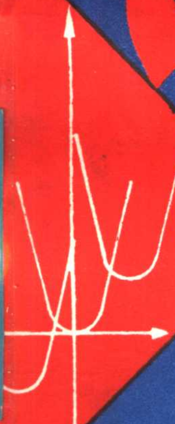
判别式和韦达定理的应用200例

邓必成



湖北教育出版社

判别式和韦达定理的应用200例

邓必成 编

湖 北 教 育 出 版 社

判别式和韦达定理的应用200例
邓必成　编
*
湖北教育出版社出版、发行　　新华书店湖北发行所经销
天门市印刷厂印刷
787×1092毫米32开本　　6.5印张　　137 000字
1988年6月第1版　　1988年6月第1次印
印数　1—5 000
ISBN7—5351—0279—4/G·240
定价：1.80元

编 者 的 话

余致力于中学数学教学二十多年。在教学实践中，深感实系数一元二次方程根的判别式和韦达定理在中学数学中用途之广、作用之大。它广泛地应用于初等代数、平面几何、平面三角、解析几何、微分积分等学科。用它来解决二次方程、二次三项式、二次函数、二次不等式、二次曲线中的有关问题，往往能使解答过程大大简化。历年各地中考、全国高考、数学竞赛几乎都要用到判别式和韦达定理。

二十多年来，余悉心收集和编拟了判别式及韦达定理的应用题数百道。结合教材、教学和学生实际，以及有利于启迪学生的思维、开发学生的智力，今从中精选典型性、代表性、灵活性、综合性较强的200例，分门别类，阐述解题要点，分析解题思路，介绍解题方法，提供解题技巧，揭示解题规律，汇编成册，以供广大的中学生学习和中学数学教师参考。

在编写本书的过程中，承蒙洪伯阳教授多次予以指导；在审阅书稿的过程中，承蒙特级教师田化澜同志提出许多宝贵意见，使本书趋近于完善。在此一并表示衷心的感谢！

邓必成

1987年1月于武穴

目　录

一、在二次方程中的应用

解题要点 任何关于x的实系数一元二次方程，经过方程的同解变形都可以化成它的标准形式

$$ax^2+bx+c=0 \quad (a、b、c\in R\text{且}a\neq 0) \qquad ①$$

对于方程①，有

$\Delta=b^2-4ac>0 \Longleftrightarrow$ 方程有两个不等的实根；

$\Delta=b^2-4ac=0 \Longleftrightarrow$ 方程有两个相等的实根；

$\Delta=b^2-4ac<0 \Longleftrightarrow$ 方程无实根。

如果x_1、x_2是复系数一元二次方程

$$ax^2+bx+c=0\ (a\neq 0)$$

的两个根，则由韦达定理得

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a},\quad x_1x_2=\frac{c}{a}$$

如果x_1、x_2、x_3是复系数一元三次方程

$$ax^3+bx^2+cx+d=0\ (a\neq 0)$$

的三个根，则由韦达定理得

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=-\dfrac{b}{a} \\ x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=\dfrac{c}{a} \\ x_1x_2x_3=-\dfrac{d}{a} \end{cases}$$

有关实系数一元二次方程根的性质的研究，一般应用根的判别式来解决；有关复系数一元n次方程根的数值的讨论，一般应用韦达定理来解决；二者兼而有之，则应用判别式和韦达定理来解决。

根据韦达定理的逆定理，若$x_1+x_2=-\frac{b}{a}$，$x_1x_2=\frac{c}{a}$，则以x_1、x_2为根的一元二次方程是$ax^2+bx+c=0\ (a\neq 0)$。

把判别式和韦达定理结合起来，能确定实系数一元二次方程$ax^2+bx+c=0\ (a\neq 0)$的实根符号。

$$
\begin{array}{c}\text{不等实根}\\(b^2-4ac>0)\end{array}
\begin{cases}
\text{两根同号}\left(\frac{c}{a}>0\right)\begin{cases}\text{两根为正}\left(-\frac{b}{a}>0\right)\\ \text{两根为负}\left(-\frac{b}{a}<0\right)\end{cases}\\
\text{两根异号}\left(\frac{c}{a}<0\right)\begin{cases}\text{正根绝对值大}\left(-\frac{b}{a}>0\right)\\ \text{负根绝对值大}\left(-\frac{b}{a}<0\right)\end{cases}\\
\text{一根为零}\ (b\neq 0,\ c=0)
\end{cases}
$$

$$
\begin{array}{c}\text{相等实根}\\(b^2-4ac=0)\end{array}
\begin{cases}
\text{两根为正}\ \left(-\frac{b}{a}>0,\ \frac{c}{a}>0\right)\\
\text{两根为负}\ \left(-\frac{b}{a}<0,\ \frac{c}{a}>0\right)\\
\text{两根为零}(b=c=0)
\end{cases}
$$

