北极星

学习丛书系列

高考高分 直通车

数学

北京市北极星学习丛书编委会　编

首都师范大学出版社

北极星学习丛书系列

高考高分直通车
数学

北京市北极星学习丛书编委会 编

首都师范大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

高考高分直通车：数学/北京市北极星学习丛书编委会编著．
—北京：首都师范大学出版社，1999.7
(北极星学习丛书系列)
ISBN 7-81039-920-9

Ⅰ．高…　Ⅱ．北…　Ⅲ．数学课-高中-升学参考资料
Ⅳ．G633

中国版本图书馆 CIP 数据核字(98)第 35960 号

北极星学习丛书系列

GAOKAO GAOFEN ZHITONGCHE · SHUXUE

高考高分直通车·数学

首都师范大学出版社

（北京西三环北路 105 号　邮政编码 100037）

北京昌平兴华印刷厂印刷　全国新华书店经销

1999 年 7 月第 1 版　1999 年 7 月第 1 次印刷

开本 850×1168　1/32　印张 16.625

字数 423 千　印数 00,001～15,000 册

定价 16.50 元

目　　录

第一章　幂函数、指数函数和对数函数

一、复习目标与要求

1. 复习目标

（1）有关集合的一些基本概念，如集合和元素的一般概念，集合的表示法，集合与集合之间的包含关系、相等关系，空集、子集、交集、并集和补集等概念.

（2）关于$|ax+b|<c$，$|ax+b|>c(c>0)$型不等式和一元二次不等式及其解法.

（3）映射与函数概念；函数的单调性和奇偶性概念及图象特征；反函数概念及图象特征.

（4）求函数表达式、定义域、值域、最值、单调区间、反函数的方法；判断函数单调性和奇偶性的方法；描绘出函数的图象并利用图象研究函数的性质.

（5）一次、二次、幂、指数和对数函数的概念，以及这些函数的图象特征和性质（如幂函数的分类，指数函数、对数函数的单调性及其应用）；简单的指数方程和对数方程的解法；复合函数的性质的研究.

2. 复习要求

（1）理解集合、子集、交集、并集、补集的概念. 了解空集和全集的意义. 了解属于、包含、相等关系的意义，能掌握有关的符号，能正确地表示一些简单的集合.

（2）了解映射的概念，在此基础上理解函数及其有关的概念. 掌握互为反函数的函数图象间的关系.

（3）理解函数的单调性和奇偶性的概念，并能判断一些简单函

数的单调性和奇偶性，能利用函数的奇偶性与图象的对称性的关系描绘函数图象.

(4)掌握幂函数、指数函数、对数函数的概念及其图象和性质，并会解简单的指数方程和对数方程.

二、基础知识的理解与运用

(1)关于集合的一些基本概念的理解

例 1 设$A=\{x|a\leqslant x\leqslant a+3\}$,

$B=\{x|(x+1)(x+5)>0\}$,

问 a 为何值时，①$A\cap B=\varnothing$；②$A\cap B\neq\varnothing$；③$A\cap B=A$；④$A\cup\overline{B}=\overline{B}$.

分析 ①$A\cap B=\varnothing$是指集合 A 与 B 没有公共的元素，或者说，A 是由不属于 B 的元素构成的；②$A\cap B\neq\varnothing$说明集合 A 与 B 有公共的元素；③$A\cap B=A$ 说明凡属于集合 A 的元素一定属于集合 B；④$A\cup\overline{B}=\overline{B}$ 说明集合 A 的元素一定是不属于 B 的元素.

解 ∵ $B=\{x|(x+1)(x-5)>0\}$

$=\{x|x<-1$ 或 $x>5\}$,

∴ ①当 $a\geqslant-1$ 且 $a+3\leqslant5$ 时，

即 当 $-1\leqslant a\leqslant2$ 时，$A\cap B=\varnothing$.

②当 $a<-1$ 或 $a>2$ 时，$A\cap B\neq\varnothing$.

③当 $a+3<-1$ 或 $a>5$ 时，

即 当 $a<-4$ 或 $a>5$ 时，$A\cap B=A$.

