初中数学竞赛专题选讲

《中等数学》杂志编辑部编

天 津 教 育 出 版 社

前　言

最近几年，数学竞赛活动越来越广泛、深入地开展起来，它在发现和选拔人才、培养科学后备军方面的作用，越来越受到人们的关注．随之而来的，是围绕数学竞赛的课外活动、培训活动正在蓬勃兴起，一批数学奥林匹克学校相继建立．编辑本书的目的，就是想为这些活动提供一份比较实用的参考资料．

本书的作者，都是数学竞赛活动的热心人和有心人．他们在长期从事竞赛工作的实践中积累了丰富的经验，熟悉情况，对国内外已往的竞赛试题作过深入的分析和研究，相信他们的文章会对广大热心于数学竞赛的读者有所助益．

收入本书的15讲，我们认为都是比较重要的专题，当然不是全部，因此叫“选讲”．每一讲在材料的安排上、在写法上，都力求顾及到知识的横、纵两个方向上的联系，并尽可能便于学生读者自学．

到目前为止，我们还没有见到一本适用于数学竞赛培训工作的系统的教材式的书．编这样一本书，无疑是有一定难度的．但我们相信，经过努力，终有一天这样的书会问世的．

《中等数学》杂志编辑部

1987年9月于天津

目　录

第一讲　从奇数和偶数谈起

王　连　笑

美国数学家U·杜德利曾经说过："用以发现数学天才，在初等数学中再也没有比数论更好的课程了，任何学生，如能把当今一本数论教材中的练习做出，就应受到鼓励，劝他将来去从事数学方面的工作。"对中学生讲授整数知识和利用整数基本知识解题是提高他们数学水平的一个重要途经。而把整数分为奇数和偶数两大类是一种最简单最常用的分类方法，奇偶数的性质简单直观，变化较多，数学竞赛中多有涉及。本讲主要介绍奇数和偶数的性质以及应用奇偶数性质解题的方法。

一个整数如果能被2整除就叫做偶数；如果不能被2整除（即被2除余1）就叫做奇数。偶数可以记作$2n$（n是整数），奇数可以记作$2n-1$或$2n+1$（n是整数）。这样，偶数类就包括

$$\cdots,\ -8,\ -6,\ -4,\ -2,\ 0,\ 2,\ 4,\ 6,\ 8,\ \cdots$$

特别要注意0是偶数；而奇数类就包括$\cdots,\ -9,\ -7,\ -5,\ -3,\ -1,\ 1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9,\ \cdots$

因为一个整数被2除所得的余数只有0和1这两个数，因此把所有整数分为奇数和偶数两大类，既不会有一个整数

同时出现在奇数类和偶数类，也不会有一个整数既不在奇数类又不在偶数类。这种分类方法使我们可以把对整数问题的研究转化为对奇数和偶数问题的研究。

下面我们先介绍奇数和偶数的性质，然后通过若干例题介绍奇数和偶数性质的应用。这些例题有一部分是国内外初高中数学竞赛的试题。最后我们还将介绍一个整数不是被 2 除，而是被某一正整数 m 除，根据余数进行分类的方法。

一、关于奇数和偶数的性质

奇数和偶数有许多简单而又明显的性质，下面介绍其中的几个。

（1）奇数不等于偶数；

（2）奇数 ± 奇数 = 偶数，

偶数 ± 偶数 = 偶数，

奇数 ± 偶数 = 奇数；

（3）奇数个奇数的和是奇数，偶数个奇数的和是偶数，任意多个偶数的和是偶数；

（4）奇数 × 奇数 = 奇数，

$(奇数)^n$ = 奇数（n 为非负整数）；

偶数 × 整数 = 偶数，

偶数 × 偶数 = 4 的倍数；

（5）两个整数的和与这两个整数的差具有相同的奇偶性。

以上几个性质都很简单，这里就不证明了。为了叙述方便，我们把被 b 除余 r（其中 b 是不等于 0 的整数，r 是适合 $0 \leqslant r < |b|$ 的整数）的整数写作 $bq + r$（其中 q 是整

