数学物理方法学习指导

郭玉翠 编著

清华大学出版社

数学物理方法学习指导

郭玉翠　编著

清华大学出版社
北京

内容简介

本书是工科研究生和本科生学习“数学物理方法”课程的学习指导书，也可以作为教师和科研人员的参考用书．全书共分10章，内容包括：场论初步，典型方程的推导和定解条件的提出，直角坐标系下的分离变量法和二维 Laplace 方程在极坐标系下的分离变量法，二阶线性常微分方程的级数解法与 Sturm-Liouville 本征值问题，正交曲线坐标系下的分离变量法——Bessel 函数和 Legendre 多项式的引入、性质和应用，求解定解问题的行波法，积分变换法，Green 函数法和变分法，简单积分方程的解法和非线性偏微分方程的某些初等解法等．除第10章外，每章分为三部分：一、基本要求与内容提要；二、基础训练，其中包括例题分析、习题、解答与提示；三、拓宽与提高，其中包括例题分析、习题、解答与提示．第10章介绍积分方程和非线性偏微分方程的某些解法，主要为读者深入研究数学物理问题指出方向，或用来拓宽视野．

图书在版编目(CIP)数据

数学物理方法学习指导/郭玉翠编著．—北京：清华大学出版社，2006.2
ISBN 7-302-12256-3

Ⅰ．数…　Ⅱ．郭…　Ⅲ．数学物理方法—高等学校—教学参考资料　Ⅳ．O411.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第152397号

出 版 者：清华大学出版社
http://www.tup.com.cn
社 总 机：010-62770175
地　　址：北京清华大学学研大厦
邮　　编：100084
客户服务：010-62776969
组稿编辑：刘　颖
文稿编辑：王海燕
印 刷 者：北京四季青印刷厂
装 订 者：三河市李旗庄少明装订厂
发 行 者：新华书店总店北京发行所
开　　本：185×230　**印张**：21　**字数**：447千字
版　　次：2006年2月第1版　2006年2月第1次印刷
书　　号：ISBN 7-302-12256-3/O・509
印　　数：1～4000
定　　价：32.00元

前言

本书是为电子、通信、机械和建筑等专业的本科生和研究生学习“数学物理方法”课程而编写的学习指导书，也可以作为教师和科研人员的参考用书. 本书的主要目的是：一、帮助学习“数学物理方法”课程的学生理清思路，通过详细的例题分析理解应该掌握的内容，更重要的是通过理解解题的过程，体会到物理思想和数学方法的正确运用. 因为“数学物理方法”这门课程的目的就是架起将数学方法应用于求解实际物理问题的桥梁，数学物理问题中从建立方程，给出定解条件，求解定解问题，到对问题的解进行分析的解题过程，其实就是科研过程的一个微缩. 如果学生们能够在掌握内容的同时，体会到这层意义，定会受益匪浅. 二、给学生和教师提供方便和实用的“手册”式的参考资料. 其实编者本人不主张学生在自己动手做题之前先看答案或解答，在以往教学过程中，学生们提出要习题答案和解答时，我的回答都是鼓励他们自己完成，也确实有的学生做得很好，提出过很有见地的思想. 但是现在学生们在校期间要学习的新知识大大增加，而学习时间又相对减少确是实情，为了同学们能用有限的时间学好这门课程，我认为这本学习指导书会是有用的.

本书共分 10 章，除第 10 章外，每章分为基本要求与内容提要、基础训练和拓宽与提高三部分. 基础训练和拓宽与提高部分又分为例题分析、习题、解答与提示三部分. 内容提要是相关内容的精讲，供学生复习参考之用；基础训练部分一般来说适合本科生的要求；而拓宽与提高部分则是对研究生的要求. 第 10 章是有关积分方程和非线性偏微分方程的内容，这两部分内容都是数学物理问题的重要组成部分，对学生的深入学习起到指导方向的作用. 这一章没有分基础训练和拓宽与提高.

本书既可与北京邮电大学出版社出版的《数学物理方法（研究生用）》（郭玉翠编著，2003 年 1 月）和《数学物理方法简明教程》（郭玉翠编著，2002 年 12 月）配套使用，又可以作为独立的数学物理方法学习指导书.

