

数学思维的启发与能力的培养

中学数学教学100例

毛鸿翔 凌鸿春 季素月 编著



重 庆 大 学 出 版 社

数学思维的启发与能力的培养

——中学数学教学100例

毛鸿翔 凌鸿春 季素月 编著

重庆大学出版社 /

数学思维的启发与能力的培养

——中学数学教学100例

毛鸿翔 凌鸿春 季素月 编著

责任编辑 冉竹下

重庆大学出版社出版发行

新华书店经销

重庆印制第一厂印刷

开本: 787×1092 1/32 印张: 8.375 字数: 188 千
1990年3月第1版 1990年3月第1次印刷

印数: 1—5090

标准书号: ISBN 7-5624-0315-5 定价: 2.70元

O.49

前 言

在数学教学中必须注意启发学生的思维和培养学生的能力，这已经为中学数学教师所重视。但是在数学教学中，怎样来启发学生的思维和培养学生的能力却并不是一件容易的事。为此，我们根据学生心理活动的特点和数学能力的特征，对数学教学中怎样启发学生的思维和培养学生的能力进行了探讨，并在实践的基础上编写了这本书，希望能对中学数学教学有所帮助。

全书分为两个部分。第一部分阐述了在数学教学中为了启发学生的思维必须注意激发学生的学习兴趣；提供正确、典型的思维材料；创造思维情境；引导学生“自得”；排除学习上和心理上的障碍等。第二部分讨论了数学能力的特点；知识的学习与能力的培养之间的关系；在数学教学中怎样才能促使知识的学习与能力的培养得到协同发展；在数学教学中怎样培养学生的抽象概括能力，运算和推理能力，思维的转换能力，记忆能力等。全书在方法介绍和理论阐述的同时还穿插列举了中学数学教学实例 100 个，以便老师们在教学实践时有所借鉴。

本书适合于高师本科数学专业学生、师专数学科学生、中师学生、业余大学、函授大学数学专业的学生以及高师院校、中等学校数学教师以及爱好数学教学的同志参考借鉴之用。

在本书的编写过程中，曾得到贵州师范大学吕传汉副教授、汪秉彝副教授的支持，他们详细审阅了本书的全稿，提出了许多宝贵意见，在此一并表示感谢。由于我们的水平有限，错误在所难免，欢迎读者批评指正。

作者

一九八八年元月

目 录

第一篇 思维的启发

第一章 激发学习的兴趣 (2)

一、激起学生学习的欲望 (2)

二、引起认知冲突 (6)

三、引起“心理紧张” (11)

四、给予成功的满足 (15)

五、保持刺激的新颖性和变化 (19)

六、教师输入的信息量要与学生加工信息的能力相协调 (26)

第二章 提供思维材料 (29)

一、通过语言直观勾画出学生已有的表象 (29)

二、通过实物、模象直观,形成学生鲜明的表象 (31)

三、通过演示实验向学生提供思维材料 (34)

四、通过形象化的语言对事物进行描绘,使学生形成对某 事物的想象 (35)

五、通过复习旧知识为新知识提供思维材料 (37)

六、通过与新知识有关的问题的解决来提供思维材料 (39)

第三章 创设思维情境 (43)

一、通过“激疑”来创设思维情境 (43)

二、通过“设问”来创设思维情境 (46)

三、引起“争论”,促进思维的展开 (54)

四、通过实验来创设思维情境 (58)

五、通过激发数学的美感来创设思维情境	(60)
第四章 引导学生“自得”	(63)
一、揭示解决问题的原理、思想和方法,引导学生自得	(64)
二、揭示新旧知识之间的联系,引导学生自得	(73)
三、揭示数学内容中的统一性、对称性、守恒性、相似性 等来引导学生“自得”	(84)
四、将原有问题特殊化或一般化来引导学生获得新知识	(98)
第五章 排除学习上的障碍	(102)
一、架设“认知桥梁”	(102)
二、破除学习上的难点	(107)
三、排除学习上的心理障碍	(117)

第二篇 数学能力的培养

第一章 能力概述	(127)
一、数学能力的特点	(127)
二、知识的学习与能力培养之间的关系	(130)
第二章 抽象概括能力的培养	(166)
一、从具体到抽象	(166)
二、从特殊到一般	(171)
三、通过典型问题的解决概括出一类问题的解法	(175)
四、多让学生小结	(179)
第三章 运算和推理能力的培养	(184)
一、运算能力的培养	(184)
二、推理能力的培养	(194)
第四章 思维转换能力的培养	(223)
一、培养思维的可逆性	(223)
二、培养思维的变通性	(232)

