

中学生课外读物

数学习题集

代数和三角口分

$$ax=b$$



王 得 福 编

吉 林 人 民 出 版 社

中学生课外读物

数 学 习 题 集

代数和三角部分

王 得 福 编

吉林人民出版社

中学生课外读物
数 学 习 题 集
代数和三角部分
王 得 福 编

*

吉林人民出版社出版 吉林省新华书店发行
长春新华印刷厂印刷

*

787×1092毫米32开本 5.5%印张 92,000字
1978年5月第1版 1978年5月第1次印刷
书号: 7091·988 定价: 0.40元

前 言

为了使在校的中学生更好地掌握所学到的代数和三角基础知识，并能运用这些知识解决实际问题，编写了这本习题集，供学生学习和教师教学时选用。

本习题集分为数、代数式、代数方程不等式、函数和数列排列组合二项式定理等五个部分。每个部分包括三套题目：A号题是基本练习题，B号题是比前者较难一些的练习题，C号题是选作题。书后附有答案，供练习时参考。

由于水平所限，书中一定存在缺点和错误，希望读者批评、指正。

编 者

1978年2月

目 录

一、数	(1)
1. 有理数	(1)
2. 实数	(4)
3. 复数	(7)
二、代数式	(15)
1. 整式	(15)
2. 分式	(20)
3. 根式	(25)
三、代数方程、不等式	(31)
1. 一次方程	(31)
2. 二次方程	(38)
3. 可化为一次或二次方程的方程	(48)
4. 不等式	(54)
四、函数	(64)
1. 代数函数	(64)
2. 指数函数	(71)
3. 对数函数	(79)
4. 三角函数	(88)
五、数列、排列、组合、二项式定理	(123)
1. 数列	(123)
2. 排列、组合、二项式定理	(132)
3. 数学归纳法	(142)
习题答案	(144)

一、数

1. 有 理 数

习 题 A

1. 计算:

$$(-3)^2; -3^2; -(-3)^2; (-2)^3; -2^3; \\ -(-2)^3.$$

2. 计算:

$$-5^2 \times 3; (-5 \times 3)^2; -5 \times 3^2; (-5)^2 \times 3.$$

3. 求下列各数的绝对值:

$$-5 \times 0; -\frac{2}{7}; -(-0.1)^3; 1-7^2; 7^2-1.$$

4. 求下列各数的倒数:

$$-8^2; -3 \times 0.1; |-0.75|; 1-\frac{2}{3}.$$

5. 求下列各数的相反数:

$$-3^3; 0 \times (-5); \frac{5}{7}-1; 1-\frac{5}{7}.$$

6. 什么数等于它的倒数?

7. 什么数等于它的相反数?

8. 什么数的绝对值等于它的相反数?

9. 一个数的相反数的相反数等于什么?

10. 一个数的倒数的倒数等于什么?

习 题 B

11. 证明: 不存在这样两个有理数, 它们既互为相反数, 又互为倒数.

12. 证明: 若两个数互为倒数, 那么这两个数的相反数也互为倒数.

13. 证明: 若两个数互为相反数, 那么这两个数的倒数也互为相反数 (这两个数不为 0).

14. 证明: 若两个数互为相反数, 那么这两个数的相反数也互为相反数.

15. 证明: 若两个数互为倒数, 那么这两个数的倒数也互为倒数.

16. 计算:

$$\left| 1 - \left| 3 - 7.2 \right| \right|; \quad - \left| (-2) \times 7 \right| \times \left| -4 \right| \\ \times \frac{3}{8}.$$

17. 计算:

$$\left| 2 - x \right| + x; \quad \frac{\left| x \right|}{x}.$$

18. 计算:

$$1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + 7 - 8 + 9 - 10 + 11 - 12.$$

19. 绝对值相等的两个数有什么关系?

20. 绝对值相等的两个数互为倒数, 这两个数是什么数?

习 题 C

21. 证明: 若两个数互为倒数, 那么它们的和的倒数与它们的倒数的和也互为倒数.

22. 证明: 二数之积的相反数与这二数相反数之积互为相反数.

23. 若三个数互为倒数, 求证: 这三个数都是 1 或都是 -1.

24. 若三个数互为相反数, 求证: 这三个数都是 0.

25. 求证: 二数之和的相反数等于这二数的相反数之和.

26. 计算:

$$|3-x| + |x-2| + |5-x| - |x-5|.$$

27. 若 $|ab| + 1 = |a| + |b|$, 求 a, b .