在本书即将出版之际，我深深地感谢我的丈夫和儿子，是他们的支持与理解，使我能够将大部分时间和精力投入到教学和科研工作中；我还要感谢北京邮电大学理学院教改基金的支持，感谢理学院副院长王永刚教授的帮助；感谢我在北京邮电大学教过的历届研

究生和本科生同学们，是他们不断地提出问题，激励我不断努力，对许多问题进行思考再思考；我尤其要感谢我的研究生叶鹏同学和徐淑奖同学，他们核对了本书大部分习题的答案，李华英研究生则完成了部分书稿的打字工作，在此一并表示感谢；我更要感谢清华大学出版社的支持与帮助，特别是刘颖、王海燕两位编辑极强的责任心和周到的工作，使本书增色不少.

本书的初衷是帮助学习"数学物理方法"课程的学生们学好这门公认为比较难学的课程，同时也给讲授这门课的老师们提供一些有益的参考，但由于编者的水平有限，书中的不足之处，甚至错误在所难免，敬请各位读者不吝赐教.

编　者

2005年10月

目 录

第1章 场论初步

1.1 基本要求与内容提要

1.1.1 基本要求

1. 掌握标量场的梯度、矢量场的散度和旋度在正交曲线坐标系下的表示；
2. 掌握 Hamilton 算符的性质及其运算公式；
3. 掌握正交曲线坐标系下 Laplace 算符的表示方法；
4. 了解算子方程及其物理意义.

1.1.2 内容提要

1. 梯度、散度和旋度在直角坐标系下的表示与 Hamilton 算符

(1) 梯度

设 $u=u(M)=u(x,y,z)$ 是一个标量场，其梯度定义为

$$\mathrm{grad}\,u=\frac{\partial u}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\boldsymbol{k}.$$

(2) 散度

设 $\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z)$ 是一个矢量场，其散度定义为

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{a}=\frac{\partial a_x}{\partial x}+\frac{\partial a_y}{\partial y}+\frac{\partial a_z}{\partial z}.$$

(3) 旋度

设 $\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z)$ 是一个矢量场，其旋度定义为

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{a}=\left(\frac{\partial a_z}{\partial y}-\frac{\partial a_y}{\partial z},\frac{\partial a_x}{\partial z}-\frac{\partial a_z}{\partial x},\frac{\partial a_y}{\partial x}-\frac{\partial a_x}{\partial y}\right).$$

为了方便记忆，常把旋度记为三阶行列式的形式：

$$\text{rot}\, \boldsymbol{a} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix}.$$

(4) Hamilton 算符

算符$\nabla = \boldsymbol{i}\dfrac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\dfrac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k}\dfrac{\partial}{\partial z}$称为 Hamilton 算符,它具有微分和矢量的双重性质，其运算规则是

$$\nabla u = \left(\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)u = \frac{\partial u}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\boldsymbol{k},$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{a} = \left(\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot (a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k})$$

$$= \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z},$$

$$\nabla \times \boldsymbol{a} = \left(\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\times (a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k})$$

$$= \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\right)\boldsymbol{i} + \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}\right)\boldsymbol{j} + \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right)\boldsymbol{k}.$$

这样,梯度、散度和旋度分别记为

$$\text{grad}\, u = \nabla u, \quad \text{div}\, \boldsymbol{a} = \nabla \cdot \boldsymbol{a}, \quad \text{rot}\, \boldsymbol{a} = \nabla \times \boldsymbol{a}.$$

2. 正交曲线坐标系与梯度、散度和旋度在正交曲线坐标系下的表示

(1) 正交曲线坐标系

设有空间曲线坐标系$\{q_1, q_2, q_3\}$,$\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$分别为沿$q_1, q_2, q_3$切线方向的单位矢量，若有关系

$$\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases} \quad i, j = 1, 2, 3,$$

则称$\{q_1, q_2, q_3\}$为正交曲线坐标系.

(2) 度规系数

设正交曲线坐标系$\{q_1, q_2, q_3\}$和直角坐标系$\{x, y, z\}$的关系为

$$x = x(q_1, q_2, q_3), \quad y = y(q_1, q_2, q_3), \quad z = z(q_1, q_2, q_3),$$

则称

$$h_1 = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_1}\right)^2},$$

$$h_2 = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_2}\right)^2},$$

$$h_3=\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_3}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial q_3}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial q_3}\right)^2}$$

为度规系数.

