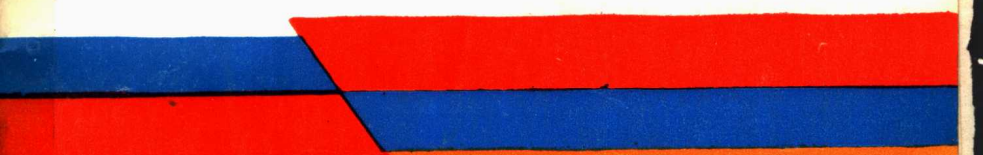




高中数学 综合能力培养

(下册)



北京市第八中学

张环 胡剑涛 杨玉蓉 主编



高中数学综合能力培养

(下 册)

北京市第八中学

张 环 胡剑涛 杨玉蓉 主编

科学技术文献出版社

1989

内 容 简 介

为了帮助高中学生进一步理解数学概念,提高分析问题、解决问题的能力,根据国家教委颁发的全日制中学《数学教学大纲》编写此书。

本书分为上、下两册。上册内容为代数、三角,下册内容为立体几何、解析几何。本书对各章的概念作了详细的分析,对易错、易混的问题作了针对性的解释,对每章应该掌握的习题类型进行了分类举例,并配有一定量的练习题,附有答案或提示。

本书涉及的知识面广,对一些基础知识和基本概念进行了必要的归纳和总结,注意了面对学生实际和教材实际。可供高中各年级学生、自学青年使用,也可供中学数学教师教学参考。

高中数学综合能力培养

(下 册)

北京市第八中学

张 环 胡剑涛 杨玉尊、主编

科学技术文献出版社出版

中国科学技术情报研究所印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

787×1092毫米 32开本 17.375印张 389千字

1989年5月北京第一版第一次印刷

印数: 1—10000册

社科新书目: 221—169

ISBN 7-5023-0787-7/G·282

定价: 4.45元

编 者 的 话

为了满足高中在校生复习功课和青年自学者学习高中课程的需要，北京市第八中学多年担任高中三年级教学工作的部分高级教师主编了这套辅导读物。本辅导读物包括语文、数学（上、下册）、英语、物理、化学、历史、地理七个分册。

本辅导读物以国家教委颁布的全日制中学教学大纲为依据，以“巩固知识、培养能力、开发智力”为编写宗旨，对中学新教材所涉及的基础知识、基本概念进行了系统的归纳和阐释，把纷繁丰富的知识梳理成线条清晰的“系统”，同时注意揭示教材各部分内容的内在联系，以便读者在复习和自学高中课程时“有章可循”。

本辅导读物各分册均附有知识覆盖率较高、题型灵活多样的练习题及参考答案。本辅导读物主编教师根据自己多年的教学经验及青年学生解题时易出现的问题，从思考的角度、思考的“路数”等方面，有重点地给予“点拨”。我们相信对读者是会有裨益的。

由于我们的水平有限，加之时间仓促，错误与不当之处在所难免，欢迎批评指正。

1988年10月

目 录

立体几何部分	1
第一章 直线与平面	1
一、概念要点分析	1
(一) 平面	1
(二) 空间两条直线	2
(三) 空间直线和平面	5
(四) 空间两个平面	10
二、习题分类举例	15
(一) 证明共面、共线、共点	15
(二) 空间两个基本图形	19
(三) 反证法	25
(四) 角	29
(五) 距离	38
(六) 综合题	51
三、练习	61
第二章 多面体和旋转体	72
一、概念要点分析	72
(一) 多面体	72
(二) 旋转体	82
二、习题分类举例	89
(一) 基本知识的应用	89
(二) 组合体	97

(三) 截面	106
(四) 平面图形的折叠	112
(五) 侧面展开问题	118
(六) 球的问题	121
三、练习	126
解析几何部分	136
第一章 直角坐标系	136
一、概念要点分析	136
(一) 直角坐标系内特殊点的坐标	136
(二) 两点间距离公式	137
(三) 定比分点坐标	139
(四) 对称问题	140
二、习题分类举例	143
(一) 定比分点公式的运用	143
(二) 对称问题	146
三、练习	150
第二章 直线	153
一、概念要点分析	153
(一) 直线的斜率	153
(二) 直线的截距	154
(三) 直线方程的各种表达形式及关系	155
(四) 两个基本公式	156
(五) 两条直线的位置关系	157
(六) 过两条直线交点的直线系	158
二、习题分类举例	159
(一) 求直线方程	159
(二) 直线位置关系的判定	170