④∵ $\overline{B}=\{x|-1\leqslant x\leqslant5\}$,

∴ 当 $a\geqslant-1$ 且 $a+3\leqslant5$ 时，

即 当$-1\leqslant a\leqslant2$ 时，$A\cup\overline{B}=\overline{B}$

例 2 设全集 I 为自然数集 N，$E=\{2n|n\in N\}$，$F=\{4n|n\in N\}$，那么集合 N 可以表示成(　　)

(A)$E\cap F$　　(B)$\overline{E}\cup F$　　(C)$E\cup\overline{F}$　　(D)$\overline{E}\cap F$.

解 ∵ 集合 N 中的元素可以分为四类：$4k+1$，$4k+2$，$4k+$

$3,4k+4,k=0,1,2,\cdots$.

集合 E 中的元素可分为两类：$4k+2,4k+4,k=0,1,2,\cdots$.

集合 F 中的元素可以表示为：$4k+4,k=0,1,2,\cdots$.

$\therefore$ 集合 $\overline{F}$ 中的元素可以分三类：

$$4k+1,4k+2,4k+3,k=0,1,2,\cdots.$$

$\therefore$ $N=E\cup\overline{F}$. 故应选(C).

例 3 已知 $A=\{x|x^2-ax+a^2-19=0\}$，$B=\{X|\log_2(x^2-5x+8)=1\}$，$C=\{x|x^2+2x-8=0\}$，且 $A\cap B\supset\varnothing$，$A\cap C=\varnothing$，求 a 的值.

解 由题设可知

$$B=\{2,3\},\quad C=\{2,-4\}.$$

$\because$ $A\cap B\supset\varnothing$， $\therefore$ $A\cap B\neq\varnothing$

$\because$ $2\in A$ 或 $3\in A$.

又$\because$ $A\cap C=\varnothing$， $\therefore$ $2\notin A$，

从而 $3\in A$.

$\therefore$ $3^2-3a+a^2-19=0$

解之，得 $a=5$ 或 $a=-2$.

若 $a=5$，则 $A=\{2,3\}$，$A\cap C=\{2\}\neq\varnothing$，不合题意，舍去.

若 $a=-2$，则 $A=\{3,-5\}$，$A\cap B\neq\varnothing$，$A\cap C\neq\varnothing$.

综上所述，故求得 $a=-2$.

(2)关于一元二次不等式

例 4 已知抛物线 $y=x^2+2kx+(3-2k)$.

(1)当 k 为何值时，抛物线的顶点在第二象限？

(2)当 k 为何实数值时，抛物线顶点位置最高？并画简略图.

分析 解决本题的关键是将图象中顶点的位置问题转化为不等式和方程的求解问题.

解 (1)$\because$
$$\begin{aligned}y&=x^2+2kx+(3-2k)\\&=(x+k)^2-k^2-2k+3\end{aligned}$$

$\therefore$ 顶点是$(-k,-k^2-2k+3)$.

∵　顶点在第二象限的条件是：

$$\begin{cases}-k<0\\-k^2-2k+3>0\end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{cases}k>0\\(k+3)(k-1)<0\end{cases}$$

∴　$0<k<1$.

即当 $0<k<1$ 时，抛物线顶点在第二象限.

(2)∵　当 $k=-1$ 时，y 的值最大，其最大值为 4，即当 $k=-1$ 时，抛物线顶点位置最高，此时抛物线的解析式为

$$y=x^2-2x+5$$

即　$y=(x-1)^2+4$

顶点是(1,4)；

对称轴方程是　$x=1$；

抛物线在 y 轴上截距为 5；

略图如图 1-1 所示.

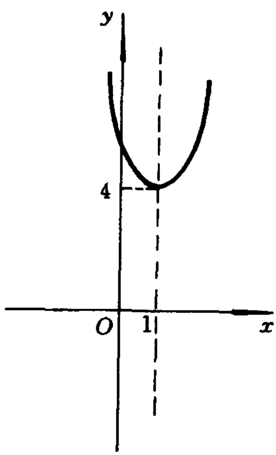

图 1-1

(3)正确理解映射、函数、反函数概念

例 5　设 $A=\{(x,y)|x\in Z,|x|<2,y\in N,x+y<3\}$，$B=\{0,1,2\}$.