数），例如$4q+1$或$4k+1$就表示被4除余1的整数。

（6）奇数的平方为$4k+1$型的数，偶数的平方为$4k$型的数。

这是因为

$$(2n+1)^2=4n^2+4n+1=4(n^2+n)+1,$$

$$(2n)^2=4n^2.$$

（7）所有形如$4k+3$的数不能表示为两个整数的平方和。

这个性质的意思是说，任意两个整数的平方和被4除一定不余3，而只能余1，2，0。

这是因为

$$\begin{aligned}奇数^2+奇数^2&=(2n+1)^2+(2t+1)^2\\&=4(n^2+n+t^2+t)+2;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}偶数^2+偶数^2&=(2n)^2+(2t)^2\\&=4(n^2+t^2);\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}奇数^2+偶数^2&=(2n+1)^2+(2t)^2\\&=4(n^2+n+t^2)+1.\end{aligned}$$

即两个奇数的平方和为$4k+2$型，两个偶数的平方和为$4k$型，一个奇数和一个偶数的平方和为$4k+1$型，因此没有两个整数的平方和为$4k+3$型。

例如，由此性质可以得到方程：

$$x^2+y^2=1987$$

没有整数解。

（8）所有形如$4k+2$型的数不能表示为两个整数的平方差。

这个性质的意思是说，任意两个整数的平方差被4除一

定不余2，而只能余1，3，0。

这是因为

$$x^2-y^2=(x+y)(x-y).$$

由性质（5），$x+y$与$x-y$具有相同的奇偶性。

若$x+y$和$x-y$都是奇数，则$(x+y)\cdot(x-y)=x^2-y^2$也为奇数，即为$4k+1$或$4k+3$型；

若$x+y$和$x-y$都是偶数，则$(x+y)\cdot(x-y)=x^2-y^2$为4的倍数，即为$4k$型。

因此，没有两个整数的平方差为$4k+2$型。

例如，由此性质可以得到：

方程

$$x^2-y^2=1986$$

没有整数解。

二、关于奇偶数的例题

“学数学的最好办法是‘做数学’”。这是美国新数学丛书“致读者”中的一句话。透彻地理解和灵活地运用奇偶数性质的最好方法是做题，下面看一些例题。

例1 把1，2，3，4，……，1985，1986这一千九百八十六个数，每个数的前面任意添上正负号，问所得到的和是奇数还是偶数？

由于加正负号的方法不同，这一千九百八十六个数添上正负号之后的和就不相同，但是我们关心的不是和的准确值，而是它的奇偶性。为此，我们得到下面的解法：

解 由于两个整数的和与它们的差具有相同的奇偶性，所以我们只要研究和式

$1+2+3+4+\cdots+1985+1986$的奇偶性就可以了．由于这个和式中有993个加数是偶数，993个加数是奇数，而奇数个奇数的和是奇数，所以题目中的1986个数的和是奇数．

例 2　设凸一千边形的顶点为A_1，A_2，…，A_{1000}，它的内部有一点O．我们把凸一千边形的边A_1A_2，A_2A_3，A_3A_4，…，$A_{1000}A_1$按任意方式编上号，编号数为1，2，…，1000．把OA_1，OA_2，…，OA_{1000}也按任意方式编上号码1，2，…，1000，它们的编号与边的编号无关．

试问：能否找到一种编号方法，使得$\triangle A_1OA_2$，$\triangle A_2OA_3$，$\triangle A_3OA_4$，…，$\triangle A_{1000}OA_1$

这一千个三角形中的每个三角形三边编号数之和都相等？

解　我们设这一千个三角形的三边编号之和依次为S_1，S_2，…，S_{1000}．

若它们的编号之和都相等，设等于同一个整数S，即

$$S_1=S_2=\cdots=S_{1000}=S.$$

我们注意到，在计算所有这一千个三角形的编号之和$S_1+S_2+\cdots+S_{1000}$时，边OA_1，OA_2，…，OA_{1000}的编号各被用了两次，而边A_1A_2，A_2A_3，…，$A_{1000}A_1$的编号各被用了一次，于是有

$$1000S=3(1+2+\cdots+1000),$$

$$1000S=\frac{3}{2}\times1000\times1001,$$

$$S=\frac{3}{2}\times1001.$$

由于3×1001是奇数，从而$\frac{3}{2}\times1001$不是整数，然而S

是整数，这就出现了矛盾.因此，$\triangle A_1OA_2$，…，$\triangle A_{1000}O$-A_1的三边编号之和不可能都相等.

