初中数学技能训练导引

翟连林　周名存
陈伟候　段云鑫　刘千章

河南教育出版社

初中数学技能训练导引

翟连林　周名存

陈韦侯　段云鑫　刘千章

河南教育出版社

初中数学技能训练导引

翟连林　周名存

陈伟侯　殷云鑫　刘千载

责任编辑　张国旺

河南教育出版社出版
河南第一新华印刷厂印刷
河南省新华书店发行

787×1092毫米　32开本16.875印张　359千字
1988年9月第1版　　1988年9月第1次印刷
印数1—7,200册

ISBN 7-5347-0142-2/G·114

定　价　　3.85元

前　言

在中学阶段，一个学生的数学能力的培养是通过对数学基础知识的理解以至融会贯通；对数学的各种基本技能的掌握以至运用自如，产生飞跃、升华而形成。同时，数学能力主要又通过解数学题而表现出来。因此，数学技能的训练是培养和形成数学能力的关键所在。《初中数学技能训练导引》一书，就是综合初中数学知识，探索在初中范围内能以达到的各种基本数学技能的训练途径的一种新尝试。本书仅以三种基本技能为主线，以贯串全部初中知识内容。

其一是准确迅速的运算技能。运算能力是学好数学的基本素养。初中代数是在小学算术的整数、小数、分数的四则运算的基础上，通过将数的概念扩充到实数，而形成三级六种代数运算。有理数的运算是各种数集的运算的基础。代数式的运算是有理数运算的一种扩充。

指数和对数的运算是运算的一个转折点。由代数运算而进入超越运算。在中学，通过指数运算的桥梁引进对数运算。可以简化运算过程，又使运算的概念得到扩展。对于高等数学，它们又是一种运用很广的基础运算。因此，指数和对数的运算在高等与初等数学运算中，起着承上启下的作用。

其二是求未知量的思维方法。求解题是中学数学的主要题型之一。也就是从已知数据和条件求得未知量的问题。

它遍布初中数学的各个方面，其主要侧重于解方程、解不等式、讨论函数以及统计计算和解三角形。这些内容提供了丰富的思维方法与技巧。

其三是严密的逻辑推理技能。数学的主要特征之一是它的严谨性。培养严密的逻辑推理技能也是最为基本的。它在运算和求解的过程中虽有体现，但更突出地是表现于几何证明之中。从讨论线的位置关系、三角形、四边形、相似形，直到圆都以培养此技能为主线，以奠定牢固的基础。

当然，技能训练的成效要有"量"的保证才能得以实现。对于每一种技能并不是说学生听明白了就算掌握了。而必须通过足够量的解题实践，多次反馈，才能达到熟而生巧的地步。为此，本书分为三个步骤加以引导。首先进一步明确知识结构和理解概念、熟悉方法，然后，将通过精选的题目，分作两部分。一部分作为例题以表示范；一部分作为习题，让学生亲手实践。题型全、运用面广。既有优秀的传统题目，又有新颖的创造题型。笔者认为量比较适度，即使中等偏下的学生，只要认真对待，也可以使之达到掌握的程度。书后的提示和答案并非多余，它仍是技能训练的一个组成部分。使读者能在困惑之时，得到启发与引导，有助于训练的顺利进行。

本书仅是一种探索，是否行之有效，还望广大初中师生，在采用中提出宝贵修改意见，以备充实完善。不胜感谢。

作　者

1988.8.15.

目　　录

第一篇　准确迅速的运算技能

第二篇　求未知量的思维方法

第三篇　严密的逻辑推理技能

第一篇　准确迅速的运算技能

按照国家教育委员会颁布的教学大纲的内容要求，初中阶段运算技能的训练，主要通过实数的运算、代数式的恒等变形以及指数和对数的计算来实施的.