$f:(x,y)\to x+y$ 是 A 到 B 的对应关系，试判断 f 是不是从 A 到 B 的映射？

分析　解答本题的关键有两点，即弄清：

(1)集合 A 的元素是什么？

(2)什么是从 A 到 B 的映射？

解　∵　$x\in Z$，且 $|x|<2$，

∴　$x\in\{-1,0,1\}$.

又∵　$y\in N$，且　$x+y<3$，

∴$A=\{(-1,1),(-1,2),(-1,3),(0,1),(0,2),(1,1)\}$.

∵　$f:(x,y)\to x+y$，

∴　A 中每个元素中的一对数的和都在 $B=\{0,1,2\}$ 中能找

到惟一的像.

∴ f 是从 A 到 B 的映射.

例 6 求出下列函数的反函数：

(1)$y=x^2-6x+11$ $(x<0)$；

(2)$y=\frac{1}{2}(a^{-x}+a^x)$ $(x>1$ 且 $x\geqslant 0)$；

(3)$y=\lg^2 x-\lg x^2$ $(x\in(0,10))$；

(4)$y=x|x|+2x$ $(x\in R)$.

分析 当给定函数 $y=f(x)$ 的反函数存在时，求其反函数的一般步骤是：

①求出原给函数的定义域 A 与值域 B，确定反函数的定义域 B；

②由 $y=f(x)$ 解出 $x=f^{-1}(y)$；

③写出反函数 $x=f^{-1}(y)$ $(y\in B)$，再改成习惯记法：$y=f^{-1}(x)(x\in B)$，这就是原给函数的反函数.

解 (1)∵ 函数的定义域是 $x<0$，值域 $y>11$，由原给函数反解得 $(x-3)^2=y-2$.

∵ $x<0$，

∴ $x-3=-\sqrt{y-2}$，即 $x=3-\sqrt{y-2}$.

∴ 所求的反函数为 $y=3-\sqrt{x-2}$. $(x>11)$

(2)∵ $a>1$，

∴ $a^{-x}+a^x\geqslant 2$.

∴ $\frac{1}{2}(a^{-x}+a^x)\geqslant 1$，即原给函数的值域为 $y\geqslant 1$.

由原给函数可得 $a^{-x}+a^x=2y$，

即 $(a^x)^2-2ya^x+1=0$，

解得 $a^x=y\pm\sqrt{y^2-1}$.

∵ $a^x>1$，

∴ $a^x=y+\sqrt{y^2-1}$，

从而 $x=\log_a(y+\sqrt{y^2-1})$.

$\therefore$ 所求反函数为 $y=\log_a(x+\sqrt{x^2-1})(x\geqslant 1)$.

(3) $y=\lg^2 x-\lg x^2=(\lg x-1)^2-1$,

$\because$ $0<x<10$,

$\therefore$ $\lg x<1, \lg x-1<0$,

$\therefore$ $(\lg x-1)^2-1>-1$.

即原给函数的值域为 $y>-1$.

由原给函数反解得 $(\lg x-1)^2=y+1$

即 $\lg x-1=-\sqrt{y+1}$,

整理得 $x=10^{1-\sqrt{y+1}}$

$\therefore$ 所求反函数为 $y=10^{1-\sqrt{x+1}}(x>-1)$.

(4)在函数的定义域 R 上,因确定函数的映射不是从定义域到值域的一一映射,所以函数在整个定义域上不存在反函数.

将原给函数变形为 $y=x(|x|+2)$

$\because$ $|x|+2>0$, x,y 同号,

$\therefore$ 当 $x\geqslant 0$ 时,值域 $y\geqslant 0$,

解得 $x=-1+\sqrt{1+y}$

当 $x<0$ 时,值域 $y<0$,

解得 $x=1-\sqrt{1-y}$

$\therefore$ 所求反函数为 $y=\begin{cases}-1+\sqrt{1+x} & (x\geqslant 0)\\ 1-\sqrt{1-x} & (x<0)\end{cases}$

说明 解有关反函数问题时,要注意如下几点:(i)求反函数时,首先应求出原给函数的定义域和值域,不然容易出错;其次在反解求 x 关于 y 的表达式时,如遇到开偶次方,则要根据原给函数的定义域判断取正还是取负.(ii)要注意反函数存在的条件.(iii)在同一直角坐标系中,原给函数 $y=f(x)$ 与反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图像关于直线 $y=x$ 对称.

