工农业余中等学校

# 高中数学第三册

# 教学参考书



天津人民出版社

工农业余中等学校
高中数学第三册（试用本）
教 学 参 考 书
天津市工农教育教学研究室编
天津人民出版社出版
（天津市赤道道124号）
天津市新华书店发行　天津新华印刷二厂印刷
开本787×1092　1/32　印张　7　字数　140,000
1981年5月第1版　1981年5月第1次印刷
统一书号：7072·1199　定价：0.51元

# 编者的话

这套工农业余中等学校高中数学教学参考书，受教育部工农教育局委托，由天津市工农教育教学研究室组织部分教师，根据工农业余中等学校高中课本《数学》（人民教育出版社1980年2月第一版）编写的.供教师在教学中参考.

本书体例一般包括“章教材说明”、“单元教学计划”、“教学补充资料”、“本章小结”、“附录”等五个部分.并以单元教学计划为中心，以教材分析为重点，以教法建议为辅构成本书的主体.“教学补充资料”是根据各章教材内容提出的可以教给学员的一些教学内容；“附录”是提供给教师的一些参阅资料.

工农业余中等学校高中数学教学参考书第三册是由叶惠新、王继元、夏志平、刘万仓等四位同志编写的。在编写过程中，参考和采用了有关资料，吸取了兄弟省市和我市有关同志的宝贵意见，最后由韩一芳、张元璐、叶惠新、刘万仓等同志作了较详细的修改，谨此一并致谢.

由于我们的水平所限，编写时间仓促，错误缺点在所难免，望提出宝贵意见.

天津市工农教育教学研究室

1980年12月

# 目　　录


**第十章　数列和极限**…………………………………… 1

**第十一章　导数及其应用**…………………………… 88

第一单元　导数概念及其运算……………………… 90

第二单元　导数的应用…………………………… 114

**第十二章　不定积分**………………………………… 150

第一单元　原函数和不定积分…………………… 151

第二单元　基本积分公式………………………… 154

**第十三章　定积分和它的应用**……………………… 163

第一单元　定积分的概念和计算………………… 164

第二单元　定积分的应用………………………… 178

**第十四章　逻辑代数簡介**…………………………… 197

第一单元　数的进位制与相互转换……………… 198

第二单元　逻辑代数……………………………… 207

# 第十章　数列和极限

〔教材说明〕

**1．内容介绍：**

本章开始学习微积分学初步，这属于高等数学的范围，是为了学员参加现代化生产与进一步学习专业技术知识的需要而安排的．同时考虑到学员的接受能力及教学时间所限，课本没有采用严格的数学论述，而是借助实例的直观引进概念，某些公式的推导也是尽量从简或从略．

本章内容主要由数列与极限两个部分组成．数列是人们认识和研究极限的重要工具，所以课本首先讲数列的概念、等差数列与等比数列．在此基础上再讲极限．极限又分为数列的极限与函数的极限两种．在极限概念的基础上引进连续概念，然后再讲极限运算法则、无穷小、无穷大等有关内容，为学习以后各章打下基础．

**2．教学要求：**

（1）使学员正确理解数列、等差数列和等比数列的概念．

（2）使学员掌握等差数列、等比数列的通项公式，并能运用它解决一些实际问题．

（3）使学员初步理解数列极限与函数极限两个基本概念，同时要使学员知道极限概念是反映客观事物由量变到质变的数量变化规律的．

（4）使学员掌握极限运算法则和两个重要的极限，并能

用它们来求一些简单函数的极限.

(5) 使学员了解无穷小量、无穷大量的意义、性质与二者之间的关系.

(6) 在讲授从实例引出新概念和讲解例题时，都要注意培养学员提出问题、分析问题、解决问题的能力. 在讲解例题时，还要给出解题的基本规格，使学员通过解题规格，把握住解题的思路.

**3. 重点和难点：**

本章内容的重点是数列的概念，等差、等比数列的通项公式，等差、等比数列求前$n$项和的公式，极限概念，极限运算法则，无穷小，无穷大，两个重要极限等.