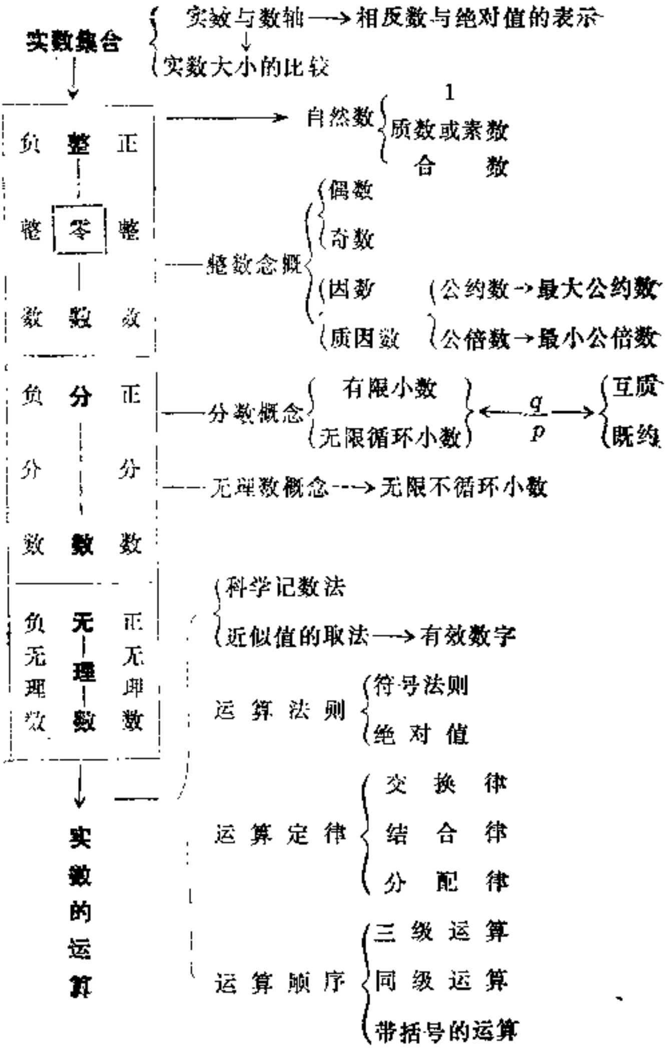
第一章　实数的运算

实数包括有理数和无理数. 有理数是在小学算术数（零和正有理数）的基础上，扩充负有理数而形成. 因此，有理数的运算比算术数的运算增加了一种符号运算的法则. 而无理数的运算是近似的，它是通过近似值的选取，仍然作有理数的运算获得近似的结果. 所以，有理数的运算是所有运算的基础.

当然，无理数也有要求精确计算的，那就要有一些特殊的方法和技巧. 在初中也会遇到这方面的例子.

第一节　实数的知识结构

实数的知识结构如下表所示：


实数集合
实数与数轴
相反数与绝对值的表示
实数大小的比较
负整数
整数
零
正整数
自然数
1
质数或素数
合数
整数念概
偶数
奇数
因数
质因数
公约数→最大公约数
公倍数→最小公倍数
负分数
分数
正分数
分数概念
有限小数
无限循环小数
q/p
互质
既约
无理数概念
无限不循环小数
负无理数
无理数
正无理数
科学记数法
近似值的取法
有效数字
运算法则
符号法则
绝对值
运算定律
交换律
结合律
分配律
运算顺序
三级运算
同级运算
带括号的运算
实数的运算

第二节　有关实数概念的理解

一、自然数

1.自然数

表示物体个数或事物次序的数叫做自然数。例如，1，2，3，4，5，…。

2.偶数与奇数

一切能被2整除的自然数叫做偶数（一般用$2n$表示，n为自然数）；不能被2整除的自然数叫做奇数（一般用$2n-1$表示，n为自然数）。在整数集中，n可取整数。

3.质数与合数

在大于1的自然数中，只能被1和它本身整除的自然数，叫做质数（或素数）.例如，2，3，5，7，…；不仅能被1和它本身整除，而且还能被其它自然数整除的自然数，叫做合数。例如，4，6，8，9，…。

注意：1不是质数，也不是合数。

4.分解质因数

自然数的某个因数是质数时，这个因数就叫做该自然数的质因数。任何大于1的自然数，总可以表示成为一个质数的幂或几个质数幂的连乘积。例如，

$$24=2^3\times3,\ 840=2^3\times3\times5\times7.$$

注意：如果不考虑质因数连乘积中因数的排列顺序，那么它的分解方式是唯一的。

5.公约数

一个自然数同时是几个自然数的因数时，这个自然数叫

做这几个自然数的公约数。例如，48和60的公约数是1，2，4，6，12。对于给定的几个自然数来说，它们的公约数总是有限个，其中最大的一个叫做这几个自然数的最大公约数。例如，48和60的最大公约数是12。

6.公倍数

一个自然数同时是几个自然数的倍数时，这个自然数就叫做这几个自然数的公倍数。例如，48和60的公倍数是240，480，960，…。对于给定的几个自然数来说，它们的公倍数总是无限多的，其中最小的一个叫做这几个自然数的最小公倍数。例如，48和60的最小公倍数是240。

7.互质数

如果两个自然数的最大公约数是1，这两个自然数就叫做互质数（或互素数）。例如，3与5是互质数，4与9是互质数等。

二、有理数

p、q 是整数，且 $q\neq0$，形如$\frac{p}{q}$的数叫做有理数。

有理数包括正整数、正分数、零、负整数、负分数。

三、实数

1.无理数

无限不循环小数叫做无理数。

2.实数

有理数和无理数统称实数。

3.数轴

规定了正方向、原点和长度单位的直线叫做数轴。

数轴上的点与实数之间是一一对应的。

4.相反数

如果实数$a\neq 0$，则$-a$称为a的相反数。

在数轴上，a和$-a$所对应的点分别位于原点的两侧，并且到原点的距离相等。

如果$a=0$，则零的相反数仍然是零。

5.倒数

如果实数$a\neq 0$，则$1\div a=\frac{1}{a}$称为a的倒数。

注意：零没有倒数。

6.绝对数

一个正实数的绝对值是它本身；一个负实数的绝对值是它的相反数；零的绝对值是零。即

$$|a|=\begin{cases} a & (a>0); \\ 0 & (a=0); \\ -a & (a<0). \end{cases}$$

绝对值的几何意义是数a在数轴上的对应点到原点的距离。

7.大小比较

用数轴上的点来表示两个实数，右边的点所对应的实数总比左边的点所对应的实数大.因此,正数都大于零,负数都小于零,正数大于每一个负数;两个负数中,绝对值大的反而小.