(3) 正交曲线坐标系中的 Hamilton 算符

$$\nabla=\boldsymbol{e}_1\frac{1}{h_1}\frac{\partial}{\partial q_1}+\boldsymbol{e}_2\frac{1}{h_2}\frac{\partial}{\partial q_2}+\boldsymbol{e}_3\frac{1}{h_3}\frac{\partial}{\partial q_3}.$$

(4) 梯度在正交曲线坐标系下的表示

$$\text{grad } u=\nabla u=\boldsymbol{e}_1\frac{1}{h_1}\frac{\partial u}{\partial q_1}+\boldsymbol{e}_2\frac{1}{h_2}\frac{\partial u}{\partial q_2}+\boldsymbol{e}_3\frac{1}{h_3}\frac{\partial u}{\partial q_3}.$$

(5) 散度在正交曲线坐标系下的表示

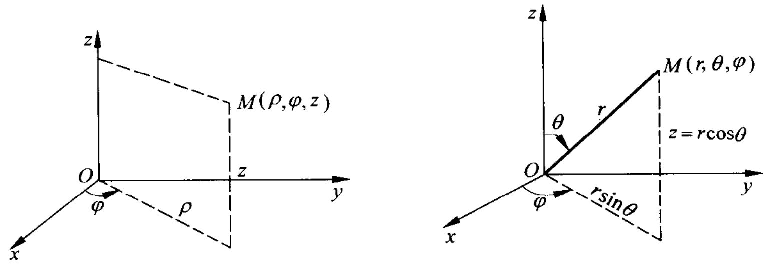
$$\text{div } \boldsymbol{a}=\nabla\cdot\boldsymbol{a}=\frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial(a_1h_2h_3)}{\partial q_1}+\frac{\partial(a_2h_1h_3)}{\partial q_2}+\frac{\partial(a_3h_1h_2)}{\partial q_3}\right].$$

(6) 旋度在正交曲线坐标系下的表示

$$\text{rot } \boldsymbol{a}=\nabla\times\boldsymbol{a}=\frac{1}{h_1h_2h_3}\left\{h_1\boldsymbol{e}_1\left[\frac{\partial(h_3a_3)}{\partial q_2}-\frac{\partial(h_2a_2)}{\partial q_3}\right]\right.$$
$$\left.+h_2\boldsymbol{e}_2\left[\frac{\partial(h_1a_1)}{\partial q_3}-\frac{\partial(h_3a_3)}{\partial q_1}\right]+h_3\boldsymbol{e}_3\left[\frac{\partial(h_2a_2)}{\partial q_1}-\frac{\partial(h_1a_1)}{\partial q_2}\right]\right\}.$$

(7) 常用正交曲线坐标系

常用的正交曲线坐标系有柱坐标系和球坐标系，如图 1.1. 它们与直角坐标的关系、度规系数和“三度(梯度、散度、旋度)”表示如下.



(a) 柱坐标系　　(b) 球坐标系

图 1.1

① 柱坐标系$\{\rho,\varphi,z\}$

$$\begin{cases}x=\rho\cos\varphi,\\ y=\rho\sin\varphi,\\ z=z.\end{cases}$$

$$h_1 = 1,\quad h_2 = \rho,\quad h_3 = 1.$$

$$\text{grad } u = \left(\frac{\partial u}{\partial \rho}, \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \varphi}, \frac{\partial u}{\partial z}\right),$$

$$\text{div } \boldsymbol{a} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho a_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial a_z}{\partial z},$$

$$\text{rot } \boldsymbol{a} = \left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial a_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial a_\varphi}{\partial z}\right)\boldsymbol{e}_\rho + \left(\frac{\partial a_\rho}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial \rho}\right)\boldsymbol{e}_\varphi + \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial(\rho a_\varphi)}{\partial \rho} - \frac{\partial a_\rho}{\partial \varphi}\right)\boldsymbol{e}_z.$$

