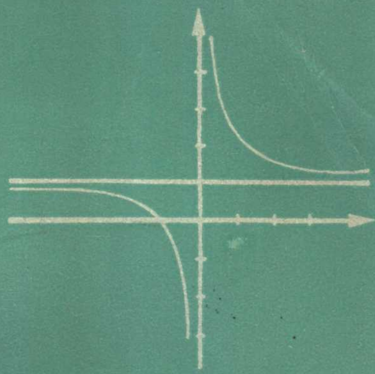
甘肃人民出版社



数学习题的类型及解法

上册

数学习题的类型及解法

上　册

王志亭　孙金铭　苏继昌
高冠群　田学正

甘肃人民出版社

责任编辑：王水汀
封面设计：郭宝林

数学习题的类型及解法

上册

王志亭　孙金铭　苏继昌
高冠群　田学正

甘肃人民出版社出版
（兰州第一新村51号）
甘肃省新华书店发行　平凉地区印刷厂印刷

开本787×1092毫米 1/32　印张10　字数213,000
1984年6月第1版　1984年6月第1次印刷
印数：1——32,000

书号：7096·204　定价：0.82元

出 版 说 明

本社曾于1980年出版过《代数习题类型与解法》等一套数学书籍，受到广大中学师生的欢迎。现行中学数学教材，在内容的深度和广度方面又有了提高，增加了集合、逻辑代数、概率与数理统计、微积分等内容。为适应新的需要，我们将原五本数学书进行了修订。这次修订，补充了新增教材的习题，对原书的习题进行了精简，不少习题的解法经过了改写。在加强数学基础知识和基本技能训练的目的下，精选了中学数学中各种类型的习题。通过解题，可使学生明辨数学概念、熟练解题技巧，提高分析和解决数学问题的能力。修订本以《数学习题的类型及解法》为书名，分上、下两册出书。

本书除供学生、参加文化补习的职工和社会自学青年在学习、复习中使用外，还可供中学教师备课时参考。

一九八三年七月

目　录

一、数的概念、集合 ……………………………… (1)
二、恒等变形 ……………………………………… (20)
三、方程 …………………………………………… (41)
四、不等式 ………………………………………… (79)
五、函数 …………………………………………… (107)
六、指数与对数 …………………………………… (128)
七、排列、组合和二项式定理 …………………… (149)
八、统计和概率初步 ……………………………… (175)
九、数的进位制和逻辑代数 ……………………… (194)
十、数列与极限 …………………………………… (217)
十一、导数和微分 ………………………………… (243)
十二、导数和微分的应用 ………………………… (257)
十三、不定积分 …………………………………… (271)
十四、定积分及其应用 …………………………… (295)

一　数的概念、集合

数的概念及其发展是中学数学的基础知识之一。各种数的概念、性质及其运算是我们必需熟悉和掌握的，而实数集合尤为重要。因为方程和不等式的解的集合，函数的定义域和值域，曲线上点的坐标，几何体的面积和体积等，都是在实数集合内讨论的。实数的连续性和有序性，使实数与数轴上的点形成一一对应的关系，从而使数与形统一起来，奠定了解析几何和微积分学的基础。

下面的数系表可以使我们了解各种数的集合和它们之间的从属关系。

- 复数 $(a+bi)$
  - 实数 $(b=0)$
    - 有理数
      - 整数
        - 正整数（自然数）
        - 零
        - 负整数
      - 分数（正、负）
        - 有限小数
        - 无限循环小数
    - 无理数（正、负）－无限不循环小数
  - 虚数 $(b\neq 0)$
    - 纯虚数 $(a=0, b\neq 0)$
    - 混合虚数 $(a\neq 0, b\neq 0)$

集合是近代数学最基本的概念，许多重要的近代数学分支都是建立在集合的基础上的，对集合的学习，要理解集合的概念，集合符号的意义和熟悉集合的运算。

元素与集合的关系用符号$\in$、$\notin$表示，如$a\in A, b\notin A$；又$\subset$、$\supset$、$=$表示两集合之间的关系，不能用于元素和集合之间。如$a\subset B$的记法是错误的。$\cup$、$\cap$是两集合之间的运算符号，元素与元素之间，元素与集合之间就不能用。如$a\cup B$，$b\cap C$的记法是错误的。