三、培养思维的批判性	(244)
第五章 记忆能力的培养	(246)
一、培养学生良好的注意品质	(246)
二、正确地运用识记的方法	(248)
三、及时复习,防止遗忘	(255)
参考书目	(257)

第一篇 思维的启发

思维是人们对外界输入信息的加工、推理和制作思想产品的心理过程。它是在感知的基础上经过分析、综合、比较、抽象、概括等思维过程，对客观事物的本质属性和内部联系的认识。它是人脑对客观事物概括的、间接的反映。

学习的基本任务是将前人所积累的知识通过学习转化为自己的知识，并进一步转化为能力。而思维则是人们获得理性知识的主要心理过程。人们要想将别人已积累的知识转化为自己的知识，只有通过思维才能实现。我国春秋战国时期的孟子早就说过：“心之官则思，思则得之，不思则不得也”。（《孟子·告子上》）

思维是在人的大脑皮质内发生的一种中枢神经运动。人的大脑类似于一部机器（思维机器），机器的运转需要一个启动的过程。同样，人的大脑思维也要有一个启动的过程。学习一种知识，思考一个问题，都需要经过一段时间的启动才能使思维围绕其中心内容展开。

思维的启动与启动的方法有关。我们在教学中常常发生“启而不发”的现象，这就是启发不当的结果。思维活动有其一定的规律，要能使思维得到启动，并且围绕所学习的问题迅速地展开，一定要按照思维活动的规律来进行启动。下面我们具体讨论在数学教学中怎样来启发学生的积极思维。

第一章 激发学习的兴趣

学习和思考一个问题，都是从注意开始的。如果主体注意了某个事物，在大脑皮层的有关区域就产生了优势兴奋中心，这样就能对某个事物获得清晰的反映。同时由于兴奋与抑制的相互诱导作用，使大脑皮层其他区域内所受的刺激受到抑制，从而使思维围绕某个事物而展开。

注意和兴趣是密切联系的。兴趣是人们爱好某种活动或力求认识某种事物的倾向。学习兴趣则是学生对学习活动和学习对象的一种力求趋近或认识的倾向。心理学家认为，学习兴趣对学习具有下述功能：（1）将注意力优先指向所感兴趣的对象；（2）能排除其他的干扰，集中注意力于感兴趣的物体；（3）积极主动地学习，求达目标。由此可见，要能集中学生的注意，促进学生主动地学习，激发学生的学习兴趣是十分重要的。我国古代教育家孔子说过：“知之者不如好之者，好之者不如乐之者”（《论语·雍也》）。苏联的奥加涅相也说：“数学教学的成就，很大程度上取决于学生对于数学课的兴趣是否能保持和发展”（《中小学数学教学法》5.5）。这些论述都阐明了激发与培养学生的兴趣的重要性。

在数学教学中怎样来激发学生的学习兴趣呢？

一、激起学生学习的欲望

兴趣是倾向于认识、研究、获得某种事物的心理特征。兴趣来之于需要。在学习过程中，如果学生对某种知识发生一种急于了解的心情，就会引起一种学习的欲望而产生对学

习某种知识的兴趣。在教学过程中，如果我们能设法引起学生对学习新知识的欲望，就会激起学生对新知识的兴趣和注意。下面举例说明之。

例1 余弦定理的教学

学生已经知道已知一个三角形的两边和它们的夹角，这个三角形就确定了，从而它的第三边也随之确定。但是绝大多数同学并没有考虑过三角形的第三边与其他两边及其夹角之间的函数关系。为了引起学生学习余弦定理的期望，可先从学生已学过的知识入手。

(1)要求大家动手作一个三角形 ABC ，使 $AB=3\text{cm}$ ， $AC=4\text{cm}$ ， $\angle A=60^\circ$ 。并考虑这样的三角形是否唯一确定。