对于给定的两个实数a和b，下列三种情况有一种并且只有一种成立。

$$a>b \Longleftrightarrow a-b>0,$$

$$a=b \Longleftrightarrow a-b=0,$$

$$a<b \Longleftrightarrow a-b<0.$$

8.实数的四则运算

(1) 运算法则

如下表

<table>
<tr><td rowspan="2">原数
运算法则</td><td colspan="2">同号</td><td colspan="2">异号</td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td>符号</td><td>绝对值</td><td>符号</td><td>绝对值</td></tr>
<tr><td>加法</td><td>保持原号</td><td>相加</td><td>同绝对值较大者</td><td>相减</td><td rowspan="2">加、减可统一成加法</td></tr>
<tr><td>减法</td><td colspan="4">减去一个数等于加上其相反数</td></tr>
<tr><td>乘法</td><td>正</td><td>相乘</td><td>负</td><td>相乘</td><td rowspan="2">乘、除可统一成乘法</td></tr>
<tr><td>除法</td><td>正</td><td>相除</td><td>负</td><td>相除</td></tr>
</table>

(2) 运算律

交换律 $a+b=b+a$,

$ab=ba$;

结合律 $(a+b)+c=a+(b+c)$,

$(ab)c=a(bc)$;

分配律 $a(b+c)=ab+ac$.

9.实数的乘方与开方

(1) n 次乘方

求 n 个相同因数 a 的乘积的运算叫做 a 的 n 次乘方，乘方的结果叫做 a 的 n 次幂，即

$$\underbrace{a\cdot a\cdot\cdots\cdot a}_{n\text{个}}=a^n.$$

在a^n中，a叫做底数，n叫做指数，a^n叫做幂。

(2) 开n次方

如果$x^n=a$（n是大于1的正整数），那么，x叫做a的n次方根。求a的n次方根的运算，叫做把a开n次方。a叫做被开方数，n叫做根指数。

当n是偶数时，正数a的n次方根有两个，它们互为相反数。其中，正的n次方根用"$\sqrt[n]{a}$"表示，负的n次方根用"$-\sqrt[n]{a}$"表示。

因为任何实数的偶次乘方不是负数，所以当n是偶数时，负数a的n次方根不存在。

当n是奇数时，实数a的n次方根只有一个，正数的奇次方根是一个正数，负数的奇次方根是一个负数，它们都用"$\sqrt[n]{a}$"表示。

特别地，零的任何次方根仍旧是零，即$\sqrt[n]{0}=0$。

正数a的正的n次方根，叫做a的n次算术根。特别地，零的n次算术根仍旧是零。

为了简明，将符号$\sqrt[n]{a}$的意义列举如下：

n为偶数	$a>0$	$\sqrt[n]{a}>0$
	$a=0$	$\sqrt[n]{a}=0$
	$a<0$	$\sqrt[n]{a}$不是实数
n为奇数	$a>0$	$\sqrt[n]{a}>0$
	$a=0$	$\sqrt[n]{a}=0$
	$a<0$	$\sqrt[n]{a}<0$

10．运算顺序

加、减、乘、除、乘方、开方这六种运算，总称为**代数运算**。其中，加、减运算统称为一级运算；乘、除运算统称为二级运算；乘方、开方运算统称为三级运算。

在一个含有这三级运算的式子中，如果没有括号，先进行第三级运算，再进行第二级运算，最后进行第一级运算；如果有括号，先从括号里面算起；如果只含有同级运算，则从左到右依次运算。

第三节　实数运算的技能训练

例1 已知$a<0$，那么$\frac{|a-(-a)|}{a}$的值等于

(A)　-2，　(B)　2，　(C)　± 2，　(D)　0．

试判断哪一个结论是正确的．

解：$\because a<0$时，$|a-(-a)|=|2a|=-2a$，

则　$\frac{|a-(-a)|}{a}=\frac{-2a}{a}=-2$．

$\therefore$应选择(A)．

例2 若$\sqrt{4320a}$是整数，求最小的正整数a．

解：先把4320分解质因数：

$4320=2^5\times 3^3\times 5$．

要使$\sqrt{2^5\times 3^3\times 5\times a}$为整数，必须使根号内2、3、5的指数为偶数．

取$a=2\times 3\times 5=30$，这是满足要求的最小正整数a．

例3 证明：