② 球坐标$\{r,\varphi,\theta\}$

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi, \\ y = r\sin\theta\sin\varphi, \\ z = r\cos\theta. \end{cases}$$

$$h_1 = 1,\quad h_2 = r,\quad h_3 = r\sin\theta.$$

$$\text{grad } u = \left(\frac{\partial u}{\partial r}, \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}, \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u}{\partial \varphi}\right),$$

$$\text{div } \boldsymbol{a} = \frac{1}{r}\frac{\partial(r^2 a_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(a_\theta\sin\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi},$$

$$\text{rot } \boldsymbol{a} = \frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial(a_\varphi\sin\theta)}{\partial \theta} - \frac{\partial a_\theta}{\partial \varphi}\right]\boldsymbol{e}_r + \frac{1}{r}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial a_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial(r a_\varphi)}{\partial r}\right]\boldsymbol{e}_\theta + \frac{1}{r}\left[\frac{\partial(r a_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial a_r}{\partial \theta}\right]\boldsymbol{e}_\varphi.$$

3. 有关“三度”的计算公式

(1) 梯度

① $\nabla c = 0$(c 为常数);

② $\nabla(cu) = c\nabla u$(c 为常数);

③ $\nabla(u \pm v) = \nabla u \pm \nabla v$;

④ $\nabla(uv) = v\nabla u + u\nabla v$;

⑤ $\nabla\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\nabla u - u\nabla v}{v^2}$;

⑥ $\nabla F(u) = F'(u)\nabla u$;

⑦ $\nabla \cdot (u\boldsymbol{c}) = \nabla u \cdot \boldsymbol{c}$($\boldsymbol{c}$ 为常矢量).

(2) 散度

① $\nabla \cdot (c\boldsymbol{a}) = c\nabla \cdot \boldsymbol{a}$($c$ 为常数);

② $\nabla \cdot (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = \nabla \cdot \boldsymbol{a} + \nabla \cdot \boldsymbol{b}$;

③ $\nabla \cdot \boldsymbol{c} = 0$($\boldsymbol{c}$ 为常矢量);

④ $\nabla \cdot (u\boldsymbol{a}) = u\nabla \cdot \boldsymbol{a} + (\nabla u) \cdot \boldsymbol{a}$.

(3) 旋度

① $\nabla\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$($\boldsymbol{c}$ 为常矢量);

② $\nabla\times(c\boldsymbol{a})=c\nabla\times\boldsymbol{a}$($c$ 为常数);

③ $\nabla\times(\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b})=\nabla\times\boldsymbol{a}\pm\nabla\times\boldsymbol{b}$;

④ $\nabla\times(u\boldsymbol{a})=u\nabla\times\boldsymbol{a}+\nabla u\times\boldsymbol{a}$;

⑤ $\nabla\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=\boldsymbol{b}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{a})-\boldsymbol{a}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{b})$;

⑥ $\nabla\times(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}(\nabla\cdot\boldsymbol{b})+(\boldsymbol{b}\cdot\nabla)\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}(\nabla\cdot\boldsymbol{a})-(\boldsymbol{a}\cdot\nabla)\boldsymbol{b}$;

⑦ $\nabla(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})=\boldsymbol{b}\times(\nabla\times\boldsymbol{a})+(\boldsymbol{b}\cdot\nabla)\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}\times(\nabla\times\boldsymbol{b})+(\boldsymbol{a}\cdot\nabla)\boldsymbol{b}$;

⑧ $\nabla\cdot(\nabla u)=\nabla^2 u$;

⑨ $\nabla\cdot(\nabla\times\boldsymbol{a})=0$;

⑩ $\nabla\times(\nabla u)=\boldsymbol{0}$;

⑪ $\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{a})=\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{a})-\nabla^2\boldsymbol{a}$.

4. Laplace 算符

(1) 直角坐标系下的 Laplace 算符

$$\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

(2) 正交曲线坐标系下的 Laplace 算符

$$\nabla^2 u=\frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{h_2h_3}{h_1}\frac{\partial u}{\partial q_1}\right)+\frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{h_3h_1}{h_2}\frac{\partial u}{\partial q_2}\right)+\frac{\partial}{\partial q_3}\left(\frac{h_1h_2}{h_3}\frac{\partial u}{\partial q_3}\right)\right].$$

应用于球坐标系和柱坐标系分别有

$$\nabla^2_{柱}=\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

$$\nabla^2_{球}=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}.$$

(3) Laplace 算符作用于矢量函数

① 直角坐标

$$\nabla^2\boldsymbol{a}=\nabla^2 a_x\boldsymbol{i}+\nabla^2 a_y\boldsymbol{j}+\nabla^2 a_z\boldsymbol{k}.$$