(三) 最大值或最小值问题	172
(四) 有关证明问题	174
三、练习	179
第三章 圆	185
一、概念要点分析	185
(一) 圆的定义及圆的方程	185
(二) 点与圆的位置关系	186
(三) 直线与圆的位置关系	187
(四) 圆与圆的位置关系	188
(五) 圆系方程	188
二、习题分类举例	189
(一) 求圆的方程	189
(二) 圆的割线与弦长	197
(三) 圆的切线	201
(四) 直线与圆的位置关系	210
(五) 圆的对称变换和平移	216
(六) 与圆有关的最大值、最小值问题	217
(七) 圆系	219
(八) 其它	223
三、练习	226
第四章 圆锥曲线	231
一、概念要点分析	231
(一) 椭圆	231
(二) 双曲线	236
(三) 抛物线	242
(四) 圆锥曲线	243
(五) 直线与二次曲线的位置关系	245

(六) 坐标轴的平移	249
(七) 二元二次方程的讨论	251
二、习题分类举例	253
(一) 求圆锥曲线的方程	253
(二) 直线与圆锥曲线的相交弦长问题	264
(三) 圆锥曲线中点弦问题	267
(四) 圆锥曲线焦点弦问题	271
(五) 圆锥曲线切点弦的问题	278
(六) 圆锥曲线的切线	279
(七) 最大值、最小值问题	285
(八) 二次曲线系	293
(九) 圆锥曲线的证明题	296
(十) 求某些参数的值或取值范围	304
三、练习	307
第五章 参数方程	316
一、概念要点分析	316
(一) 参数方程	316
(二) 直线的参数方程	316
(三) 圆锥曲线的参数方程	318
(四) 参数方程与普通方程的互化	322
二、习题分类举例	325
(一) 化参数方程为普通方程	325
(二) 直线参数方程的应用	327
(三) 二次曲线参数方程的应用	336
三、练习	344
第六章 极坐标	354
一、概念要点分析	354

(一) 极坐标系与直角坐标系	354
(二) 极坐标与直角坐标的互化	355
(三) 解决极坐标问题的基本思想是直角坐标化	355
(四) 极坐标系中的一些关系式	361
(五) 常见的极坐标方程	363
(六) 圆锥曲线统一的极坐标方程:	

$$\rho = \frac{ep}{1 - e\cos\theta} \dots\dots\dots 366$$

二、习题分类举例 370

(一) 圆锥曲线统一的极坐标方程:

$$\rho = \frac{ep}{1 - e\cos\theta} \text{ 的应用 } \dots\dots\dots 370$$

(二) 在极坐标系中求轨迹方程 383

三、练习 386

第七章 轨迹方程 393

一、概念要点分析 393

(一) 求轨迹方程的一般步骤 393

(二) 轨迹和轨迹方程的概念 394

(三) 求动点轨迹方程的几种方法 395

二、习题分类举例 396

(一) 利用直译法或定义法建立动点的轨迹方程 396

(二) 利用相关点法建立动点的轨迹方程 401

(三) 利用参数法建立动点的轨迹方程 405

三、练习 422

答案与提示 426

立体几何部分	426
一、直线和平面	426
二、多面体与旋转体	446
解析几何部分	472
一、直角坐标系	472
二、直线	474
三、圆	480
四、圆锥曲线	489
五、参数方程	506
六、极坐标	523
七、轨迹方程	532

立体几何部分

不在同一平面内的点、线、面构成的图形,叫空间图形。立体几何就是研究空间图形的科学,它与平面几何的最大区别就是点、线、面不在同一平面内。因此在学习立体几何时,必须牢固树立“不在同一平面”的思想。

在立体几何中,空间图形的点、线、面之间的关系在图中不一定能真正体现出来,这就需要加强空间想象能力,借助所学的定义、定理去分析研究图形,从而找出它们之间的联系。

将空间图形转化为平面图形,这是立体几何中常用的方法。

第一章 直线与平面

一、概念要点分析

(一) 平面

1. 判定线在面内。根据公理一:一条直线若有两点在一个平面内,则直线在平面内。

2. 判定两个平面相交。根据公理二:如果两个平面有一个公共点,则两个平面相交于过这点的一条直线。

公理二说明了,若两个平面相交,则交线是一条直线,如果一个点是两个平面的公共点,则这个点一定在两个面的交线上。

3. 确定平面的条件。根据公理三及其推论，对于“确定”应理解为“存在且唯一”与“有且只有一个”是等价的。以推论3的证明为例。

推论3：经过两条平行直线，有且只有一个平面。

证：

如图1-1， $a \parallel b$ ，根据平面几何知识， a 、 b 可在同一平面内，定平面为 α 。

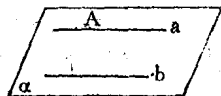


图1-1

若过 a 、 b 还有一个平面 β ，设 $A \in a$ ，则 $A \in \beta$ ， $b \subset \beta$ ，且 A 在 b 外，这样过 b 及 A 有两个平面 α 、 β ，与推论1矛盾。

