1982

中学数学复习提纲

天津人民出版社

中学数学复习提纲

天津市教育教学研究室编

天津人民出版社

中学数学复习提纲
天津市教育教学研究室编
*
天津人民出版社出版
天津市新华书店发行
唐山地区印刷厂印刷
*
开本 787×1092 毫米 1/32　　印张 15 1/2
一九八二年一月第一版
一九八二年一月第一次印刷
书　号：7072·1245
定　价：　1.12　元

说　　明

为了帮助我市一九八二年高中毕业生对数学进行系统复习，并便于教师进行复习指导，我们在前几年的基础上修订、编写了这本《中学数学复习提纲》。

本书是根据教育部颁发的《全日制十年制学校中学数学教学大纲(试行草案)》和教育部对该届学生必学内容的要求编写的。

本书内容分为代数、平面几何、立体几何、三角、平面解析几何、导数和微分等六大部分，每部分有若干单元，每个单元按基础知识、例题、习题的顺序编排。

习题分三种类型，即习题、复习题和综合复习题。每个习题的答案或提示附在书后，对复习题和综合复习题，我们另编一本《中学数学复习提纲复习题解》给出简单的解答。

参加本书编写工作的有张济华、张鼎言、戴宏祥、刘宗华、齐家祥、刘一致、柳书诰、烟学敏、梁汝芳、刘玉翘等同志。

由于我们的水平所限，时间仓促，错误之处在所难免，恳请读者批评指正。

天津市教育教学研究室

一九八一年十月

目　录

代　　数

一　数的概念

基 础 知 识

1. 数的概念

随着生产实践的发展，不断提出新的问题，促使数的概念也逐步扩充．在算术里最初只有自然数(也就是正整数)和零，有了量的分割的概念，便引进了分数，这时就把数的范围扩展到了正有理数和零．有了正负数的概念后，便把数的范围扩展到有理数．引进无理数后，又把数的范围扩展到实数．由于对负数开平方运算的研究，而产生虚数单位 i，并把数的范围扩展到复数．即：把形如 $a+bi$(a、b 都为实数)的数，叫做复数．这里，当 $b=0$ 时，$a+bi$ 就是实数 a；当 $a=0, b\neq 0$ 时，$a+bi$ 就是纯虚数 bi．

用数的系统表表示如下：

- 复　数 ($a+bi$)(a、b都是实数)
  - 实　数 ($b=0$)
    - 有理数
      - 整数
        - 正整数(自然数)
        - 零
        - 负整数
      - 分数
        - 正分数
        - 负分数
        - (正分数、负分数)有限小数和无限循环小数
    - 无理数
      - 正无理数
      - 负无理数
      - (正无理数、负无理数)无限不循环小数
  - 虚　数 ($b\neq 0$) $a+bi$ (当 $a=0$ 时，为纯虚数 bi)

2. 数的几何表示法

(1) 数轴和实数在数轴上的表示　数轴是一条规定了方向、

原点和长度单位的直线．任何一个实数都可以用数轴上的一个点来表示；反过来，数轴上的任何一个点都表示一个实数．也就是说，实数和数轴上的点有一一对应的关系．

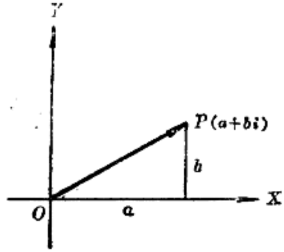

图 1-1

（2）复平面和复数在复平面上的表示　表示复数的坐标平面叫做复平面．如图 1-1 复数 $a+bi$ 和复平面上的点(a, b)是一一对应的．很明显，当 $b=0$ 时，复数 $a+bi$ 即为实数 a，它与 x 轴上的点是一一对应的；当 $a=0, b\neq 0$ 时，复数 $a+bi$ 即为纯虚数 bi，它与 y 轴上的点(不包括原点)是一一对应的．

复数 $a+bi$ 与平面上以坐标原点为起点，以点(a, b)为终点的 ④
向量是一一对应的．

3．数的绝对值

（1）实数的绝对值　$|a|=\begin{cases} a & (a\geqslant 0); \\ -a & (a<0). \end{cases}$

几何意义：在数轴上对应于实数 a 的点到原点的距离．

（2）复数的绝对值(即复数的模)$|a+bi|=r=\sqrt{a^2+b^2}$．

几何意义：对应于复数 $a+bi$ 的向量的长．

（3）数的绝对值的性质：

若 x、y 为复数，那末有

$$|x|-|y|\leqslant|x+y|\leqslant|x|+|y|;$$

$$|x|-|y|\leqslant|x-y|\leqslant|x|+|y|;$$

$$|x\cdot y|=|x|\cdot|y|;$$

$$\left|\frac{x}{y}\right|=\frac{|x|}{|y|} \qquad (y\neq 0).$$

若 x 为实数，有 $|x|^2=x^2$. 但 x 为复数 $|x|^2\neq x^2$.