(2)请每个学生用刻度尺量出所作三角形的第三边的长度。

(3)请同学们思考，能否根据 $\triangle ABC$ 两边的长度和它们夹角的大小计算出 $\triangle ABC$ 的第三边 BC 的长度。

同学们知道 $\triangle ABC$ 的第三边 BC 的长度是确定的，并且可用刻度尺量出它们的长度。但是怎样由 AB 、 AC 的长度和 $\angle A$ 的大小来计算出 BC 的长度呢？大多数学生一下子不知如何去解决，这就激发起学生学习余弦定理的期望。

例2 平面几何引言课的教学

平面几何是初二学生学习数学的难点之一，其原因是学生在这以前学习的多半是有关数的知识和运算，现在一下子由“数”转到“形”，由“算”到“证”，不论在研究对象上，还是在研究的方法上都发生了变化，这就造成了同学们学习上的困难。为了帮助学生学好平面几何，首先要激起学生学习平面几何的求知欲望，引起学生的学习兴趣。为了激起学生学

习几何的求知欲望，在引言课的教学中可用故事引路，让学生通过游戏性操作来接触几何图形，探讨它们的性质。具体做法如下：

(1) 简单介绍几何学的起源和我国古代在几何上的突出成就。

(2) 编造一些学生所熟悉的几何图形，让学生动手操作，增加实感。其方法有：

① 折纸与剪纸。要求学生与教师一起，用纸剪成一个角，再把它折成相等的两部份，那么这条折线就是角的平分线，将来我们会看到角的平分线有很多性质。用纸剪一个等腰三角形，再把它折成两个互相重合的三角形，这条折线就是等腰三角形顶角的平分线，将来同学们将会看到，等腰三角形顶角的平分线具有很重要的性质。剪一个长方形，把长方形的纸片沿相对顶点折成两部分，每一条折线都叫做长方形的对角线。我们将来会知道，长方形的两条对角线相等，交于一点并且被这一点平分。我们还可以剪出许多几何图形，并且通过折线的方法来找出几何图形之间的联系。

② 用火柴棒拼搭图形。拼搭一个等边三角形至少要几根火柴棒？拼搭连在一起的两个、三个、四个、五个、六个等边三角形各需几根火柴棒？请大家拼搭下列各种图形。如图1-1-1。