$\therefore$ 经过两条平行直线，有且只有一个平面。

(二) 空间两条直线

1. 空间两条直线的位置关系。若两条直线共面则平行或相交，若两条直线不共面则为异面直线。

2. 异面直线必须理解为“不同在任何一个平面内的两条直线”，即不可能找到一个平面包含这两条直线。

例：(1)若直线 a 、 b 无公共点，则 $a \parallel b$ 或 a 、 b 异面。

$\therefore$ 两直线无公共点是两条直线异面的必要不充分条件。

(2)若直线 a 、 b 在两个平面内，则 $a \parallel b$ ，或 a 与 b 相交或 a 与 b 异面。

当两个平面相交时，作出图形。

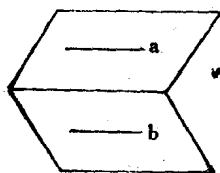


图 1-2

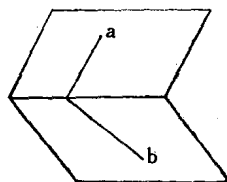


图 1-3

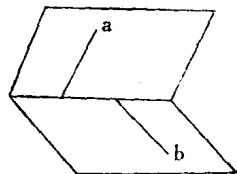


图 1-4

因此“不同在任何一个平面内的两条直线”与“在两个平面内的两条直线”是完全不同的，不能混为一谈。

为了体现异面直线是不同在任何一个平面内的两条直线，画图时要衬托平面，通常的画法是：

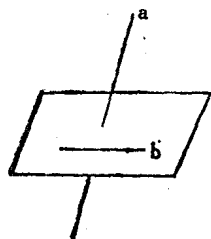


图 1-5

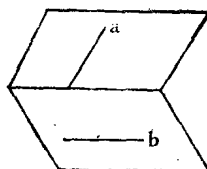


图 1-6

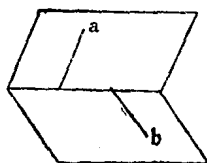


图 1-7

3. 两条异面直线所成的角。设 a 、 b 为异面直线，在空间任取一点 O ，过 O 引 $a' \parallel a$ ， $b' \parallel b$ ，则直线 a' 、 b' 所成的锐角（或直角）叫做异面直线 a 、 b 所成的角。当两条异面直线所成的角是直角时，则说这两条异面直线互相垂直。

（1）两条异面直线所成的角仅与两条异面直线的位置有关，而与 O 点的位置无关。因此 O 点经常选在一条异面直线上。

（2）两条异面直线所成的角的定义把空间问题转化为平面问题，因此成角的两条直线的位置关系可以相交，也可以不相交。

例：① 和一条直线都垂直的两条直线的位置关系怎样？

② 和一条直线都成相等角的两条直线的位置关系怎样？

解：① 平行或相交或异面。

如图，若直线 $a \perp c$, $b \perp c$ 。

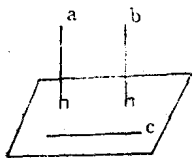


图 1-8

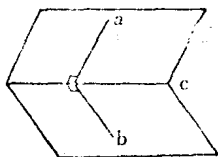


图 1-9

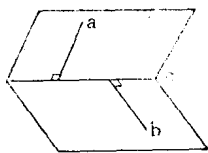


图 1-10

② 平行或相交或异面。

如下图，直线 c 与直线 a ，直线 c 与直线 b 所成的角相等。

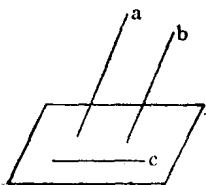


图 1-11

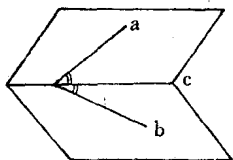


图 1-12

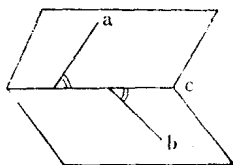


图 1-13

显然①是②的特例。

4. 两条异面直线间的距离。

求两条异面直线间的距离：

(1) 根据定义，找出与两条异面直线都垂直且相交的线段，这条线段的长即为两条异面直线间的距离。

(2) 把两条异面直线间的距离转化为点到线的距离或线到面的距离。

异面直线间的距离作图如下：

a 、 b 为异面直线， $a' \parallel a$ 且 a' 过 a' 、 b 。 $AB \perp a$ 于 B ， $CD \perp AB$ ，则 CD 为异面直线 a 、 b 间的距离。在实际做题中，经常用 AB 来代替 a 、 b 间的距离。