② 柱坐标

$$(\nabla^2\boldsymbol{a})_z=\left(\nabla^2 a_\rho-\frac{a_\rho}{\rho^2}-\frac{2}{\rho^2}\frac{\partial a_\varphi}{\partial\varphi}\right)\boldsymbol{e}_\rho+\left(\nabla^2 a_\varphi-\frac{a_\varphi}{\rho^2}+\frac{2}{\rho^2}\frac{\partial a_\rho}{\partial\varphi}\right)\boldsymbol{e}_\varphi+\nabla^2 a_z\boldsymbol{e}_z.$$

③ 球坐标

$$(\nabla^2\boldsymbol{a})_q=\left(\nabla^2 a_r-\frac{2}{r^2}a_r-\frac{2}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(a_\theta\sin\theta)-\frac{2}{r^2\sin\theta}\frac{\partial a_\varphi}{\partial\varphi}\right)\boldsymbol{e}_r$$

$$+\left(\nabla^2 a_\theta-\frac{1}{r^2\sin^2\theta}a_\theta+\frac{2}{r^2}\frac{\partial a_r}{\partial\theta}-\frac{2\cos\theta}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial a_\varphi}{\partial\varphi}\right)\boldsymbol{e}_\theta$$

$$+\left(\nabla^2 a_\varphi - \frac{1}{r^2\sin^2\theta}a_\varphi + \frac{2}{r^2\sin\theta}\frac{\partial a_r}{\partial\varphi} + \frac{2\cos\theta}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial a_\theta}{\partial\varphi}\right)\boldsymbol{e}_\varphi.$$

5. 算子方程

定义 1 满足方程$\nabla\times\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$的矢量场$\boldsymbol{a}(x,y,z)$称为无旋场.

定理 1 若有$\nabla\times\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$,则有标量函数$u(x,y,z)$,使$\boldsymbol{a}=\nabla u$,$u$称为$\boldsymbol{a}$的势函数,因此无旋场又称为有势场.

势函数的求法:

$$u(x,y,z)=\int_{x_0}^{x}a_x(x,y_0,z_0)\mathrm{d}x+\int_{y_0}^{y}a_y(x,y,z_0)\mathrm{d}y+\int_{z_0}^{z}a_z(x,y,z)\mathrm{d}z.$$

定义 2 满足方程$\nabla\cdot\boldsymbol{a}=0$的矢量场$\boldsymbol{a}(x,y,z)$称为无源场.

定理 2 如果$\nabla\cdot\boldsymbol{a}=0$,则存在矢量场$\boldsymbol{A}$,使$\nabla\times\boldsymbol{A}=\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{A}$称为$\boldsymbol{a}$的矢量势,$\boldsymbol{A}=(A_x,A_y,A_z)$满足下列等式:

$$A_x=\frac{\partial}{\partial x}\int A_x\mathrm{d}x,\quad A_y=\int a_z\mathrm{d}x+\frac{\partial}{\partial y}\int A_x\mathrm{d}x,\quad A_z=-\int a_y\mathrm{d}x+\frac{\partial}{\partial z}\int A_x\mathrm{d}x.$$

定理 3 如果给定矢量场的散度和旋度以及矢量场在区域边界上的法向分量或切向分量,则区域内的矢量场惟一确定.

定理 4 若矢量场$\boldsymbol{a}$具备由定理3所要求的边界条件,则该矢量场可以惟一地分解为无旋场和无源场的叠加,即对于任何$\boldsymbol{a}$有

$$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2,$$

其中

$$\nabla\times\boldsymbol{a}_1=\boldsymbol{0},\quad \nabla\cdot\boldsymbol{a}_2=0.$$

已知无旋场的散度,求解场的问题

$$\begin{cases}\nabla\times\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0},\\ \nabla\cdot\boldsymbol{a}=f(x,y,z)\quad(f\text{ 为已知函数}),\end{cases}$$

可以化成 Poisson 方程来求解:

$$\nabla^2 u=f(x,y,z),$$

其中$\boldsymbol{a}=\nabla u$.

已知无源场的旋度,求解场的问题

$$\begin{cases}\nabla\cdot\boldsymbol{a}=0,\\ \nabla\times\boldsymbol{a}=\boldsymbol{u}(x,y,z)\quad(\boldsymbol{u}\text{ 为已知函数}),\end{cases}$$

可以化成 Poisson 方程组来求解

$$\nabla^2\boldsymbol{A}=-\boldsymbol{u}(x,y,z),$$

即

$$\nabla^2 A_x=-u_x,\quad \nabla^2 A_y=-u_y,\quad \nabla^2 A_z=-u_z,$$

其中 $\boldsymbol{a}=\nabla\times\boldsymbol{A}$.