28. 若 a, b 是整数, 且: $|ab| = |a| + |b|$, 求 a, b .

29. 若 $x^2 = |x| \times 2$, 求 x .

30. 若 $x^n = |x|$, 求 x .

2. 实 数

习 题 A

31. 指出下列各数那些是有理数, 那些是无理数:

$$-\frac{2}{3}; 0.72; 3.\dot{2}5\dot{7}; 1.232232223\cdots\cdots;$$

$$\sqrt{7}; \sqrt[3]{8}; \sqrt{2}-1; \frac{1}{\sqrt{3}}; -5\sqrt{6};$$

$$\sqrt{144}+13.$$

32. 比较下列每对数的大小:

$$0.\dot{6}, \frac{3}{4}; \sqrt{5}, 2.7; \pi, \sqrt{10};$$

$$\sqrt{3}-1, 1-\sqrt{3}; \frac{4}{3}, \frac{3}{4}; a, -a;$$

$$\frac{n}{m}, \frac{m}{n}; a-b, b-a; a^2, 0.$$

33. 若 $(a-1)^2 + (b+2)^2 = 0$, a, b 为实数, 求 a, b .

34. 若 $x^2 + 2x + 1 + y^2 - 6y + 9 = 0$, x, y 为实数, 求 x, y .

35. 若 $4a^2 + b^2 - 4a + 10b + 26 = 0$, a, b 为实数, 求 a, b .

36. 写出两个其和为有理数的无理数.

37. 写出两个其积为有理数的无理数。
 38. 写出两个其和其积都是有理数的无理数。
 39. 有没有满足下列条件的实数？

$$x^2 + y^2 + 1 = 0$$

$$x^2 + y^2 - 2x + 6y + 11 = 0$$

$$x^2 - 2xy + y^2 + 5 = 0$$

40. 求下列各数的相反数与倒数：

$$\sqrt{3}; \sqrt{2} - 1; \sqrt[3]{2}; \sqrt{5} + \sqrt{3}; |-\sqrt{7}|.$$

习 题 B

41. 求证： $\sqrt{3}$ 是无理数。
 42. 求证： $\sqrt{2} + 1$ 是无理数。
 43. 求证： $\sqrt[3]{2}$ 是无理数。
 44. 指出下列各数那些是有理数，那些是无理数：
 $\sqrt{7} - 2; (\sqrt{5} + 1)(\sqrt{5} - 1); \sqrt[3]{64};$
 $\sqrt[n]{a^n}; (\sqrt{2} - 1)^2; (\sqrt{11})^3.$
 45. a, b 是什么整数时， $\sqrt{a} + b$ 是有理数，是无理数？
 46. $0 \leq n \leq 50$, n 是什么整数时， $\sqrt{n}$ 是有理数？是无理数？
 47. x, y 是无理数， $xy, x + y$ 是不是无理数？
 48. 若 x, y, z 是实数，且：

$$x^2 + y^2 + z^2 = xy + yz + zx$$

求证: $x=y=z$.

49. 求证: x^2+x+1 , 不论 x 是什么数时都不能是负数.

50. 求证: $4ab-a^2-5b^2$, 不论 a, b 是什么实数时, 都不能为正数.

51. x 是实数, 比较 x^2+1 与 $2x$ 的大小.

52. x 是正数, 比较 $2-x$ 与 $\frac{1}{x}$ 的大小.

53. 比较大小: $\sqrt{11}-\sqrt{10}$ 与 $2\sqrt{2}-\sqrt{7}$.

54. 比较大小: $\sqrt{11}+1$ 与 $\sqrt{19}$.

55. 比较大小: $\sqrt[3]{3}$ 与 $\sqrt{2}$.

习 题 C

56. 证明: $\lg 2$ 是无理数.

57. a, b 是有理数, $\sqrt{c}$ 是无理数, 若:

$a+b\sqrt{c}=0$, 求证: $a=0, b=0$.

58. a, b, c, d 是有理数, $\sqrt{n}$ 是无理数, 若 $a+b\sqrt{n}=c+d\sqrt{n}$, 求证: $a=c, b=d$.

59. 证明: $\sqrt{3}+\sqrt{2}$ 是无理数.

60. 若 a, b, c, d 是有理数, 那么:

$\frac{a+b\sqrt{2}}{c+d\sqrt{2}} = \sqrt{3}$ 成不成立? 为什么?

