函数一定是初等函数. ( )

2. 确定下列各函数的定义域：

(1) $y=\dfrac{5x}{x^2-3x+2}$； (2) $f(x)=\log_2(3x+1)+\sqrt{\dfrac{5}{x-3}}$； (3) $y=\arcsin\dfrac{x}{2}+7e^{2x}$；

(4) $y=\dfrac{3}{x}-\sqrt{1-x^2}$； (5) $y=\dfrac{x}{\lg(1+x)}$； (6) $y=\begin{cases}2x+3, & -1\leqslant x\leqslant 1,\\ 0, & 1<x<2,\\ -x^2, & x>2.\end{cases}$

3. 判定下列函数的奇偶性：

(1) $y=x^2-3\cos 2x$； (2) $y=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$； (3) $y=5^x+5^{-x}$；

(4) $y=x(x-1)(x+1)$； (5) $y=2^x+1$； (6) $y=x\sin x$.

4. 利用中间变量，将 y 表示成 x 的函数：

(1) $y=u^3$, $u=\log_a x$； (2) $y=\sqrt{u}$, $u=2+v^2$, $v=\cos x$； (3) $y=u^2$, $u=\ln v$, $v=x^2+1$；

(4) $y=e^u$, $u=-x^3$； (5) $y=3u^2-2u$, $u=\sin x$.

5. 下列各函数是由哪些简单函数复合而成的：

(1) $y=(2x+5)^4$； (2) $y=\cos\left(5x+\dfrac{\pi}{4}\right)$； (3) $y=\sin\sqrt{x+1}$；

(4) $y=\sqrt{1+(\ln x)^2}$； (5) $y=e^{2x-3}$； (6) $y=a^{\sqrt[3]{x+1}}$；

(7) $y=(2+\ln x)^3$； (8) $y=[\arcsin(ax+b)]^3$； (9) $y=\ln\left(\dfrac{1-2\sin x}{2+\cos x}\right)$.

6. 作出函数 $f(x)=\begin{cases}2^x, & -1<x<0,\\ 2, & 0\leqslant x\leqslant 1\\ x-1, & 1\leqslant x\leqslant 3\end{cases}$ 的图像，并求 $f(2)$, $f(0)$, $f(-0.5)$的值.

7. 某批发商店按照下列价格表成盒地批发销售某种盒装饮料：

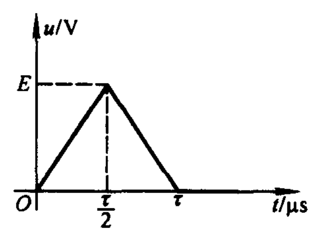
当购货量小于或等于 20 盒时，每盒 2.40 元；

当购货量小于或等于 50 盒时，其超过 20 盒的饮料每盒 2.20 元；

当购货量小于或等于 100 盒时，其超过 50 盒的饮料每盒 2.00 元；

当购货量大于 100 盒时，其超过 100 盒的饮料每盒 1.80 元.

设 y 是总价，x 是销售量，试建立总价与销售量间的函数关系式，并作出它的图像.



第 8 题图

8. 已知单三角脉冲电压，其波形如图所示，建立电压 u(V)和时间 t(μs)之间的关系.

9. 一物体作直线运动，已知阻力 f 的大小与运动的速度 v 成正比，且方向相反. 当物体以 1 m/s 的速度运动时，阻力为 1.96×10^{-2} N，建立阻力与速度之间的函数关系.

10. 拟建一个容积为 V 的长方形水池，如果底为正方形，且其单位面积的造价是四周单位面积造价的 2 倍，试将造价 F 表示成池底面边长 x 的函数，并确定其定义域.

11. 设某商品的市场供应函数为 $Q=S(p)=-80+4p$，其中 Q 为供应量，p 为市场价格. 商品的单位生产成本是 1.5 元，试建立总利润 L 与市场价格 p 的函数关系式.

12. 用 p 代表单价，某商品之需求函数为 $Q=D(p)=7\,000-50p$，当 Q 超过 1 000 时成本函数为 $C=20\,000+25Q$. 试确定能达到损益平衡的价格(提示：总收入 = 总成本时，便达到损益平衡).

13. 某商场出售电冰箱，每台售价 1 200 元，1 000 台以内可以全部脱销，超过 1 000 台时经广告优惠服务宣传后，价格调整为 1 150 元，又可多售 500 台，假定支付广告费 5 000 元，试将电冰箱收入 y 表示为销售量 x 的函数.

§1-2 函数的极限

基本要求

1. 理解数列极限和函数极限的概念；
2. 能利用左、右极限判定分段函数 $f(x)$ 在分段点处的极限是否存在.

下面我们研究函数的极限(limit of function). 主要讨论函数 $y=f(x)$ 的以下三种变化情况：

1. 整标函数(数列) $y_n=f(n)$ 当自变量 $n\in \mathbf{Z}^+$ 无限增大(即 n 趋于正无穷大，记为 $n\to\infty$)时，对应的函数值 $f(n)$(数列的项 y_n)的变化情况；

2. 函数 $y=f(x)$ 当自变量 x 的绝对值 $|x|$ 以任意方式无限增大(即 x 趋于无穷大，记为 $x\to\infty$)时，对应的函数值 $f(x)$ 的变化情况；

3. 函数 $y=f(x)$ 当自变量 x 从某一常值 x_0 的左右两侧以任意方式无限接近这一常值 x_0(即 x 趋于 x_0，记为 $x\to x_0$)时，对应的函数值 $f(x)$ 的变化情况.