关于集合的运算，首先要理解交、并、补、差的概念，并记住以下的一些公式：

1 一个集与特殊集的关系：

(1)一个集本身有：$A=A$、$A\cap A=A$，$A\cup A=A$；

(2)一个集与全集有：$A\subset I$，$A\cap I=A$，$A\cup I=I$；

(3)一个集与空集有：$A\supset\phi$，$A\cap\phi=\phi$，$A\cup\phi=A$；

(4)一个集与补集有：$\overline{A}\cap A=\phi$，$A\cup\overline{A}=I$，$(\overline{\overline{A}})=A$，$\overline{\phi}=I$，$\overline{I}=\phi$。

2 常用的一些运算规律：

交换律$A\cap B=B\cap A$，$A\cup B=B\cup A$。

结合律$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$，

$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$。

分配律$(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$，

$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$。

吸收律$(A\cup B)\cap A=A$。$(A\cap B)\cup A=A$。

德摩根公式$(\overline{A\cup B})=\overline{A}\cap\overline{B}$，$(\overline{A\cap B})=\overline{A}\cup\overline{B}$。

题1　什么叫无理数？根据无理数的定义写出二个无理

数。

答 无限不循环小数叫做无理数．如$\sqrt{2}$、$\sqrt{5}$、π、$\lg 3$、$\sin 10^\circ$、$\sqrt[3]{2}$、……都是无理数。

根据定义下列两个数

$$0.121221222\cdots\cdots,$$

$$2.8373773777\cdots\cdots,$$

都是无理数。

注意 要作成无理数，只要在两个相同的数字之间（如上例中的1与1之间，3与3之间）依次增加某一个数字的个数，用以保证这个数是不循环的并且是无限的。

题2 求证$\sqrt{2}$不是有理数。

证 用反证法：

假设$\sqrt{2}$是有理数，那么$\sqrt{2}$可以表示成分数，即$\sqrt{2}=\frac{n}{m}$（其中m，n是正整数，且m、n互质）。

$$\therefore\quad 2=\left(\frac{n}{m}\right)^2=\frac{n^2}{m^2}，即\ n^2=2m^2\ .$$

这说明n^2是偶数，即n是偶数。设$n=2p$。那么$4p^2=2m^2$，$2p^2=m^2$，这说明m也是偶数。

这样，m、n都是偶数，与m、n互质的假设相矛盾．因此$\sqrt{2}$不是有理数。

注意 仿此可以证明$\sqrt{3}$、$\sqrt{5}$等也不是有理数。

题3 计算$\sqrt{(x-2)^2}+\sqrt{(x-9)^2}$，其中$x$是任意实数。

解 $\sqrt{(x-2)^2}+\sqrt{(x-9)^2}=|x-2|+|x-9|$，式中2和9将全体实数分为三部分。

当$x\leqslant 2$时，

原式$=-(x-2)+[-(x-9)]=-2x+11$；

当$2<x<9$时，

原式$=x-2+[-(x-9)]=7$；

当$x\geqslant 9$时，

原式$=x-2+x-9=2x-11$。

注意 1.本题的计算（或化简）要首先掌握算术根和绝对值的概念。

2.本题的计算与作函数$y=\sqrt{(x-2)^2}+\sqrt{(x-9)^2}$或$y=|x-2|+|x-9|$的图象有直接的关系。

3.利用这种方法，还可以解含有算术根、含有绝对值符号的方程或不等式。

题4 把$\sqrt{5}$表示成无限连分数。

解 利用恒等式

$$(\sqrt{m^2+1}-m)(\sqrt{m^2+1}+m)=1 \qquad (1)$$

当$m=2$时，有

$(\sqrt{5}-2)(\sqrt{5}+2)=1$，

$$\therefore \quad \sqrt{5}-2=\frac{1}{\sqrt{5}+2}=\frac{1}{4+(\sqrt{5}-2)}$$

对等号右端分母中的$(\sqrt{5}-2)$，再代以

$$\sqrt{5}-2=\frac{1}{4+(\sqrt{5}-2)} \qquad (2)$$

$$\therefore \quad \sqrt{5}-2=\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{4+(\sqrt{5}-2)}},$$

$$\therefore\quad \sqrt{5}=2+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{4+(\sqrt{5}-2)}},$$

继续用（2）式代替最末一个分母的括号中的数，就得到一个无限连分数．

$$\therefore\quad \sqrt{5}=2+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{4+\cdots\cdots}}}$$