例3 设方程$x^2+px+q=0$的系数p，q为奇数，求证：

（1）此方程无相等的根；

（2）此方程无整数根.

证：（1）考虑判别式

$$\Delta=p^2-4q.$$

由p是奇数，$4q$为偶数，所以

$$p^2-4q=\text{奇数}\neq 0.$$

于是方程无等根；

（2）设方程之二根为x_1和x_2.若方程有整根，则x_1和x_2是整数，由韦达定理得

$$\begin{cases} x_1+x_2=-p, & ① \\ x_1x_2=q & ② \end{cases}$$

由于q为奇数，则由②知x_1和x_2都为奇数，x_1+x_2为偶数，而p为奇数，则①式不可能成立，于是方程无整数根.

例4 设a，b，c都是奇数，证明方程

$$ax^2+bx+c=0$$

没有有理数根.

证 假设方程有有理数根，设此根为$\frac{p}{q}$，其中p和q为整数，$q\neq0$，p和q的最大公约数是1.（否则可以通过约分化为最简分数）

于是p和q或者为一奇一偶，或者都是奇数.

由于$x=\frac{p}{q}$是方程的根，则有

$$a\left(\frac{p}{q}\right)^2+b\cdot\frac{p}{q}+c=0,$$

即 $$ap^2+bpq+cq^2=0. \qquad ①$$

（i）若 p 和 q 都是奇数，则由①式有

奇数＋奇数＋奇数＝0．

然而此式左边为奇数，右边为偶数，这是不可能的；

（ii）设 p 是偶数，q 是奇数，则由①式有

偶数＋偶数＋奇数＝0，

这也不可能；

（iii）设 p 是奇数，q 是偶数，则由①式有

奇数＋偶数＋偶数＝0，

这也不可能．

因此方程没有有理数根．

例 5 给定整数 a 和 b．

（1）如果 ab 是偶数，那么可能找到两个自然数 c 和 d，使得

$$a^2+b^2+c^2=d^2;$$

（2）如果 ab 是奇数，那么满足 $a^2+b^2+c^2=d^2$ 的自然数 c 和 d 一定不存在．

证 （1）若 ab 是偶数，则 a 和 b 至少有一个是偶数，

(i)若 a 和 b 一为奇数，一为偶数，则 a^2+b^2 必为奇数，设

$$a^2+b^2=2k+1,$$

则设 $c=k$，$d=k+1$，就可得到

$$a^2+b^2+c^2=2k+1+k^2=(k+1)^2=d^2.$$

(ii)若 a 和 b 都是偶数，则 a^2+b^2 是 4 的倍数．设

$$a^2+b^2=4k+4,$$

则设$c=k$，$d=k+2$，就可得到

$$a^2+b^2+c^2=4k+4+k^2=(k+2)^2=d^2.$$

（2）若ab是奇数，则a和b都是奇数，于是a^2+b^2是$4k+2$型的数．若存在自然数c和d，则

$$d^2-c^2=a^2+b^2.$$

然而d^2-c^2不可能是$4k+2$型的数．因此，满足等式$a^2+b^2+c^2=d^2$的自然数c和d一定不存在．

例6 设n是整数．证明：如果

$$2+2\sqrt{28n^2+1}$$

也是整数，那么它一定是一个整数的完全平方．

证 设 $2+2\sqrt{28n^2+1}=m$,

（m为整数）

则 $$(m-2)^2=4(28n^2+1),$$

$$m^2=4(28n^2+1)+4m-4. \quad ①$$

由①式，m是偶数，设$m=2k$，则

$$4k^2=4\times 28n^2+4\times 2k,$$

$$28n^2=k^2-2k. \quad ②$$

由②式，k是偶数，设$k=2p$，则有

$$7n^2=p^2-p=p(p-1).$$

由于p和$p-1$是相邻的整数，它们的最大公约数只能是1，所以p和$p-1$必然一为完全平方数，一为7乘以完全平方数．