一、数列 $y_n=f(n)$ 的极限

考察下面的数列，当 n 无限增大时，对应的 y_n 的变化情况：

(1) $1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \cdots,\ \frac{1}{n},\ \cdots$；

(2) $1,\ -\frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ -\frac{1}{4},\ \cdots,\ (-1)^{n+1}\frac{1}{n},\ \cdots$；

(3) $2,\ 1,\ \frac{2}{3},\ 1,\ \cdots,\ 1+\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi}{2},\ \cdots$；

(4) $1,\ 0,\ 1,\ 0,\ \cdots,\ \frac{1+(-1)^{n+1}}{2},\ \cdots$.

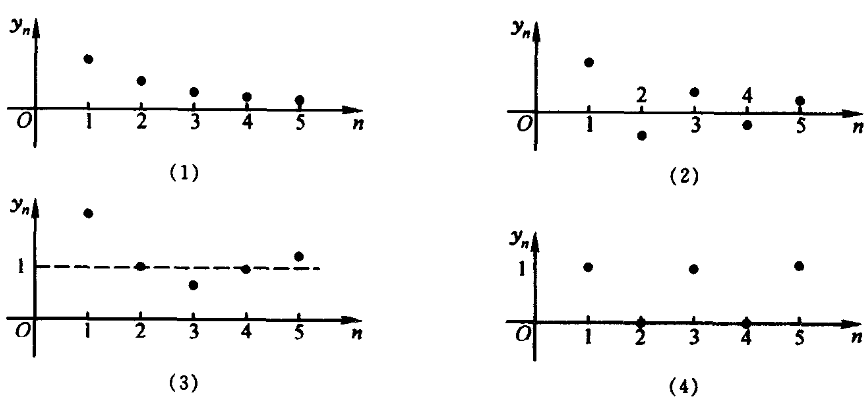


图 1-5

不难发现，这四个数列有如下变化趋势(图 1-5)：

(1) $\left\{\frac{1}{n}\right\}$：大于零，且无限接近于零；

(2) $\left\{(-1)^{n+1}\frac{1}{n}\right\}$：大于零和小于零互相交替地无限接近于零；

(3) $\left\{1+\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi}{2}\right\}$：大于 1，小于 1 或等于 1，无限接近于 1；

(4) $\left\{\frac{1+(-1)^{n+1}}{2}\right\}$：1 和 0 相间，没有固定的趋势.

这四个数列反映出的变化趋势，可分为两类：一类是数列的数值无限接近于某一个常数，例如，当 n 无限增大时，数列(1)和(2)的项都分别地与零无限接近，数列(3)的项与 1 无限接近；而另一类是数列的值不能保持与某一个常数无限接近，例如数列(4). 对于第一类数列我们有如下的定义：

定义 1 如果无穷数列 $y_n = f(n)$ 的项数 n 无限增大时，项 y_n 无限接近于一个常数 A，则称 A 为**数列 y_n 的极限**，记为

$$\lim_{n\to\infty} y_n = A \quad 或 \quad y_n \to A, 当\ n\to\infty\ 时.$$

由此定义，我们有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0,\quad \lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}=0,\quad \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi}{2}\right)=1.$$

注意 “y_n 无限接近于一个常数 A”是指 y_n 与 A 的距离 $|y_n - A|$ 无限小，即 $|y_n - A|$ 可以小到任意的程度. 如果 $n\to\infty$ 时，y_n 无限接近的常数 A 不存在，则 y_n 的极限不存在. 例如

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+(-1)^{n+1}}{2}\ 不存在.$$

例 1 已知数列 $y_n = 1+\frac{(-1)^n}{n}$，求 n 为何值时，$|y_n - 1|$ 小于： (1)10^{-5}；(2)0.000 05；(3)任意小的正数 ε.

解 $|y_n - 1| = \left|1+\frac{(-1)^n}{n}-1\right| = \frac{1}{n}.$

(1) $|y_n - 1| < 10^{-5}$，即 $\frac{1}{n} < 10^{-5}$，$n > 10^5$，所以 n 只要取 10^5 以后的自然数，就能使

$$|y_n - 1| < 10^{-5};$$

(2) $|y_n - 1| < 0.000\,05$，即 $\frac{1}{n} < 0.000\,05$，$n > 20\,000$，所以 n 只要取 20 000 以后的自然数，就能使

$$|y_n - 1| < 0.000\,05;$$

(3) $|y_n - 1| < \varepsilon$，即 $\frac{1}{n} < \varepsilon$，$n > \frac{1}{\varepsilon}$，所以 n 只要取大于 $\frac{1}{\varepsilon}$ 的自然数，就能使 $|y_n - 1| < \varepsilon$.

例 2 确定数列 $\frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \cdots, \frac{n+1}{n}, \cdots$ 的极限.

解 从图 1-6 可以看出，当 n 无限增大时，数列 $y_n = \frac{n+1}{n} = 1+\frac{1}{n}$ 与直线 $y=1$ 无限接近. 即 y_n 与数 1 无限接近，因此

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=1.$$

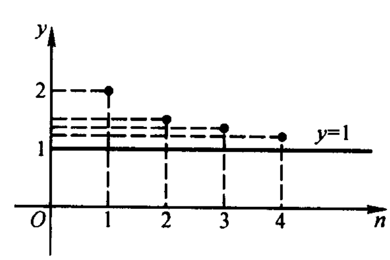


图 1-6

例 3 根据数列极限的定义，判断下列无穷数列的极限：