注意　上面所用的方法是以恒等式（1）为根据的．此法并不能适用于一切无理数$\sqrt{a}$．只适用于整数a可以表示为$a=m^2+1$（m是非零的整数）的情况．当$m=1, 2, 3, 4$时，可得到$\sqrt{2}$，$\sqrt{5}$，$\sqrt{10}$，$\sqrt{17}$的展开式．有的不尽根式，可用其它的恒等式，如用$(\sqrt{m^2+2}-m)(\sqrt{m^2+2}+m)=2$，可得到$\sqrt{3}$，$\sqrt{6}$，$\sqrt{11}$，……，的展开式．

题5　设$a_3a_2a_1$是一个三位数，且$a_3>a_1$，$a_3a_2a_1$减去$a_1a_2a_3$又得到一个三位数$b_3b_2b_1$，$b_3\geqslant 0$．试证明：$b_3b_2b_1+b_1b_2b_3=1089$．

证　$\because$

$$\begin{array}{r} a_3a_2a_1 \\ -\,a_1a_2a_3 \\ \hline b_3b_2b_1 \end{array}$$

又$a_3>a_1$，所以在个位数相减时a_1需借位．

$$\therefore\quad b_1=10+a_1-a_3 \qquad (1)$$

$$b_2=10+(a_2-1)-a_2=9 \qquad (2)$$

$$b_3=a_3-1-a_1 \qquad (3)$$

由（2）知　$b_2=9$．

又（1）+（3）得

$$b_1+b_3=10+a_1-a_3+a_3-1-a_1=9.$$

$$\therefore\quad \begin{array}{r} b_3b_2b_1 \\ +\ b_1b_2b_3 \\ \hline 1\,0\,8\,9 \end{array}$$

问题得证。

题6 复数z_1，z_2用第一象限与第三象限的点表示，求表示下列各数的点：

（1）$\overline{z_1+z_2}$，

（2）$\overline{z_1}-\overline{z_2}$.

解 （1）如图1—1，用平行四边形法则先作出z_1+z_2，得点z_3。再作z_3关于x轴的对称点，得$z_4=\overline{z_1+z_2}$，点z_4即为所求。

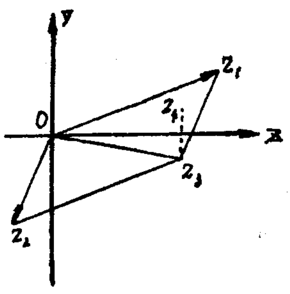


图1—1

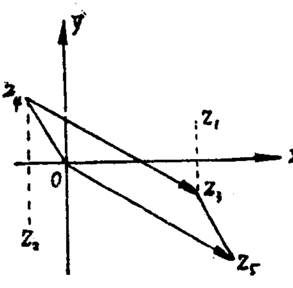


图1—2

（2）作z_1与z_2关于x轴的对称点，分别得$z_3=\overline{z_1}$与$z_4=\overline{z_2}$。连结z_4，z_3且箭头指向z_3，得向量$\overrightarrow{z_4z_3}$（表示$\overline{z_1}-\overline{z_2}$），平移向量$\overrightarrow{z_4z_3}$的箭尾至原点得向量$\overrightarrow{oz_5}$，点$z_5=\overline{z_1}-\overline{z_2}$即为所求。

题7 已知正方形两相对顶点是$1+2i$，$3-5i$，求

表示其它两顶点的复数。

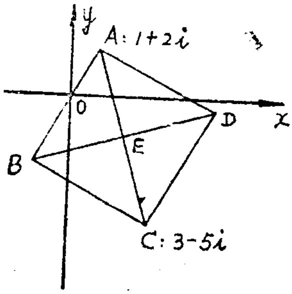


图 1—3

解 ∵ AC的中点 E是 $2-1.5i$，

∴ $\overrightarrow{EA}=(1+2i)-(2-1.5i)=-1+3.5i$

则 $\overrightarrow{EB}=\overrightarrow{EA}i$

$=(-1+3.5i)i$

$=-3.5-i$。

∴ $\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{EB}$

$=(2-1.5i)+(-3.5-i)$

$=-1.5-2.5i$。

即表示B点的复数是$-1.5-2.5i$。

又 $\overrightarrow{ED}=\overrightarrow{EA}(-i)=(-1+3.5i)(-i)=3.5+i$，

∴ $\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{ED}=(2-1.5i)+(3.5+i)$

$=5.5-0.5i$。

即表示D点的复数是$5.5-0.5i$。

题8 计算 $\left(\dfrac{2+2i}{1-\sqrt{3}i}\right)^8$

解 原式$=\left(\dfrac{1+i}{\dfrac{1-\sqrt{3}i}{2}}\right)^8=\left(-\dfrac{1+i}{\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}}\right)^8$