(4)掌握函数的性质

①函数的单调性

例 7 证明 $f(x)=x^2-2x$ 在区间 $(1,+\infty)$ 内是增函数.

证明 设 $x_1,x_2\in(1,+\infty)$，且 $x_1<x_2$，则

$$f(x_1)=x_1^2-2x_1,\quad f(x_2)=x_2^2-2x_2,$$

$$\begin{aligned}f(x_2)-f(x_1)&=x_2^2-2x_2-x_1^2+2x_1\\&=x_2^2-x_1^2-2(x_2-x_1)\\&=(x_2-x_1)(x_2+x_1-2)\end{aligned}$$

$\because x_2>x_1$，$\therefore\ x_2-x_1>0.$

$\because\ x_1,x_2\in(1,+\infty)$

$\therefore\ x_1>1,x_2>1,x_1+x_2>2.$

$\therefore\ x_1+x_2-2>0.$

$\therefore\ f(x_2)-f(x_1)>0$，即 $f(x_2)>f(x_1).$

故 $f(x)=x^2-2x$ 在$(1,+\infty)$内是增函数.

例 8 证明函数 $f(x)=\sqrt{x^2+1}-x$ 在其定义域内是减函数.

证明 易知，$f(x)=\sqrt{x^2+1}-x$ 的定义域是 R，

(1)当 $x<0$ 时，如果 x 增大，则 x^2 反而减小，

$\therefore\ \sqrt{x^2+1}$也随之减小.

同时，$-x$ 也随之减小. 因此，$f(x)=\sqrt{x^2+1}-x$ 也随之减小.

(2)当 $x>0$ 时，如 x 增大，当然 $\sqrt{x^2+1}$也随之增大，但这时，$\sqrt{x^2+1}-x$ 是增大还是减小却不能明显看出，为此可以进行变形：

$$f(x)=\sqrt{x^2+1}-x=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}.$$

则不难知道，当 $x>0$ 且增大时，上式右端的分母将随之增大，所以 $f(x)=\sqrt{x^2+1}-x$ 反而减小.

综合(1)、(2)可知，$f(x)=\sqrt{x^2+1}-x$ 在其定义域 R 内是减函数.

例 9 已知函数 $z=f(y)$在 R 内是增函数.

求证：若 $y=g(x)$在(a,b)内是增函数，则函数 $z=f[g(x)]$在

(a,b)内也是增函数.

证明 任取 $x_1, x_2 \in (a,b)$，且设 $x_1 < x_2$.

$\because$ $y=g(x)$在(a,b)内是增函数，

$\therefore$ $y_1=g(x_1)<y_2=g(x_2)$

又$\because$ $z=f(y)$在 R 内是增函数，

$\therefore$ $f(y_1)<f(y_2)$

即 $f[g(x_1)]<f[g(x_2)]$.

根据定义，$y=f[g(x)]$在(a,b)内是增函数.

说明 (i)研究和讨论函数的增减性，首先要考虑定义域. 否则容易导致错误.

(ii)对于复合函数的增减性，必须考虑 $u=g(x)$及 $y=f(u)$的增减性，从而得出 $y=f[g(x)]$的增减性.

②函数的奇偶性

例 10 判断下列函数的奇偶性，并说明理由.

(1) $f(x)=x^2-|x|+1 \qquad x\in[-1,4]$；

(2) $f(x)=(x-1)\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}} \qquad x\in(-1,1)$；

(3) $f(x)=\begin{cases} x(1-x) & (x<0) \\ x(1+x) & (x>0) \end{cases}$

分析 判定函数奇偶性主要依据两点：

①函数的定义域是否是关于原点对称的区间；

②函数表达式是否满足 $f(-x)=\pm f(x)$.