1.2 基础训练

1.2.1 例题分析

例 1 设 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ 为点 $M(x,y,z)$ 的矢径 $\boldsymbol{r}$ 的模，试证：

$$\operatorname{grad} r=\frac{\boldsymbol{r}}{r}=\boldsymbol{r}^{\circ}.$$

证明 因为

$$\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\frac{x}{r},$$

$$\frac{\partial r}{\partial y}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\frac{y}{r},$$

$$\frac{\partial r}{\partial z}=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\frac{z}{r},$$

所以

$$\operatorname{grad} r=\frac{\partial r}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial r}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial r}{\partial z}\boldsymbol{k}=\frac{x}{r}\boldsymbol{i}+\frac{y}{r}\boldsymbol{j}+\frac{z}{r}\boldsymbol{k}=\frac{\boldsymbol{r}}{r}=\boldsymbol{r}^{\circ}.$$

例 2 求标量场 $u=xy^2+yz^3$ 在点 $M(2,-1,1)$ 处的梯度.

解
$$\operatorname{grad} u=\frac{\partial u}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\boldsymbol{k}=y^2\boldsymbol{i}+(2xy+z^3)\boldsymbol{j}+3yz^2\boldsymbol{k},$$

$$\operatorname{grad} u|_M=\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}-3\boldsymbol{k}.$$

例 3 设电荷 q 位于点 (x_0,y_0,z_0)，在其周围电场中任意一点的电场强度为 $\boldsymbol{E}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}$，电势为 $u=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r}$，则 $\boldsymbol{E}=-\nabla u$.

证明 因为 $\nabla r=\nabla\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}=\frac{\boldsymbol{r}}{r}$，所以

$$-\nabla u=-\nabla\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r}\right)=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\nabla r=\boldsymbol{E}.$$

例 4 在电荷 q 所产生的静电场中，求电位移矢量 $\boldsymbol{D}$ 在任何一点 M 处的散度 $\operatorname{div}\boldsymbol{D}$.

解 取点电荷所在点为坐标原点，此时

$$\boldsymbol{D}=\frac{q}{4\pi r^3}\boldsymbol{r},$$

其中 $\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$，$r=|\boldsymbol{r}|$. 因此

$$D_x=\frac{qx}{4\pi r^3},\quad D_y=\frac{qy}{4\pi r^3},\quad D_z=\frac{qz}{4\pi r^3}.$$

于是有

$$\frac{\partial D_x}{\partial x}=\frac{q}{4\pi}\frac{r^2-3x^2}{r^5},\quad \frac{\partial D_y}{\partial y}=\frac{q}{4\pi}\frac{r^2-3y^2}{r^5},\quad \frac{\partial D_z}{\partial z}=\frac{q}{4\pi}\frac{r^2-3z^2}{r^5}.$$

所以

$$\operatorname{div}\boldsymbol{D}=\frac{\partial D_x}{\partial x}+\frac{\partial D_y}{\partial y}+\frac{\partial D_z}{\partial z}=\frac{q}{4\pi}\frac{3r^2-3(x^2+y^2+z^2)}{r^5}=0\quad(r\neq 0).$$

可见，除点电荷 q 所在的原点($r=0$)外，电位移矢量 $\boldsymbol{D}$ 的散度处处为零，即是一个无源场.

例 5 求矢量场 $\boldsymbol{A}=xy^2z^2\boldsymbol{i}+z^2\sin y\boldsymbol{j}+x^2e^y\boldsymbol{k}$ 的旋度.