$=\dfrac{(2i)^4}{\omega^8}=\dfrac{2^4}{\omega^2}=2^4\cdot\omega=8(-1+\sqrt{3}i)$

$=-8+8\sqrt{3}i$

注意 在复数的计算中常要用到下列一些简化方法：

（1） $\dfrac{1}{i}=-i$，$(1+i)(1-i)=2$，

$$\frac{1+i}{1-i}=i,\quad \frac{1-i}{1+i}=-i;$$

（2） $(1\pm i)^2=\pm 2i$;

（3） 设 $\omega=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$，则 $\omega^2=\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$.

这时有：$\omega^{3k}=1$，$\omega^{3k+1}=\omega$,

$\omega^{3k+2}=\omega^2$,（$k\in N$）　$\omega\overline{\omega}=1$,

$\omega+\overline{\omega}=-1$,　$1+\omega+\overline{\omega}=0$等等.

熟悉它们，可以掌握一些解题的技巧，提高解题的速度.

题 9　证明$[(2a-b-c)+(b-c)\sqrt{3}i]^3$

$$=[(2b-c-a)+(c-a)\sqrt{3}i]^3.$$

证　式左$=[2a-b+b\sqrt{3}i-c-c\sqrt{3}i]^3$

$$=8[a+\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\cdot b+\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\cdot c]^3$$

$$=8[a+b\omega+c\omega^2]^3,$$

式右$=[2b-c+c\sqrt{3}i-a-a\sqrt{3}i]^3$

$$=8[b+\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\cdot c+\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\cdot a]^3$$

$$=8[b+c\omega+a\omega^2]^3$$

$$=8\cdot\frac{1}{\omega^3}[a\omega^3+c\omega^2+b\omega]^3$$

$$=8[a+b\omega+c\omega^2]^3,$$

∴　式右=式左.

题10　用棣美弗定理证明

（1）　$\cos 2\theta=\cos^2\theta-\sin^2\theta$，$\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta$；

（2）　$\cos 3\theta=4\cos^3\theta-3\cos\theta$，

$\sin 3\theta=3\sin\theta-4\sin^3\theta$。

证　（1）按棣美弗定理

$$(\cos\theta+i\sin\theta)^2=\cos 2\theta+i\sin 2\theta.$$

把左边按乘法公式展开，得

$$\begin{aligned}(\cos\theta+i\sin\theta)^2&=\cos^2\theta+2\cos\theta\sin\theta\cdot i-\sin^2\theta\\&=\cos^2\theta-\sin^2\theta+2i\cos\theta\sin\theta,\end{aligned}$$

根据复数相等的条件，得

$$\cos 2\theta=\cos^2\theta-\sin^2\theta,\quad \sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta.$$

（2）　$\because$　$(\cos\theta+i\sin\theta)^3=\cos 3\theta+i\sin 3\theta$。

把左边按乘法公式展开，得

$$\begin{aligned}&(\cos\theta+i\sin\theta)^3\\&=\cos^3\theta+3\cos^2\theta\cdot i\sin\theta+3\cos\theta\cdot(i\sin\theta)^2\\&\quad+(i\sin\theta)^3\\&=(\cos^3\theta-3\cos\theta\cdot\sin^2\theta)+i(3\cos^2\theta\sin\theta-\sin^3\theta)\\&=(4\cos^3\theta-3\cos\theta)+i(3\sin\theta-4\sin^3\theta)\end{aligned}$$

根据复数相等的条件，得

$$\cos 3\theta=4\cos^3\theta-3\cos\theta,$$
$$\sin 3\theta=3\sin\theta-4\sin^3\theta.$$

题11　如果 $x+\dfrac{1}{x}=2\cos\theta$，求证 $x^m+\dfrac{1}{x^m}=2\cos m\theta$.