极限概念是描述函数(数列也可以看作函数$y=f(n)$)在无限变化过程中的发展趋势的重要概念，它反映了客观事物由量变到质变的数量变化过程.正由于它具有这一特点,在引进极限理论后，才使得初等数学发展为高等数学——微积分学.整个微积分学都是建立在极限理论的基础上的,所以理解好极限概念，掌握好极限运算的方法，是学好微积分学的关键.因此，极限概念是本章重点中的重点.

本章难点有四：①求通项公式；②极限概念；③极限运算；④两个重要的极限.

为了解决难点，要注意从分析实例引出概念，再紧扣概念讲例题.例如,对极限定义中“无限趋近”一词，要通过例题反复说明,避免学员只是死记定义,而对其含义不甚理解.

**4. 单元课时分配：**

本章教学时间约需18课时，具体分配如下(仅供参考)：

第一单元　数列的概念　　2 课时

| | | |
|---|---|---|
| 第二单元 | 等差数列 | 1 课时 |
| 第三单元 | 等比数列 | 1 课时 |
| 第四单元 | 数列的极限 | 3 课时 |
| 第五单元 | 习题讨论课 | 1 课时 |
| 第六单元 | 函数的极限 | 3 课时 |
| 第七单元 | 极限运算法则 | 1 课时 |
| 第八单元 | 无穷小与无穷大 | 2 课时 |
| 第九单元 | 两个重要的极限 | 2 课时 |
| 本章总结和复习 | | 2 课时 |

〔单元教学计划〕

### 第一单元：10.1数列的概念（2课时）

**1. 目的要求：**

(1) 使学员理解数列，数列的项与通项，有穷数列，无穷数列等基本概念；

(2) 使学员掌握依据已知条件写出数列的通项公式的基本方法.

**2. 教材分析：**

(1) 课本通过实例引出具体的数列，然后给出抽象的符号性数列 $\{a_n\}$ .进而给出数列、数列的项、第$n$项、通项等概念.

(2) 课本指出："一个数列的第$n$项$a_n$与项数$n$间的函数关系，如果可以用一个公式来表示，这个公式就叫做该数列的通项公式".这样，就把数列与函数联系起来，使得学员能通过熟悉的函数概念去理解数列.事实上，只要能写出通项

公式$a_n=f(n)$的数列，都是由函数值依次排列而成.微积分学所研究的主要也是这类数列.

(3) 数列可分成两大类，一是有穷数列，二是无穷数列.当通项公式函数$a_n=f(n)$的定义域为自然数的有限子集时，则为有穷数列，也就是说，它的项数是有限的.当通项公式函数$a_n=f(n)$的定义域为自然数集或自然数集的无穷子集时，则为无穷数列，也就是说它的项数有无穷多.

(4) 课本中例1、例2与例3的已知条件均为通项公式函数.要把例1与例2进行对比，说明数列的书写形式.讲例3时要强调有了通项公式函数$a_n=f(n)$之后，数列就是按自变量的次序，依次排列起来的函数值.

(5) 课本指出："如果知道一个数列的开头几项，也可以探索它的规律，写出它的一个通项公式"。要特别注意"探索"二字，它表明由已知数列的前几项去求通项公式时，没有一般的计算方法可循，需要进行多方面的分析研究，去找出它的规律性，才可以写出它的通项公式.正由于求通项公式是属于探索性的工作，我们在讲解例题时，要深入分析探索过程的基本思想方法.

**3. 教法建议：**

(1) 为了把求通项公式这一难点解决好，本单元安排了两个课时.考虑到求通项公式是属于探索性的过程，不仅需要通过较多的例子（可以从习题中选一些）去讲解，还要讲一些失败的过程，以便通过正反两方面的比较，促使学员正确掌握分析问题的基本方法.比如，讲例题4(3)时，可先抽出第二项$\frac{8}{3}$来分析.因为这时的$n=2$，就可分别分析分子8与分