1. 求作新方程

例1 如果方程$x^2+ax+b=0$与方程$x^2+px+q=0$

$(a\neq p,\ b\neq q)$有且仅有一公共根，求以它们的相异根为根的一元二次方程。

分析 求出两已知方程相异的两根。

解 设公共根为x_0，则有

$$\begin{cases}x_0^2+ax_0+b=0\\ x_0^2+px_0+q=0\end{cases}$$

解这个方程组得$x_0=\dfrac{q-b}{a-p}$.

根据韦达定理，对于方程$x^2+ax+b=0$的两根x_0、x_1和方程$x^2+px+q=0$的两根x_0、x_2有

$$x_0x_1=b,\ x_0x_2=q$$

$$\therefore x_1=\frac{b}{x_0}=\frac{b(a-p)}{q-b},\ x_2=\frac{q}{x_0}=\frac{q(a-p)}{q-b}$$

$$\therefore x_1+x_2=\frac{(a-p)(b+q)}{q-b},\ x_1x_2=\frac{bq(a-p)^2}{(q-b)^2}$$

由韦达定理的逆定理知所求的方程是

$$x^2-\frac{(a-p)(b+q)}{q-b}x+\frac{bq(a-p)^2}{(q-b)^2}=0$$

例 2 以二正数α、β为根求作一元二次方程，这里α、β适合下列两等式

$$(1)\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{7}{2}\qquad (2)\frac{\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2}{\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2}=\frac{31}{43}$$

分析 先将两已知等式适当变形，可以求出$\alpha+\beta$和$\alpha\beta$之间的两个方程，然后解得$\alpha+\beta$和$\alpha\beta$的值，便可得到所求的方程为$3x^2-7x+2=0$.

例3 已知α、β为正数，且满足

$$\alpha\beta+\alpha+\beta-k=0\text{和}\alpha\beta-k(\alpha+\beta)+1=0$$

其中$k\neq-1$、0。求

(1)以α、β为根的一元二次方程；

(2)k的取值范围。

分析 仿上例，由两已知条件直接解得 $\alpha+\beta=f(k)$，$\alpha\beta=g(k)$，从而得到含有参数k的一元二次方程，此即为所求。再由所得方程的判别式 $\Delta\geqslant0$解出k的取值范围。

解 (1)由已知条件得

$$\alpha+\beta=k-\alpha\beta\text{和}\alpha+\beta=\frac{\alpha\beta+1}{k}$$

由这两个等式得

$$k-\alpha\beta=\frac{\alpha\beta+1}{k}\Longleftrightarrow(k+1)\alpha\beta=k^2-1$$

因为 $k\neq-1$即$k+1\neq0$，所以 $\alpha\beta=k-1$，所以

$$\alpha+\beta=k-(k-1)=1$$

由韦达定理的逆定理知，以α、β为根的一元二次方程是

$$x^2-x+k-1=0 \qquad ①$$

(2)因为方程①有两个正数根，故有

$$\begin{cases}\Delta=1-4(k-1)\geqslant0\\ k-1>0\end{cases}\Longleftrightarrow1<k\leqslant\frac{5}{4}$$

所以k的取值范围是$1<k\leqslant\frac{5}{4}$。

例4 已知m、n是方程 $x^2+px+q=0$的两个根，且m、s、t、n成等差数列，求以s、t为根的一元二次方程。

分析 把p、q视为已知数，由第一个已知条件可以找到m、n与p或q之间的等量关系；又由第二个已知条件可以找到s或t与m、n之间的等量关系。于是可找到s、t与p、q之间