在我们的平面几何中，将要研究以上各种图形的性质。

③ 三三钉板。在一个正方形的木板上有三行三列等距的九颗钉子，再用一条较长的橡皮筋，让学生自己在钉板上用橡皮筋绕成以下各种图形。如图1-1-2。

以上这些图形它们各有什么特点？它们具有哪些性质？

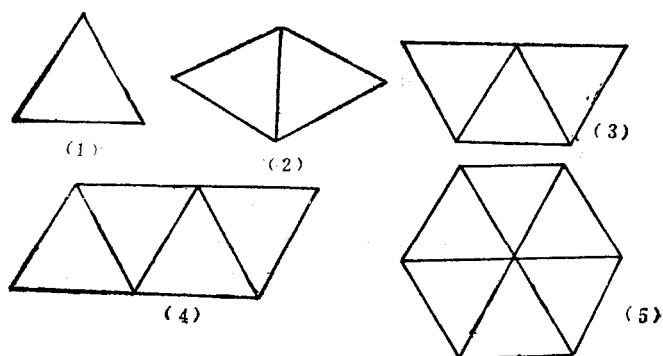


图 1-1-1

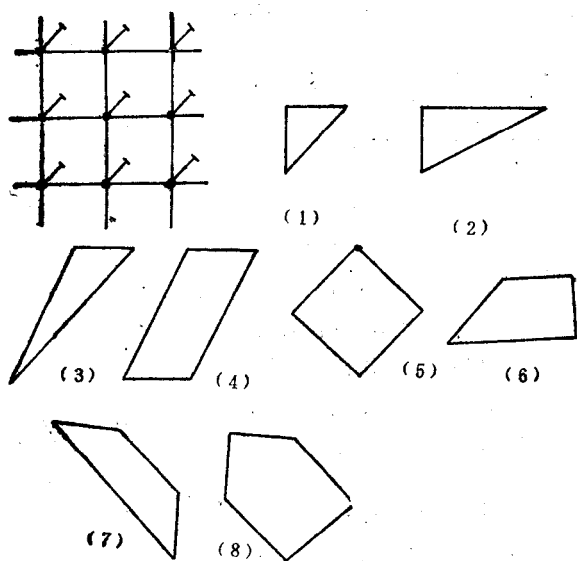


图 1-1-2

在平面几何中我们将会分别予以讨论。

若用五五钉板将可构成更多的直线形，可鼓励学生课外自己进行。

(3)说明几何图案的实用性。教师可绘制一些图案让学生欣赏，使他们感受到几何图形中蕴含着美的因素。

(4)观察图形。由于种种原因，视觉并不总是可靠的。常用的例子有：

图1-1-3的两条线段本来是相等的，但看起来似乎上面的一条要长一些。

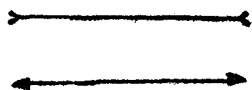


图 1-1-3

图1-1-4的两条线段也是相等的，但看上去竖的一条似乎要长一些。

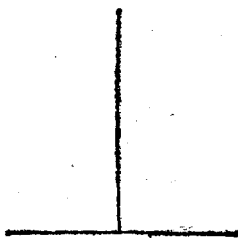


图 1-1-4

进行时可问学生图1-1-3或图1-1-4中的两条线段那一条长，然后量给他们看，它们是相等的。以此来说明通过视觉来判别两条线段是否相等，有时并不可靠。怎样判断才正确无误呢？在平面几何中我们将要学习如何从逻辑上证明两线段相等、两角相等的方法。通过以上的一些工作就能激起学生学习平面几何的求知欲望。

二、引起认知冲突

认知冲突是一个人的已有知识和经验与当前面临的情境之间的冲突或差别，这种认知冲突会引起人们的新奇和惊

愕，并引起他们的注意、关心和探索行为。心理学的研究表明，如果学习者已有的知识经验和新的学习任务之间具有中等程度的分歧、不一致或差距时，对动员学生的注意最为有效，特别是在学生对他所知道的东西犹感不足的情况下，更是如此。用皮亚杰的话说：“如果新的学习任务需要儿童自己先作出某种程度的顺应——已有图式不完全适合于理解或解决问题，而需要加以细微变更，然后才能进行同化，那么，这些新任务对儿童来说，最富有吸引力”。

引起认知冲突常用的方法有：

1. 揭露学生原有认识上的片面性和不完整性。当学生发现他们原有认识是不完整的或错误的时，就会迫切要求获得正确的、完整的认识。

例3 圆的概念的教学

学生在日常生活中已经接触过许多圆形的实物，他们对圆具有丰富的感性认识。但是他们对圆的认识还没有上升到理性认识。因此，在讲解圆的概念时，可通过揭露他们对圆的认识的不完整性以引起认知冲突，激起他们对新知识学习的要求。

具体进行方法如下：

教师：我们在日常生活中已经接触过许多圆形的实物，现在请一位同学举出一些圆形的实物的例子。

答：硬币、机械上的圆盘、车轮等都是圆形的实物。

教师：回答得很好！现在请大家想一想，什么叫做圆呢？也就是说圆具有怎样的本质特征呢？

（教师提出这个问题之后学生会哑口无言，不知如何回答是好，也有个别同学会回答：“圆就是圆形的形状”，当

然多数学生知道这种回答是不对的。学生发现自己过去虽然接触过许多圆形的实物，但并没有了解圆的本质特征是什么，这就激起了学生学习新知识的要求。)

教师在学生处于困惑状态时提出，我这里有一把两脚规，有没有同学会用两脚规在黑板上画圆。

(学生回答不出什么是圆，但大多数同学是会使用圆规画圆的。此时学生的心理会由困惑转为活跃，迫切希望教师能让他到黑板前用圆规画圆。)

教师通过“用两脚规画圆的过程”的分析，揭示出圆的本质特征。

这样的处理既利用了学生原有的知识和经验，又引起了认知冲突。在整个学习过程中，学生会处于积极主动的学习状态。

24. 通过呈现给学生与他们已有认识相互矛盾的现象，引起认知冲突。

例4 负数的引进

在引进负数之前，先让学生练习以下各题，教师再出示自己的答案(与学生已有认识矛盾的答案)。

(1) 某学生带了8元钱去文具商店买文具用品，如果他选购了0.4元一本的簿本8本，4.6元一支的钢笔一支，问该生带的钱是有多余还是不够，有余或不够多少？如果他选购0.4元一本的簿本6本，4.6元一支的钢笔一支，1.6元一支的圆珠笔一支，问该生带的钱是有多余还是不够，有余或不够多少？并用算式表示出来。

(2) 甲、乙两站相距9公里，1路公共汽车以平均每小时15公里的速度往返于甲、乙两站之间，若他从甲站开往

乙站视为上行,反之视为下行.问汽车从甲站开出20分钟后,汽车是上行还是下行,汽车距乙站几公里?汽车从甲站开出40分钟后,汽车是上行还是下行,汽车距乙站几公里.并用算式表示出来.