母3，它们与2的关系.因为有：

$$8=4\times 2 \qquad 或 \qquad 8=2^{3}$$

$$3=2+1 \qquad 或 \qquad 3=2^{2}-1$$

那么，通项公式是否可表示为：

$$\frac{4n}{n+1} \qquad 或 \qquad \frac{n^{3}}{n+1}$$

$$\frac{4n}{n^{2}-1} \qquad 或 \qquad \frac{n^{3}}{n^{2}-1}$$

这四种形式之一呢？这时就可用$n=3$分别代入各式，看那一种形式可以得到第三项$\frac{15}{4}$. 结果表明均不对，从而表明这四种形式均不是本数列的通项公式，所以必须进行第二次探索. 然而我们又可以注意到，分母采用$n+1$时，用3代$n$确实能得到第三项的分母4. 再分别用1与4代入$n+1$中的$n$时，又能分别获得第一项的分母2与第四项的分母5. 这样，我们就可以确定通项公式中的分母就是$n+1$了。下面再探索分子的表达式. 仍分析第二项$\frac{8}{3}$，再考虑8与2的关系. 8与2之间除上述两种关系外，还可以有：

$$8=(2+1)^{2}-1$$

那么，通项公式是否就是：

$$a_n=\frac{(n+1)^{2}-1}{n+1}$$

呢？分别用1、3、4代入$n$，确实分别得到所给数列的第一、三、四项. 这时就可以确定所求的通项公式就是这个表达式了.

请注意，讲课时决不可象书本那样只用“可以看出”四个字，就给出通项公式．因为这样做学员是不能理解到在探索通项公式过程中，分析问题的基本思想方法的．这样，学员在作习题时，就会感到无从下手．

(2) 在分析对不同类型的数列有求通项公式的不同方法时，作为一种类型也可以讲一下研究相邻两项间的关系，从中发现其规律性的方法，这自然就引出等差数列与等比数列．虽然这里讲的例题是等差数列与等比数列，但可先不给出这方面的概念，以免一下子给的新概念过多，冲淡了学员对求通项公式的方法论的注意力．在作课堂练习时，求通项公式的练习中，可有意识的安排等差数列与等比数列各一题，等到总结练习题时，就可顺便给出等差数列、公差、等比数列、公比等四个概念．这样，既对求通项公式的方法分析得较为全面，又使学员对等差数列等四个概念理解得较为深刻，同时又为下次课作了准备．这样做花的时间会较多，这也就是本单元所以安排两个课时的原因之一．

(3) 在讲数列时，应当向学员强调指出：从数学的角度看，数列就是有顺序地排列着的一列数，但是，如果从物理或几何的角度看，数列又往往有它的物理或几何意义．例如课本引出数列概念的例2：“一尺之棰，日取其半，万世不竭”中的 $a_n=\dfrac{1}{2^n}$，就是代表第 $n$ 天所取得的棒长．又如圆内接正多边形的面积：

$$A_n=\frac{n}{2}R^2\sin\frac{2\pi}{n}\quad(n=3,\ 4,\ 5,\ \cdots\cdots)$$

所排成的数列，其每一项 $A_n$ 都代表着一个圆的内接正多边形

的面积.

我们在这里指出数列具有一定的几何或物理意义，就可以为我们后面讲“极限是反映客观事物由量变到质变的数量规律”打下思想基础.

4. **布置作业：**

课堂练习：练习第1、2、3题.

在总结题3（1）时可给出等差数列、公差两概念. 在总结题3（3）时可给出等比数列、公比两概念.

课外习题：习题10.1第1、2题.

## 第二单元　10.2 等差数列（1课时）

1. **目的要求：**

（1）使学员理解等差数列、公差、等差中项等概念；

（2）使学员掌握等差数列的通项公式、前$n$项和公式、等差中项公式，并能灵活运用公式去解题.

2. **教材分析：**

课本在给出等差数列、公差两概念后，分别推导出数列的通项公式与前$n$项和的公式，然后讲三个例题. 三个例题各具特点，但都是培养学员灵活运用上述两公式的. 特别是例3，不仅要灵活运用等差数列的通项公式与前$n$项和公式，还要运用到二元一次联立方程组. 这是把从前所学知识和现在所学知识联系起来去解题. 要向学员指出，必须注意培养自己综合使用所有已学知识去解题的能力.