于是，有两种情况：

(i) $p=A^2$，$p-1=7B^2$。

由$m=2k=4p$ 得

$$m=4A^2=(2A)^2.$$

m为某个整数的完全平方；

(ii) $p=7M^2$，$p-1=N^2$.

则 $N^2+1=7M^2$.

设$N=7t+r$，$0\leqslant r<7$，则

$$N^2+1=49t^2+14tr+r^2+1=7M^2.$$

因而，$r^2+1=7M^2-49t^2-14tr$. 于是，r^2+1是7的倍数. 由于$r=0$，1，2，3，4，5，6时，r^2+1等于1，2，5，10，17，26，37都不是7的倍数. 故$p=7M^2$，$p-1=N^2$的情形不可能出现.

例7 设a，b，c，d是整数，且数ac, $bc+ad$，bd都能被某整数u整除.

证明：bc和ad也都能被u整除.

证 由于

$$(bc-ad)^2=(bc+ad)^2-4acbd,$$

有
$$\left(\frac{bc-ad}{u}\right)^2=\left(\frac{bc+ad}{u}\right)^2-4\cdot\frac{ac}{u}\cdot\frac{bd}{u}.$$

又ac，bd，$bc+ad$都能被u整除，则

$$s=\frac{bc+ad}{u},\quad p=\frac{ac}{u},\quad q=\frac{bd}{u}$$

都是整数，即

$$\left(\frac{bc-ad}{u}\right)^2=s^2-4pq.$$

于是，$\frac{bc-ad}{u}$也是整数. 设$t=\frac{bc-ad}{u}$，

则 $t^2=s^2-4pq$,

$$s^2-t^2=4pq,$$

$$(s-t)(s+t)=4pq.$$

由于$s-t$与$s+t$具有相同的奇偶性，$4pq$为偶数，则$s-t$与$s+t$都是偶数。从而

$$\frac{s+t}{2}=\frac{1}{2}\left(\frac{bc+ad}{u}+\frac{bc-ad}{u}\right)=\frac{bc}{u},$$

$$\frac{s-t}{2}=\frac{1}{2}\left(\frac{bc+ad}{u}-\frac{bc-ad}{u}\right)=\frac{ad}{u}$$

都是整数，即bc和ad都能被u整除。

例 8 电化教育中心有三种器材：录音机，录像机和电视机，其中每一种器材的件数都是质数，而且互不相等。现在知道录音机的数目乘上录音机与录像机的数目之和正好比电视机的数目多120，请问这三种器材的数目各是多少？

解 设录音机的数目为A，录像机的数目为B，电视机的数目为C，则A，B，C都是质数，且满足

$$A(A+B)=C+120,\ A,\ B,\ C\text{互不相等}.$$

若C是偶数，由于偶质数只有唯一的2，则$C=2$。此时

$$A(A+B)=2+120=2\times 61.$$

于是，A必为2，从而$A=C$。这与A，C互不相等矛盾。因此，C不是偶数；

若C是奇数，则$C+120$为奇数。从而A与$A+B$都为奇数，于是B为偶数，$B=2$。

由此可得

$$A(A+2)=C+120,$$

$$(A+12)(A-10)=C.$$

因为C是质数，所以$A+12$与$A-10$中一定有一个为1．显然，

$$A-10=1,$$

$$A=11,$$

$$C=23.$$

故$A=11$，$B=2$，$C=23$即为所求．

例 9 能否把1，1，2，2，3，3，…，1986，1986这些数排成一行，使得两个1之间夹着一个数，两个2之间夹着两个数，…，两个1986之间夹着一千九百八十六个数？请证明你的结论．