的等量关系，从而得到所求的一元二次方程。

解 m、n是$x^2+px+q=0$的两个根，由韦达定理得

$$m+n=-p,\quad mn=q$$

设数列m，s，t，n的公差为d，则

$$n=m+(4-1)d，即d=\frac{1}{3}(n-m)$$

$$\therefore s=m+d=\frac{1}{3}(2m+n)$$

$$t=m+2d=\frac{1}{3}(m+2n)$$

$$\therefore s+t=m+n=-p$$

$$st=\frac{1}{9}[2(m+n)^2+mn]=\frac{1}{9}(2p^2+q)$$

由韦达定理的逆定理知，以s，t为根的一元二次方程是

$$x^2+px+\frac{1}{9}(2p^2+q)=0$$

例5 在$\triangle ABC$中，a，b，c三边成等差数列，且$\operatorname{ctg}\frac{B}{2}=\frac{7}{4}$，求以$\operatorname{tg}\frac{A}{2}$、$\operatorname{tg}\frac{C}{2}$为根的一元二次方程。

解法一 因为a，b，c成等差数列，所以$a+c=2b$，从而由正弦定理得

$$\sin A+\sin C=2\sin B$$

又$B=180°-(A+C)$，所以

$$\sin A+\sin C=2\sin(A+C)$$

$$\Longleftrightarrow 2\sin\frac{A+C}{2}\cos\frac{A-C}{2}=4\sin\frac{A+C}{2}\cos\frac{A+C}{2}$$

$$\Longleftrightarrow \cos\frac{A-C}{2}=2\cos\frac{A+C}{2}$$

$$\Longleftrightarrow \cos\frac{A-C}{2}-\cos\frac{A+C}{2}=\cos\frac{A+C}{2}$$

$$\Longleftrightarrow 2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{C}{2}=\cos\frac{A}{2}\cos\frac{C}{2}-\sin\frac{A}{2}\sin\frac{C}{2}$$

$$\Longleftrightarrow \operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}=\frac{1}{3}$$

又知$\operatorname{ctg}\frac{B}{2}=\frac{7}{4}$，即$\operatorname{tg}\frac{A+C}{2}=\frac{7}{4}$，所以

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}+\operatorname{tg}\frac{C}{2}=\frac{7}{4}(1-\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2})=\frac{7}{4}(1-\frac{1}{3})=\frac{7}{6}$$

根据韦达定理的逆定理，以$\operatorname{tg}\frac{A}{2}$、$\operatorname{tg}\frac{C}{2}$为根的一元二次方程是$x^2-\frac{7}{6}x+\frac{1}{3}=0$，即

$$6x^2-7x+2=0$$

解法二 由半角公式得

$$(\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2})^2=\frac{1-\cos A}{1+\cos A}\cdot\frac{1-\cos C}{1+\cos C}$$

进而由余弦定理得

$$\left(\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}\right)^2=\frac{a^2-(b-C)^2}{(b+c)^2-a^2}\cdot\frac{c^2-(a-b)^2}{(a+b)^2-c^2}$$

$$=\frac{(a+b-c)(a-b+c)(c+a-b)(c-a+b)}{(a+b+c)(b+c-a)(a+b+c)(a+b-c)}$$

$$=\left(\frac{a+c-b}{a+b+c}\right)^2$$

因为a，b，c成等差数列，所以$2b=a+c$，所以

$$\left(\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}\right)^2=\frac{1}{9}$$

又A、C为$\triangle ABC$的内角，所以

$$\mathrm{tg}\frac{A}{2}\mathrm{tg}\frac{C}{2}=\frac{1}{3}$$

以下同解法一，从略。

说明 解例1～5这类问题时，为方便计，一般不直接解出所求方程的两根，而是先由已知条件解出所求方程的两根之和与积，然后根据韦达定理的逆定理写出所求方程。例6亦然。

例6 将方程$x^3-3x^2+5x+6=0$的三个根增加同一常数，使所得方程缺 x^2项，求此方程。

解 设原方程三根为α、β、γ，新方程三根为$\alpha+k$、$\beta+k$、$\gamma+k$，则由韦达定理和题意得

$$\begin{cases}\alpha+\beta+\gamma=3 & ①\\ \alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma=5 & ②\\ \alpha\beta\gamma=-6 & ③\\ 3k+\alpha+\beta+\gamma=0 & ④\end{cases}$$

将①代入④得$k=-1$。故所求方程三根为$\alpha-1$、$\beta-1$、$\gamma-1$

设所求方程为$x^3+ax+b=0$，则由韦达定理得

$$\begin{aligned}a&=(\alpha-1)(\beta-1)+(\alpha-1)(\gamma-1)+(\beta-1)(\gamma-1)\\&=\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma-2(\alpha+\beta+\gamma)+3\\&=5-2\times3+3=2\\b&=-(\alpha-1)(\beta-1)(\gamma-1)\\&=-\alpha\beta\gamma+(\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma)-(\alpha+\beta+\gamma)+1\\&=6+5-3+1=9\end{aligned}$$