3. **教法建议：**

本单元可按课本安排的顺序进行教学. 本单元的重点在于培养学员综合使用等差数列的通项公式与前$n$项和公式去

解题的能力．为此，就需要向学员指出，通项公式$a_n=a_1+(n-1)d$中含有四个参量：$a_n$、$a_1$、$n$、$d$．在这四个参量中任意知道其中的三个都可求出另一个．不要把这个公式看作只是求$a_n$的．同理，前$n$项和的公式：

$$s_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}$$

也是含有四个参量：$s_n$、$a_1$、$n$、$a_n$。在这四个参量中任意知道其中三个都可求出另一个．同时把上述两公式联系起来，还可推出：

$$s_n=\frac{n[2a_1+(n-1)d]}{2}$$

所以，只要已知$a_1$、$n$、和$d$，也可直接求$s_n$.

通过这样的分析，将可开阔学员的思路，再通过例题的讲解，将可使学员掌握灵活运用公式解题的能力．

课本在练习中给出了等差数列中的一个重要概念："等差中项"．课本要求学员自证等差中项公式$A=\frac{x+y}{2}$，这可加深学员对概念的理解和公式的掌握．但在课堂总结时，必须给予强调一下．也可讲两个简单例题．

**4．布置作业：**

课堂练习：练习第1、3、5题．

课外习题：练习第2、4题，

习题10.1：第3、4、5、6、7题．

## 第三单元　10.3 等比数列（1课时）

**1．目的要求：**

（1）使学员理解等比数列、公比、等比中项等概念；

（2）使学员掌握等比数列的通项公式、前$n$项和公式与等比中项公式，并能灵活运用公式去解题．

2．**教材分析：**

课本通过例子引出等比数列与公比两概念后，接着推导出等比数列的通项公式与前$n$项和公式，然后讲了三个例题。其中例1具有一定的实际意义，从实际意义可以确定由每年产值所组成的有穷数列是等比数列，从而可用等比数列的公式去进行求解．例2是培养学员计算技巧的．利用题中给出的第一个条件：前三个数成等比数列去设未知数$q$，从而写出符号数列

$2$，$2q$，$2q^2$，$30$…………①

再利用题中给的第二条件：后三个数成等差数列去列方程

$$2q^2-2q=30-2q^2$$

经解方程求得$q$后，代入①式，便得插入二数为6和18．

例3的特点是，所给数列既非等比数列又非等差数列．因此不能直接使用前述求前$n$项和的公式去求它的前99项之和，而需通过一种特别技巧去解题．此类数列在今后的学习中将会遇到，因此要认真引导学员去把握解这类题的方法．

课本在练习题中给出“等比中项（也叫几何中项）”的概念和公式，并要求学员自证．这种安排很好，但在课堂总结中要给予强调，并配合着讲一两个例题．

3．**教法建议：**

（1）本单元可按课本安排的顺序进行教学．本单元的重点在于培养学员解题的技能技巧．

和讲等差数列时一样，在这里也要向学员指出：等比数

列通项公式

$$a_n = a_1 q^{n-1}$$

中，有四个参量 $a_1$，$q$，$n$，$a_n$. 任意知道其中的三个，就可求出另一个. 同理，在等比数列前$n$项和公式

$$s_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$$

中，也是有四个参量$a_1$、$q$、$n$、$S_n$. 任意知道其中的三个，可求出另一个. 这样可启发学员灵活地使用公式.

（2）在讲例 1 时，要着重分析一下由每年产值所组成的数列为什么是等比数列，从而培养学员把实际问题转化为某种数学问题的能力.

（3）在讲例 2 时，除课本解法外，还可提出利用题给第二个条件：后三个数成等差数列，去设公差为$d$，从而写出符号数列

$$2，30-2d，30-d，30$$

再用题给第一条件：前三个数成等比数列，去建立方程

$$\frac{30-2d}{2} = \frac{30-d}{30-2d}$$

解方程可得$d_1 = 12$，$d_2 = 17.5$. 经检验 $d_2$不合题意，舍去. 从而得插入二数为 6 和18. 这样，就活跃了解题思路，培养了学员灵活应用已知条件的能力.