解 (1)由于 $f(x)=x^2-|x|+1 \quad x\in[-1,4]$的定义域不是关于原点对称的区间，因此，$f(x)$是非奇非偶的函数.

(2)$\because$ $f(x)=(x-1)\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}\,x\in(-1,1)$的定义域是关于原点对称的，并且

$$f(-x)=(-x-1)\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}=-(x+1)\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$$

$$=-\sqrt{\frac{(1+x)^2(1-x)}{1-x}}=-\sqrt{(1+x)(1-x)}$$

$$=-\sqrt{\frac{(1+x)(1-x)^2}{1-x}}=-(1-x)\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}=f(x)$$

$\therefore$ $f(x)$是偶函数.

(3) 当 $x>0$ 时,$-x<0$,

$$f(-x)=(-x)[1-(-x)]=-x(1+x)$$
$$=-f(x) \qquad (x>0)$$

当 $x<0$ 时,$-x>0$,

$$f(-x)=(-x)[1+(-x)]=-x(1-x)$$
$$=-f(x) \qquad (x<0)$$

$\therefore$ 函数 $f(x)$在关于原点对称的区间上都有

$$f(-x)=-f(x)$$

故 函数 $f(x)$是奇函数.

例 11 设函数 $f(x)$定义在$(-l,l)$上,证明 $f(x)+f(-x)$是偶函数,$f(x)-f(-x)$是奇函数.

证明 由于对任意的 $x\in(-l,l)$,也必有$-x\in(-l,l)$. 可见 $f(-x)$的定义域也是$(-l,l)$.

若设 $F(x)=f(x)+f(-x)$,

$G(x)=f(x)-f(-x)$.

则 $F(x)$与 $G(x)$的定义域也是$(-l,l)$,显然是关于原点对称的区间.

而且 $F(-x)=f(-x)+f[-(-x)]=f(x)+f(-x)$

$=F(x)$,

$G(-x)=f(-x)-f[-(-x)]=f(-x)-f(x)$

$=-[f(x)-f(-x)]=-G(x)$.

所以 $F(x)$是偶函数,$G(x)$是奇函数.

说明 由函数的定义域不是关于原点对称的区间,可以断定函数既不是奇函数,也不是偶函数;但函数定义域是关于原点对称

的区间，却不能断定函数的奇偶性，还必须用定义进行检验.

此外，在函数式的变形过程中，要考虑定义域是否扩大或缩小.如果需要将函数解析式变形，则必须明确这一变形是在原给函数的定义域上进行的，只有在原给函数定义域内进行恒等变形后的解析式才能保持与原给函数有相同的性质.

③函数的最大(小)值

首先，要弄清极值与最值的区别与联系.

极值是局部性的函数性质.在 x_0 的一个邻域内，即给定的任意小的正数 δ，任取 $x\in(x_0-\delta,x+\delta)$，有 $f(x_0)>f(x)$（或 $f(x_0)<f(x)$），则称 $f(x)$ 在 x_0 处有极大(或极小)值.

最值是整体性的函数性质，指函数在整个定义域内所取到的最大(最小)值.一般情况下，函数的极值不等于最值，函数的极大值不一定大于函数极小值.

其次，要掌握函数最值的求法.

(i)配方法

求二次函数 $y=ax^2+bx+c(a\neq0)x\in(-\infty,+\infty)$ 的最大值或最小值时，关键在于将解析式配方.

事实上，
$$\begin{aligned}y&=ax^2+bx+c\\&=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a}.\end{aligned}$$

因此，当 $a>0$，$x=-\dfrac{b}{2a}$ 时，函数有最小值 $y_{\min}=\dfrac{4ac-b^2}{4a}$；

当 $a<0$，$x=-\dfrac{b}{2a}$ 时，函数有最大值 $y_{\max}=\dfrac{4ac-b^2}{4a}$.

(ii)换元法

利用代数换元或三角代换，有时能使函数解析式变得简单清晰，易于求解.

例 12 求函数 $y=x+\sqrt{5-x^2}$ 的最值.

解 $\because$ 函数的定义域为：$|x|\leqslant\sqrt{5}$，

$\therefore$ 可设 $x=\sqrt{5}\sin\alpha,\alpha\in\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$.