61. 若 a, b, c, d 是有理数, 且:

$a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} + d\sqrt{6} = 0$, 求证:

$$a = b = c = d = 0.$$

62. a, b, x, y 为实数, 若:

$$(ax + by)^2 + (ay - bx)^2 = 0.$$

求证: $a = b = 0$ 或 $x = y = 0$.

63. a, b, x, y 是实数, 且:

$$(x^2 + y^2)(a^2 + b^2) - (ax + by)^2 = 0.$$

求证: $a:b = x:y$.

64. 证明: 不论 x, y 是什么实数, $x^2 + y^2 - 2x + 12y + 40$ 都是正数.

65. 证明: 不论 x, y 是什么实数, $x^2 + xy + y^2$ 都是正数.

3. 复 数

习 题 A

66. 指出下列各数哪些是实数, 哪些是虚数, 哪些是纯虚数:

$$25i^2; -i^3; 3 - 2i; (1 + 5i)(1 - 5i);$$

$$\sqrt{-3}; \sqrt[3]{-3}; ai.$$

67. a, b 是什么实数时, $a + 3 + (b - 2)i$ 是实数, 是虚数, 是纯虚数?

68. x 是什么实数时, $\sqrt{x - 3} + x - 2$ 是实数,

是虚数，是纯虚数？

69. x, y 是实数，若： $2x + y + 3i = 5 - (x - y)i$ ，求 x, y 。

70. 求： $|2 + 3i|$ ； $|x + yi|$ 。

71. 若： $|a + bi| = 0$ ，求 a, b 。 a, b 是实数。

72. 已知 $a + 2i$ 的绝对值等于 $\sqrt{20}$ ，求 a (a 是实数)。

73. 计算：

$$i^{38}, i^{61}, i^{127}, i^{300}, i^{2n}.$$

74. 计算：

$$i + i^2 + i^3 + i^4 + \dots + i^{100}.$$

75. 计算：

$$i \cdot i^2 \cdot i^3 \cdot i^4 \cdot \dots \cdot i^{100}.$$

76. 计算：

$$\sqrt{-2} \cdot \sqrt{-3}; \sqrt{(-2)(-3)}; (\sqrt{-5})^2; \sqrt{(-5)^2}.$$

77. 计算：

$$(2 - 3i)(3 + 2i); (1 + \sqrt{2}i)^2; \frac{1 + 2i}{1 - i}.$$

78. 计算：

$$\begin{aligned} & 1) 2(\cos 35^\circ + i \sin 35^\circ)[3(\cos 25^\circ + i \sin 25^\circ)]; \\ & 2) [12(\cos 50^\circ + i \sin 50^\circ)] \div [2(\cos 5^\circ + i \sin 5^\circ)]; \end{aligned}$$

3) $[\sqrt{3}(\cos 22.5^\circ + i \sin 22.5^\circ)]^4$;

4) $\sqrt[3]{27(\cos 135^\circ + i \sin 135^\circ)}$.

79. 求下列各数的平方根:

$24 + 10i$; i .

80. 求: $\sqrt[3]{1+i}$; $\sqrt[5]{1-\sqrt{3}i}$; $\sqrt[4]{1}$.

81. 求下列各数的共轭复数及其绝对值:

$3-4i$; $-2+2i$; $-i$; -7 ; 0 .

82. 求下列各数的幅角:

$-\sqrt{3}+i$; $1-i$; $-1-\sqrt{3}i$; $-3i$; $5i$;

-27 ; 6 ; $1+i$.

习 题 B

83. a 、 b 是什么实数时, $a+\sqrt{b}$ 是有理数, 是无理数, 是实数, 是虚数, 是纯虚数?

84. x 是什么实数时, $\sqrt{x-1}+\sqrt{2-x}$ 是实数, 是虚数?

85. Z 是复数, 若 $|Z| = 2 + Z$, 求 Z .

86. A 、 B 是复数, 求证:

$$|A \cdot B| = |A| \cdot |B|, \left| \frac{A}{B} \right| = \frac{|A|}{|B|},$$

$$|A| + |B| \geq |A + B|.$$

87. 求证: 二数和的共轭复数等于这二数的共轭复数的和.