解

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ xy^2z^2 & z^2\sin y & x^2e^y\end{vmatrix}&=\left[\frac{\partial}{\partial y}(x^2e^y)-\frac{\partial}{\partial z}(z^2\sin y)\right]\boldsymbol{i}+\left[\frac{\partial}{\partial z}(xy^2z^2)-\frac{\partial}{\partial x}(x^2e^y)\right]\boldsymbol{j}\\&\quad+\left[\frac{\partial}{\partial x}(z^2\sin y)-\frac{\partial}{\partial y}(xy^2z^2)\right]\boldsymbol{k}\\&=(x^2e^y-2z\sin y)\boldsymbol{i}+2x(y^2z-e^y)\boldsymbol{j}-2xyz^2\boldsymbol{k}.\end{aligned}$$

例 6 设有一个刚体绕过原点 O 的某个轴转动，其角速度为 $\boldsymbol{\omega}=\omega_1\boldsymbol{i}+\omega_2\boldsymbol{j}+\omega_3\boldsymbol{k}$，则刚体上的每一点都具有线速度 $\boldsymbol{v}$，从而构成一个线速度场. 由运动学知道，矢径为 $\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$ 的点的线速度为

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}=(\omega_2z-\omega_3y)\boldsymbol{i}+(\omega_3x-\omega_1z)\boldsymbol{j}+(\omega_1y-\omega_2x)\boldsymbol{k},$$

求线速度场 $\boldsymbol{v}$ 的旋度.

解 速度场 $\boldsymbol{v}$ 的旋度为

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{v}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ \omega_2z-\omega_3y & \omega_3x-\omega_1z & \omega_1y-\omega_2x\end{vmatrix}=2\omega_1\boldsymbol{i}+2\omega_2\boldsymbol{j}+2\omega_3\boldsymbol{k}=2\boldsymbol{\omega}.$$

这说明在刚体转动的线速度场中，任意点 M 处的旋度，除去一个常数因子外，恰恰等于刚体转动的角速度(旋度因而得名).

例 7 证明：$\nabla(uv)=v\nabla u+u\nabla v$.

证明 根据定义有

$$\begin{aligned}\nabla(uv)&=\left(\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x}+\boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y}+\boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)uv\\&=\boldsymbol{i}\frac{\partial(uv)}{\partial x}+\boldsymbol{j}\frac{\partial(uv)}{\partial y}+\boldsymbol{k}\frac{\partial(uv)}{\partial z}\end{aligned}$$

$$=\left(u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial x}\right)\boldsymbol{i}+\left(u\frac{\partial v}{\partial y}+v\frac{\partial u}{\partial y}\right)\boldsymbol{j}+\left(u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial x}\right)\boldsymbol{k}$$

$$=u\left(\frac{\partial v}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial v}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial v}{\partial z}\boldsymbol{k}\right)+v\left(\frac{\partial u}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\boldsymbol{k}\right)$$

$$=u\nabla v+v\nabla u.$$

这说明 Hamilton 算子具有微分的性质，当然满足乘积的微分法则，由 Hamilton 算子的这个性质，可证明下面的例题.

例 8 证明：$\nabla\cdot(u\boldsymbol{a})=u\nabla\cdot\boldsymbol{a}+\nabla u\cdot\boldsymbol{a}$.

证明 由算子∇的微分性质并由乘积的微分法则有

$$\nabla\cdot(u\boldsymbol{a})=\nabla\cdot(u_c\boldsymbol{a})+\nabla\cdot(u\boldsymbol{a}_c).$$

加下标 c 表示在微分过程中暂时看成常量，由$\nabla\cdot c\boldsymbol{a}=c\nabla\cdot\boldsymbol{a}$($c$ 为常数)有

$$\nabla\cdot u_c\boldsymbol{a}=u_c\nabla\cdot\boldsymbol{a}=u\nabla\cdot\boldsymbol{a}.$$

再由$\nabla\cdot(u\boldsymbol{c})=\nabla u\cdot\boldsymbol{c}$($\boldsymbol{c}$ 为常矢量)有

$$\nabla\cdot u\boldsymbol{a}_c=\nabla u\cdot\boldsymbol{a}_c=\nabla u\cdot\boldsymbol{a},$$

故$\nabla\cdot(u\boldsymbol{a})=u\nabla\cdot\boldsymbol{a}+\nabla u\cdot\boldsymbol{a}$.

例 9 证明：$\nabla\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=\boldsymbol{b}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{a})-\boldsymbol{a}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{b})$.