（4）在讲例 3 时，首先要引导学员认清题给数列既非等比又非等差，因此不能直接使用前述求前 $n$ 项和的公式去求其前99项之和. 这就需要寻求特别的解题方法. 由于题设给出了数列的通项公式

$$a_n=\frac{1}{1+2+3+\cdots+n}$$

为求其前99项之和，可先从化简通项公式入手．通项公式的分母正好是自然数列构成的等差数列的前$n$项之和，故有

$$a_n=\frac{1}{1+2+3+\cdots+n}=\frac{1}{\dfrac{n(n+1)}{2}}=2\cdot\frac{1}{n(n+1)}$$

这个$a_n$的表达式虽较前简单，但仍不能提供求前99项之和的有效算法，故需再作变换．$a_n$表达式的分母是两因式之积，就可用待定系数法把它分成两分式之和．设

$$\frac{1}{n(n+1)}=\frac{A}{n}+\frac{B}{n+1}$$

其中$A$、$B$是待定系数．去分母后可得

$$A(n+1)+Bn=1$$

$$\therefore\quad (A+B)n+A=1$$

因为这是恒等式，等式两端$n$的系数和常数项必须分别相等，于是有

$$\begin{cases}A+B=0\\A=1\end{cases}$$

从而解得　$A=1$，$B=-1$

由此可得　$a_n=2\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$

把$n=1$，2，3，……，99代入通项公式，得

$$a_1=2\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right),\quad a_2=2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)$$

$$a_3=2\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right),\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

$$a_{99}=2\left(\frac{1}{99}-\frac{1}{100}\right)$$

由此可以发现，由$a_1$加到$a_{99}$时，只有 $a_1$中的2与 $a_{99}$中的 $-\frac{2}{100}$保留下来，其余均可消去，从而有

$$S_{99}=2-\frac{2}{100}=\frac{198}{100}=1.98$$

要向学员指出，求既非等差数列又非等比数列 的 前$n$项之和，往往需要此类特别的解题技巧。

**4. 布置作业：**

课堂练习：练习第1、2、3题，

课外习题：习题10.1第 8 至13题、16题

## 第四单元10.4 数列的极限(3 课时)

**1. 目的要求：**

(1) 使学员理解数列的极限这一基本概念，了解数列的收敛与发散两概念；

(2) 使学员了解“无限趋近”一词的含意，初步了解求数列极限的方法；

(3) 使学员掌握无穷递缩等比数列的求和公式.

**2. 教材分析：**

(1) 课本通过刘徽“割圆术”引进极限的基本思想. 圆内接正多边形的面积，通过边数无限增加的变化可转化成圆的面积，这正是极限概念所反映的数量关系. 然而课本没有作进一步的阐述，这就起不到通过实例引导学员理解极限的基本思想的作用，讲课时要给予一定的补充.

(2) 课本指出数列的通项公式函数$a_n=f(n)$在$n$无限增

大的条件下，有两种变化状态：一是无限地趋近于某一个确定的常数$A$；二是不趋近于任一常数．第一种状态下的$a_n=f(n)$所无限趋近的常数$A$，正是后面所要定义的数列的极限．

（3）课本通过对例题$a_n=f(n)=2-\dfrac{1}{n+1}$的分析，去阐述“当$n$无限增加时，$a_n$无限趋近于常数$A$”的具体含义．例中采取两种方法加以说明，一是几何表示法，就是在数轴上观察点$a_n$位置的变化，可以看出随着$n$的逐渐增大，$a_n$就逐渐趋近于$A(=2)$；二是代数解析法，就是不管人们提出一个多么小的数值，都可通过解不等式去找到一个数$N$，只要$n>N$，就有$a_n$与$A$之差的绝对值：$|a_n-A|$小于所提出的数值．这里课本上采用了“足够大”、“足够小”、“要使……”、“只要……”的说法，讲课时都要认真地结合实例加以说明．

（4）课本给出了数列极限的定义，同时给出了数列的收敛与发散两个概念．这是本节的重点．

（5）课本讲了三个例题，其中例1是为加深对定义的理解而设置的．在讲例2的同时，给出了“无穷递缩等比数列的和”的定义和它的计算公式．例3表明，有时数列的极限会不存在．

**3．教法建议**

（1）讲解课本作为引言的刘徽“割圆术”时，要给出半径为$R$的圆的内接正$n$边形的面积$A_n$的公式：

$$A_n=\frac{n}{2}R^2\sin\frac{2\pi}{n}$$