88. 求证：二数积的共轭复数等于这二数的共轭复数的积。

89. 若复数 Z 与其倒数共轭，求证： $|Z| = 1$ 。

90. 一个数的平方与其本身共轭，求这数。

91. 求证：一个复数的倒数等于这个数的共轭复数除以这个数的绝对值平方。

92. 求证：只有实数或纯虚数的平方才能等于实数。

93. 求证：一个数的平方的共轭复数等于这个数的共轭复数的平方。

94. 求证：二数之商的共轭复数等于这二数的共轭复数之商。

95. 设 w_1 、 w_2 是 1 的两个虚立方根，求证：

$$w_1^2 = w_2, w_2^2 = w_1, 1 + w_1 + w_2 = 0.$$

96. 设 w_1 、 w_2 是 1 的两个虚立方根，求证：

$p = w_1^n + w_2^n$ ，当 n 是 3 的倍数时， $p = 2$ ，
当 n 不是 3 的倍数的正整数时， $p = -1$ 。

97. 设 w_1 、 w_2 、 w_3 、 w_4 是 -1 的 4 个 4 次方根，
求证： $w_1 + w_2 + w_3 + w_4 = 0$ 。

98. 设 1 的立方根为 1、 w_1 、 w_2 ，求证：

$$1 \times w_1 \times w_2 = 1.$$

99. 设 -1 的 4 次方根为 w_1 、 w_2 、 w_3 、 w_4 ，
求证： $w_1 \times w_2 \times w_3 \times w_4 = 1$ 。

100. 设 w 是1的一个虚5次方根, 求证:

$$1 + w + w^2 + w^3 + w^4 = 0.$$

101. 求证: $r(\cos \theta + i \sin \theta)$ 的共轭复数是:
 $r[\cos(-\theta) + i \sin(-\theta)]$.

102. 用复数的三角式证明:

$$\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta,$$

$$\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta.$$

103. 用复数的三角式证明:

$$\cos 3\theta = \cos^3 \theta - 3 \cos \theta \sin^2 \theta,$$

$$\sin 3\theta = 3 \cos^2 \theta \sin \theta - \sin^3 \theta.$$

104. 设 $r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)$ 及 $r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$ 之和的绝对值为 r , 求证:

$$r^2 = r_1^2 + r_2^2 + 2r_1 r_2 \cos(\theta_1 - \theta_2).$$

105. 计算:

$$\frac{(\cos \theta + i \sin \theta)^5 \cdot (\cos \varphi + i \sin \varphi)^3}{(\cos \theta - i \sin \theta)^2 \cdot [\cos(\theta + 2\varphi) + i \sin(\theta + 2\varphi)]}.$$

106. 计算:

$$\frac{(1-i)^5 \cdot [\cos(\theta + 45^\circ) + i \sin(\theta + 45^\circ)]}{[\cos(60^\circ + \theta) + i \sin(60^\circ + \theta)](1 + \sqrt{3}i)^3}.$$

107. 计算:

$$\begin{aligned} & 1 + (\cos 30^\circ + i \sin 30^\circ) + (\cos 30^\circ + i \sin 30^\circ)^2 \\ & + (\cos 30^\circ + i \sin 30^\circ)^3 + (\cos 30^\circ + i \sin 30^\circ)^4 \\ & + \cdots + (\cos 30^\circ + i \sin 30^\circ)^9. \end{aligned}$$

108. 若 $(\cos 10^\circ + i \sin 10^\circ) = a + bi$, 求:

$$1 + (\cos 10^\circ + i \sin 10^\circ) + (\cos 20^\circ + i \sin 20^\circ) \\ + (\cos 30^\circ + i \sin 30^\circ) + (\cos 40^\circ + i \sin 40^\circ) \\ + \cdots + (\cos 110^\circ + i \sin 110^\circ).$$

109. 证明: 不论 n 是什么自然数,

$$\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^n + \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^n \text{ 都是实数.}$$

110. 设

$$p = \left(\frac{-1-i}{\sqrt{2}}\right)^n - \left(\frac{-1+i}{\sqrt{2}}\right)^n$$

求证: 当 n 是奇数时, p 是纯虚数; 当 n 是偶数时,
 $p = 0$.

习 题 C

111. 设 $Z = \cos \theta + i \sin \theta$, 求证:

$$Z^n + Z^{-n} = 2 \cos n\theta.$$

112. 设 w 是 1 的任一个 n 次虚数根, 求证:

$$1 + w + w^2 + w^3 + \cdots + w^{n-1} = 0.$$

113. 设 1 的 n 个 n 次方根为:

$$1, w_1, w_2, w_3, \cdots, w_{n-1},$$

求证: $p = 1 \cdot w_1 \cdot w_2 \cdot w_3 \cdots w_{n-1}$, 当 n 是奇数时,

$p = 1$, 当 n 是偶数时, $p = -1$.