证明 由算子∇ 的微分性质，并按乘积的微分法则，有

$$\nabla\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=\nabla\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}_c)+\nabla\cdot(\boldsymbol{a}_c\times\boldsymbol{b}).$$

再由∇的矢量性质，将上式右端两项都看成是三个矢量的混合积，然后由混合积的性质：

$$\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})=\boldsymbol{C}\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})=\boldsymbol{B}\cdot(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{A})$$

将上式右端两项中的常矢量都轮换到∇的前面，同时使得变矢量都留在∇的后面，有

$$\begin{aligned}\nabla\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})&=\nabla\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}_c)+\nabla\cdot(\boldsymbol{a}_c\times\boldsymbol{b})\\&=\nabla\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}_c)-\nabla\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}_c)\\&=\boldsymbol{b}_c\cdot(\nabla\times\boldsymbol{a})-\boldsymbol{a}_c\cdot(\nabla\times\boldsymbol{b})\\&=\boldsymbol{b}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{a})-\boldsymbol{a}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{b}).\end{aligned}$$

例 10 已知 $u=3x\sin yz$，$\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$，求$\nabla\cdot(u\boldsymbol{r})$.

解 因为

$$\nabla\cdot(u\boldsymbol{r})=u\nabla\cdot\boldsymbol{r}+\nabla u\cdot\boldsymbol{r},$$

但

$$\nabla\cdot\boldsymbol{r}=\left(\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x}+\boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y}+\boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot(x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k})=3,$$

$$\begin{aligned}\nabla u&=\left(\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x}+\boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y}+\boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)3x\sin yz\\&=3(\sin yz\boldsymbol{i}+xz\cos yz\boldsymbol{j}+xy\cos yz\boldsymbol{k}),\end{aligned}$$

所以

$$\nabla \cdot (u\boldsymbol{r}) = 9x\sin yz + 3(\sin yz\boldsymbol{i} + xz\cos yz\boldsymbol{j} + xy\cos yz\boldsymbol{k}) \cdot \boldsymbol{r}$$
$$= 12x\sin yz + 6xyz\cos yz.$$

例 11 设点电荷的静电场 $\boldsymbol{E}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}$,证明:$\nabla \cdot \boldsymbol{E}=0$ $(r\neq 0)$.

证明 由定义有

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = \nabla \cdot \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\boldsymbol{r}}{r^3} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\nabla \cdot \boldsymbol{r} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\boldsymbol{r} \cdot \nabla\left(\frac{1}{r^3}\right)$$
$$= \frac{3}{4\pi\varepsilon_0 r^3} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}r \cdot \frac{-3r^2\,\nabla r}{r^6}$$
$$= \frac{3}{4\pi\varepsilon_0 r^3} - \frac{3}{4\pi\varepsilon_0}\boldsymbol{r} \cdot \frac{\frac{\boldsymbol{r}}{r}}{r^4} = 0.$$

但当空间充满电荷时,由 Gauss 电通量定理

$$\oiint_S \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}S = \iiint_\Omega \nabla \cdot \boldsymbol{E}\mathrm{d}V = \frac{1}{\varepsilon_0}\iiint_\Omega \rho\mathrm{d}V,$$

立即可得$\nabla \cdot \boldsymbol{E}=\frac{\rho}{\varepsilon_0}$,其中 ρ 为电荷体密度.

例 12 稳定磁场的安培环路定理的积分形式为

$$\oint_L \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \mu_0\iint_S \boldsymbol{j} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S},$$

试导出其微分形式.

解 将积分式左边应用 Stokes 公式有

$$\iint_S \nabla\times\boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \iint_S \mu_0\boldsymbol{j} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}.$$

由于在 $\boldsymbol{B}$ 的定义区域内,S 是任意的,故

$$\nabla\times\boldsymbol{B} = \mu_0\boldsymbol{j}.$$

例 13 证明函数 $u=\frac{1}{r}=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$满足$\nabla^2 u=0$(即 u 满足 Laplace 方程).

证明

$$\nabla^2\left(\frac{1}{r}\right) = \nabla \cdot \nabla\left(\frac{1}{r}\right) = \nabla \cdot \left(-\frac{\nabla r}{r^2}\right) = -\nabla \cdot \left(\frac{1}{r^3}\boldsymbol{r}\right)$$
$$= -\left[\frac{1}{r^3}\nabla \cdot \boldsymbol{r} + \nabla\left(\frac{1}{r^3}\right)\cdot\boldsymbol{r}\right]$$
$$= -\left(\frac{3}{r^3} - \frac{3}{r^4}\frac{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r}}{r}\right) = 0.$$