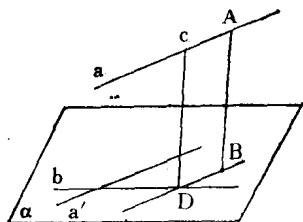


图 1-14

(三) 空间直线和平面

1. 直线和平面的位置关系。由直线和平面公共点的个数来定。当直线和平面有两个或两个以上公共点时，直线在平面内；当直线和平面仅有一个公共点时，直线和平面相交；当直线和平面无公共点时，直线和平面平行。

(1) 直线在平面内与直线和平面平行是两种位置关系，不能混为一谈。当直线和平面平行时，直线一定在平面外。

(2) 直线和平面平行的判定定理。如果平面外的一条直线和这个平面内的一条直线平行，那么这条直线和这个平面平行。

对于这个定理，应注意两点：一是要强调“平面外”的一条直线；二是能找到“平面内的一条直线”与平面外的这条直线平行。这样把线面平行的判定转化到线线平行的判定。

例 1. 判断下列命题是否正确。

① 两条平行线中，有一条与平面平行，则另一条也与平面平行。

② 过空间任意一点，一定唯一存在一个平面与两条异面直线平行。

解：① 错误。

如果两条平行线中有一条在平面内，则命题不成立。

② 错误。

当点在其中一条异面直线上时，或点不在异面直线上，但点和其中的一条异面直线确定的平面与另一条异面直线平行时，命题不成立。

例 2. 与一个平面平行的两条直线的位置关系怎样？

解：是平行直线或相交直线或异面直线。

(3) 对“直线和平面平行”这一概念，通常的使用方法是：过直线作一平面与已知平面相交。则直线与交线平行。

如果直线 $a \parallel$ 平面 α ，要在 α 内找一条直线与 a 平行，其方法是：过 a 作一平面与 α 相交，交线即为所求。显然平面内存在无数条直线与直线 a 平行。

例 1. ① 已知直线 $l \parallel$ 平面 α ， $A \in \alpha$ ，过 A 在平面 α 内作直线 $l' \parallel l$ 。

② 设平面 $\alpha \cap$ 平面 β 于直线 l ，在平面 α 内作一直线 $l' \parallel \beta$ 。

解：①

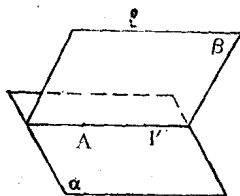


图 1-15

过直线 l 与 A 作平面 β ， $\beta \cap \alpha$ 于过 A 的直线 l' ，则 l' 为所求。

②

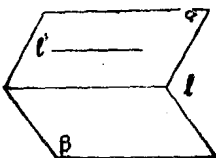


图 1-16

在平面 α 内, 作直线 l' 平行于交线 l , 则 l' 为所求。

例 2. 四面体 $V-ABC$, E 在 AC 上, 过 BE 作四面体的一个截面, 使之与 VA 平行。

解:

在平面 VAC 内, 作 $EF \parallel VA$ 交 VC 于 F , 连 BF , 则平面 BEF 为所求。

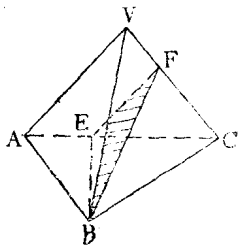


图 1-17

2. 直线和平面垂直

(1) 对直线和平面垂直定义

中的“一条直线和平面内的任何一

条直线都垂直”这句话的含义要明确。“任何一条”即所有的, 它与无数条不同, 无数条不一定是所有的, 如平面内某一方向的平行线就有无数条。因此说“一条直线和平面内的无数条直线都垂直, 则这条直线和平面垂直”是错误的。实际上, 这时直线可以在平面内, 也可以和平面平行, 也可以和平面斜交。

由于定义都是充要条件, 所以, 如果一条直线和一个平面垂直, 则这条直线和平面内任何一条直线垂直。

(2) 判定一条直线和一个平面垂直, 通常用判定定理, 即在平面内找两条相交直线与已知直线垂直即可。

所以, 如果一条直线和平面内的一条直线或两条直线或无数条直线垂直, 都不能判定直线和平面垂直。

(3) 斜线、射影

点在平面内的射影是点; 直线在平面内的射影可以是点, 也可以是直线; 平面在平面内的射影可以是直线, 也可以是平面。

(4) 三垂线定理及逆定理