解 我们把这$2\times1986=3972$个数排成一排，并且每一个数对应一个位置，这些位置用1，2，3，…，3972编上号．

先考察两个相同的偶数m，在这两个m之间夹着m个数，如果有一个m在奇数号位置，那么另一个一定在偶数号位置（因为这两个偶数之间隔着偶数个位置）．由于共有993对偶数，所以所有的偶数恰好占有993个奇数号位，993个偶数号位．

再考察两个相同的奇数n．由于两个n之间隔着奇数个位置，则只要有一个n占奇数号位，另一个n必也占奇数号位．同样，只要有一个n占偶数号位，那么另一个n也占偶数号位．于是，可设所有奇数占有$2k$个奇数号位，$(1986-2k)$个偶数号位．

我们只考察所有的1986个奇数号位，它被993个偶数和$2k$个奇数所占有，于是有

$$1986=993+2k.$$

然而此式的左边是偶数，右边是奇数，这是不可能的。所以题目要求的做法不可能做到。

例10 设a，b，c，d为奇整数，$0<a<b<c<d$，且$ad=bc$。

证明：如果$a+d=2^k$，$b+c=2^m$，k和m是整数，那么$a=1$。

证 因为 $0<a<b<c<d$，

所以 $d-a>c-b$。

因为$ad=bc$，所以

$$(2^k)^2=(a+d)^2=(a-d)^2+4ad$$
$$>(c-b)^2+4bc=(b+c)^2=(2^m)^2.$$

所以$k>m$。

由 $d=2^k-a$，$c=2^m-b$，可得

$$a(2^k-a)=b(2^m-b),$$
$$2^ka-2^mb=a^2-b^2=(a+b)(a-b).$$

即 $$2^m(2^{k-m}a-b)=(a+b)(a-b). \quad (1)$$

考虑到$a<b$，（1）式可写为

$$2^m(b-2^{k-m}a)=(b+a)(b-a) \quad (2)$$

由于$(b+a)-(b-a)=2a$，而$2a$是一个奇数的2倍，所以$b+a$与$b-a$不可能都是$4k$型，也不可能都是$4k+2$型，即必为一个是$4k$型，一个是$4k+2$型。

又因为$b-2^{k-m}a$是奇数，则可设

$$b-2^{k-m}a=ef, \quad (3)$$

其中e和f都是奇数。

由（2）和（3）及上面的分析可得

$$\begin{cases} b+a=2^{m-1}e, \\ b-a=2f; \end{cases}$$

或
$$\begin{cases} b+a=2f, \\ b-a=2^{m-1}e. \end{cases} \tag{4}$$

又由于

$$ef=b-2^{k-m}a\leqslant b-2a<b-a=2f,$$

或 $ef=b-2^{k-m}a\leqslant b-2a<b-a<b+a=2f$,

从而都有$ef<2f$，$e<2$，即$e=1$。

于是，方程组（4）可化为

$$\begin{cases} b+a=2^{m-1}, \\ b-a=2f; \end{cases} \quad 或 \quad \begin{cases} b+a=2f, \\ b-a=2^{m-1}. \end{cases}$$

即
$$\begin{cases} b+a=2^{m-1}, \\ b-a=2b-2^{k-m+1}a. \end{cases} \tag{5}$$

$$\begin{cases} b+a=2b-2^{k-m+1}a. \\ b-a=2^{m-1}. \end{cases} \tag{6}$$

解方程组（5）得

$$2^{m-1}=2^{k-m+1}a.$$

由a是奇数，可得$a=1$。

解方程组（6）同样可得$a=1$,

三、关于整数的其它分类

把整数分为奇数和偶数两大类，实质上是把整数被2除，根据余数是0还是1而分成两类。如果整数不是被2除，而是被m除，余数就有0，1，2，…，$m-1$共m种。这样，我们可以按余数把整数分成m类，这m类既不重（没有一个整数同时属于其中两类）也不漏（没有一个整数不属于