证　由 $x+\dfrac{1}{x}=2\cos\theta$，可得$x^2-2x\cos\theta+1=0$。

$\therefore$　$x=\cos\theta\pm\sqrt{\cos^2\theta-1}=\cos\theta\pm i\sin\theta$，

$\therefore \quad \dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{\cos\theta\pm i\sin\theta}=\cos\theta\mp i\sin\theta,$

$\therefore \quad x^m+\dfrac{1}{x^m}=(\cos\theta\pm i\sin\theta)^m+(\cos\theta\mp i\sin\theta)^m$

$=\cos m\theta\pm i\sin m\theta+\cos m\theta\mp i\sin m\theta=2\cos m\theta.$

题12 证明等式 $|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=2(|z_1|^2+|z_2|^2)$，并对此等式作出几何解释（此处 z_1，z_2 均为复数）。

证1 设 $z_1=a+bi$，$z_2=c+di$.

则 $|z_1+z_2|^2=|a+c+(b+d)i|^2$
$\qquad=(a+c)^2+(b+d)^2$

$|z_1-z_2|^2=|a-c+(b-d)i|^2$
$\qquad=(a-c)^2+(b-d)^2.$

但 $|z_1|^2=a^2+b^2$，$|z_2|^2=c^2+d^2$，

$\therefore \quad |z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2$
$=(a+c)^2+(b-d)^2+(a-c)^2+(b-d)^2$
$=2(a^2+b^2+c^2+d^2)=2(|z_1|^2+|z_2|^2).$

其几何解释如图1—4

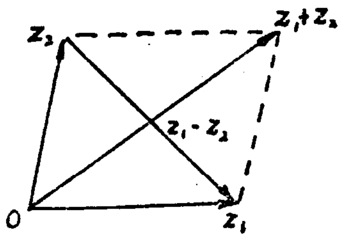


图1—4

即平行四边形的对角线的平方和等于四条边的平方和。

证 2 利用$|z|^2=z\bar{z}$（$\bar{z}$是z的共轭复数），

$$|z_1+z_2|^2=(z_1+z_2)(\bar{z}_1+\bar{z}_2)$$
$$=|z_1|^2+|z_2|^2+(z_1\bar{z}_2+\bar{z}_1z_2),$$
$$|z_1-z_2|^2=(z_1-z_2)(\bar{z}_1-\bar{z}_2)$$
$$=|z_1|^2+|z_2|^2-(z_1\bar{z}_2+\bar{z}_1z_2),$$

以上二式相加，得

$$|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=2(|z_1|^2+|z_2|^2).$$

几何解释与证 1 相同。

题13 求适合于下列各式的实数x、y。

（1） $(1+2i)x+(3-10i)y=5-6i$；

（2） $2x^2-5x+2+(y^2+y-2)i=0$。

解 （1）整理，得

$$(x+3y)+(2x-10y)i=5-6i,$$

根据复数相等的条件，

$$\begin{cases} x+3y=5, \\ 2x-10y=-6, \end{cases}$$

解此方程组，得 $\begin{cases} x=2, \\ y=1. \end{cases}$

（2）根据复数等于 0 的条件可知，

$$\begin{cases} 2x^2-5x+2=0, \\ y^2+y-2=0. \end{cases}$$

解之，得

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{1}{2} \\ y_1=-2; \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2=\dfrac{1}{2}, \\ y_2=1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_3 = 2, \\ y_3 = -2; \end{cases} \qquad \begin{cases} x_4 = 2, \\ y_4 = 1. \end{cases}$$

题14　解方程 $-(x^2+5)+2xi=5x-5i$.

解　把方程整理，得

$$x^2+(5-2i)x+5(1-i)=0,$$

解这个复系数的一元二次方程

$$x=\frac{-(5-2i)\pm\sqrt{(5-2i)^2-4\cdot 5(1-i)}}{2}$$

$$=\frac{-5+2i\pm 1}{2},$$

$$x_1=-2+i, \qquad x_2=-3+i.$$

题15　$|z|-z=10+2i$，求复数 z.

解　设 $z=a+bi$（a、b 是实数）.

方程化为 $\sqrt{a^2+b^2}-(a+bi)=10+2i$,

$$\therefore \begin{cases} \sqrt{a^2+b^2}-a=10, & (1) \\ -b=2. & (2) \end{cases}$$

$\therefore$　$b=-2$，代入（1）得

$$\sqrt{a^2+4}=a+10$$

解这个方程，得　　$a=-4.8$.

$\therefore$　$z=-4.8-2i$.

注意　数的集合扩大到复数集合以后，在解方程时应注意：

1.具有 $a+bi=a_1+b_1i$ 且未知数是实数的方程，可用复数相等的条件来解．如题13.

2.虽具有 $a+bi=a_1+b_1i$ 的形式，但未知数不是实数