故所求的方程是

$$x^3+2x+9=0$$

另解 设原方程三根增加同一常数k，则有

$$(x+k)^3-3(x+k)^2+5(x+k)+6=0$$

即

$$x^3+(3k-3)x^2+(3k^2-6k+5)x$$
$$+(k^3-3k^2+5k+6)=0$$

∵所求方程缺x^2项，∴$3k-3=0$即$k=1$。

因此所求方程为

$$x^3+2x+9=0$$

2. 研究实根的性质

例7 m为何值时，关于x的实系数方程

$$(m-1)x^2+2mx+m+3=0$$

有实数根，并求其根。

解 当$m=1$时，原方程为$2x+4=0$，其根为$x=-2$。

当$m\neq1$时，原方程根的判别式为

$$\Delta=4m^2-4(m-1)(m+3)=4(3-2m)$$

(1)当$\Delta>0$即$m<\frac{3}{2}$且$m\neq1$时，方程有两个不等的实根

$$x_1=\frac{-m+\sqrt{3-2m}}{m-1},\quad x_2=\frac{-m-\sqrt{3-2m}}{m-1}$$

(2)当$\Delta=0$即$m=\frac{3}{2}$时，方程有两个相等的实根

$$x_1=x_2=-3$$

综上所述，当且仅当$m\leqslant\frac{3}{2}$时，此方程有实根。

例8 当m为何实数时，方程

$$2x^2-2(m-1)x-m=0$$

(1)两根为负；

(2)一根为0，另一根为-1

(3)两根异号，且负根的绝对值大；

(4)两根互为相反数；

(5)两根异号，且正根的绝对值大。

解 因为 $\Delta=4(m-1)^2+8m=4m^2+4>0$，所以对$m\in R$，此方程必有两个不等的实根．又由韦达定理得

$$x_1+x_2=m-1,\ x_1x_2=-\frac{m}{2}$$

所以

(1)当$m<0$时，$m-1<0$且$-\frac{m}{2}>0$，两根为负；

(2)当$m=0$时，$m-1=-1$且$-\frac{m}{2}=0$，一根为0，另一根为-1；

(3)当$0<m<1$时，$m-1<0$且$-\frac{m}{2}<0$，两根符号相反，负根的绝对值大；

(4)当$m=1$时，$m-1=0$且$-\frac{m}{2}<0$，两根互为相反数；

(5)当$m>1$时，$m-1>0$且$-\frac{m}{2}<0$，两根符号相反，正根的绝对值大。

说明 因本例中所给方程根的判别式恒大于零，即对于$m\in R$此方程必有两个不等的实数根，故未将判别式同两根之和与积一起讨论．而类似这个问题，一般应将三者结合起来

讨论实根的性质。否则，将会扩大（或缩小）参数的取值范围。

例9 试求关于x的实系数方程

$$m(x^2-1)+x-a=0$$

对于一切实数m有实数根的充要条件。

解 $m(x^2-1)+x-a=0$ ①

当$m=0$时，则由$x-a=0$得$x=a(x\in R)$，此时方程①有实数根。

当$m\neq 0$时，则由①得

$$mx^2+x-(m+a)=0 \quad ②$$

此时方程②有实数根的充要条件是

$$\Delta=1+4m(m+a)\geqslant 0$$

$$\Longleftrightarrow 4m^2+4am+1\geqslant 0 \quad ③$$

因为不等式③中m^2项的系数 $4>0$，所以对于不为零的一切实数m，③式成立的充要条件是

$$\Delta'=16a^2-16\leqslant 0 \text{即} -1\leqslant a\leqslant 1$$

故对于$m\in R$，方程①有实数根的充要条件是

$$-1\leqslant a\leqslant 1$$

注意 不能忽略$m=0$时的情况。

例10 设m、n分别为正系数方程

$$ax^2+bx+c=0$$

的两根的等差中项和等比中项，且m、n同号，求证：

(1)当$m<n$时，方程有两个不等的实根；

(2)当$m>n$时，方程无实根。

分析 因为x^2项系数$a>0$，故此方程有两个不等的实根等价于$\Delta=b^2-4ac>0$；方程无实根等价于$\Delta=b^2-4ac<0$。