学生的答案

1. (1) $8-0.4 \times 8-4.6=0.2$

答: 尚余0.2元.

(2) $0.4 \times 6+4.6+1.6-8$
 $=0.6$

答: 不够0.6元.

2. (1) $9-5=4$

答: 上行, 距乙站4公里.

(2) $10-9=1$

答: 下行, 距乙站1公里.

教师的答案

1. (1) $8-0.4 \times 8-4.6=0.2$

答: 尚余0.2元.

(2) $8-0.4 \times 6-4.6-1.6$
 $=-0.6$

答: 不够0.6元.

2. (1) $9-5=4$

答: 上行, 距乙站4公里.

(2) $9-10=-1$

答: 下行, 距乙站1公里.

教师将自己的答案出示让学生核实时, 学生会发现教师的第1题的第(2)小题、第2题第(2)小题的答案与他们学过的知识矛盾, 而引起奇怪和惊讶之感(产生认知冲突). 此时教师再解释他是怎么做的. 尚余0.2元和不够0.6元是两个具有相反意义的量, 尚余0.2元用算术里学过的数0.2元表示, 不够0.6元, 就用-0.6元表示(在0.6的前面添上一个“-”号). 这样8元减去8.6元不够0.6元, 就可用算式 $8-8.6=-0.6$ 表示了. 在第2题中, 汽车从甲站开出20分钟行驶的路程小于9公里, 汽车为上行, 汽车距乙站的距离可用算式 $9-5=4$ 得出; 汽车从甲站开出40分钟, 汽车行驶的路程为10公里, 它大于9公里, 此时要求汽车距乙站的距离仍用算式 $9-10$ 表示. 这时减数比被减数大1, 其结果可用-1表示, 得 $9-10=-1$, -1就表示汽车是下行, 距乙站1公里.

象上面那样，在算术里的数前面添上“-”号的数，叫做负数。原来算术里的数叫做正数。下面再具体介绍负数的引进。这样就可以引起学生对学习有理数的兴趣。

3. 运用选择冲突的方法。一个问题，如果提供几种答案让学生选择，当学生不知选那一个答案才对时，由于认知上的冲突，就会产生求知的欲望。

例5 二次根式的基本性质

学习二次根式的基本性质： $(\sqrt{a})^2=a(a\geq 0)$ ，

$$\sqrt{a^2} = \begin{cases} a & (a>0) \\ 0 & (a=0) \\ -a & (a<0) \end{cases}$$

时，如果采用选择冲突的方法，不仅可激

发学生的学习兴趣，并且有利于学生对这一部分知识的掌握。在没有讲课之前，先让学生练习以下选择题：

(1) $\sqrt{9}$ 的平方是①81；②9；③3。

(2) 16的平方根是①4；② ± 4 ；③2；④ ± 2 。

(3) $\sqrt{a}$ 中， a 的取值范围是① $a>0$ ；② $a\geq 0$ ；③ a 可取一切实数值。

(4) $\sqrt{a^2}$ 中， a 的取值范围是① $a>0$ ；② $a\geq 0$ ；③ a 可取一切实数值。

(5) 式子 $(\sqrt{a})^2=a$ 的条件是① $a>0$ ；② $a\geq 0$ ；③ $a<0$ ；④ $a\leq 0$ 。

(6) 式子 $\sqrt{a^2}=a$ 的条件是① $a>0$ ；② $a<0$ ；③ $a\geq 0$ ；④ $a\leq 0$ 。

(7) 式子 $\sqrt{a^2}=-a$ 的条件是① $a>0$ ；② $a<0$ ；③ $a\geq 0$ ；④ $a\leq 0$ 。

(8) 式子 $\sqrt{(x-3)^2}$ 等于① $x-3$ ；② $3-x$ ；③ $x-3$ 或