4. 共轭复数

(1) 相反的数　对于实数，a 和 $-a$ 是互为相反的数.

(2) 共轭复数　对于复数，$a+bi$ 与 $a-bi$ 是互为共轭的复数.

互为共轭的复数 z 与 $\bar{z}$ 有如下的关系：

$$z+\bar{z}=2a;$$

$$z-\bar{z}=2bi;$$

$$z\cdot\bar{z}=|z|^2=|\bar{z}|^2=a^2+b^2;$$

若　$|z|=1,\quad z=\dfrac{1}{\bar{z}}$.

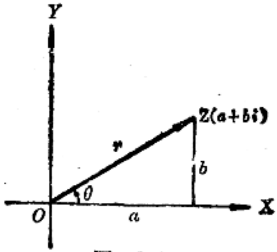

图 1-2

5. 复数的三角形式

(1) 表示法

$$a+bi=r(\cos\theta+i\sin\theta).$$

其中 θ 为实轴的正向 OX 与向量 $\overrightarrow{OZ}$ 所夹的角，叫做这个复数的幅角，r 为 $a+bi$ 的模. (图 1-2)

(2) 互化法则

① 复数的代数形式化成三角形式

由 $r=\sqrt{a^2+b^2}$ 求模；

由 $\cos\theta=\dfrac{a}{r}$ 以及 θ 角的终边所在的象限来决定幅角的主值，$0\leqslant\theta<2\pi$.

实数 a 的模数是 $|a|$，正实数的幅角主值是 0，负实数的幅角主值是 π；纯虚数 bi 的模数是 $|b|$，如 $b>0$，则 bi 的幅角主值是 $\dfrac{\pi}{2}$，如 $b<0$，则 bi 的幅角主值是 $\dfrac{3}{2}\pi$.

② 复数的三角形式化成代数形式

由 $a=r\cos\theta, b=r\sin\theta$ 求出.

6. 数的大小比较

(1) 实数可以比较大小　在数轴上两个点表示的两个实数，在右边的点表示的实数比左边的点表示的实数大.

(2) 复数不能比较大小　虚数和虚数，虚数和实数都不能比较大小.

(3) 复数相等和复数等于零的条件

① $a+bi=c+di \Longleftrightarrow a=c, b=d$;

② $a+bi=0 \Longleftrightarrow a=0, b=0$.

7. 数的运算

(1) 有理数的运算　四则运算和乘方.

(2) 实数的运算　在进行实数的四则运算和乘方时，对于无理数，一般按指定的精确度，用和它近似的有理数代替后再进行计算.

实数的开方:

① 方根　如果 $x^n=a$,(n 是大于 1 的整数)那么 x 叫做 a 的 n 次方根. 求 a 的 n 次方根的运算,叫做把 a 开 n 次方.

② 方根的性质

奇次方根的性质　在实数范围内，正数的奇次方根是一个正数,负数的奇次方根是一个负数.

偶次方根的性质　当 n 是偶数时,正数 a 的偶次方根有两个,即 $\pm\sqrt[n]{a}$;负数的偶次方根没有意义.

零的任何次方根仍是零.

③ 算术根　正数 a 的正的方根叫做算术根,用 $\sqrt[n]{a}$ 表示. 当 $n=2$ 时,$\sqrt{a}$ 表示 a 的算术平方根.

根据算术平方根的定义，可以得到一个实数的平方的算术平

方根:

$$\sqrt{a^2}=|a|=\begin{cases} a & (a\geqslant 0) \\ -a & (a<0). \end{cases}$$

④ 实数范围内的四个非负数:

若 a 为实数, 那末有

$a^{2n}\geqslant 0$, n 为自然数, 特别地 $a^2\geqslant 0$; $|a|\geqslant 0$;

当 $\sqrt[2n]{a}$ 有意义(n 为自然数) $a\geqslant 0$;

当 $\sqrt[2n]{a}$ 有意义(n 为自然数) $\sqrt[2n]{a}\geqslant 0$, 特别地 $\sqrt{a}\geqslant 0$.

(3) 复数的运算

① 复数代数形式的运算

加减法: $(a+bi)\pm(c+di)=(a\pm c)+(b\pm d)i$;

乘　法: $(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(bc+ad)i$;

除　法: $\dfrac{a+bi}{c+di}=\dfrac{ac+bd}{c^2+d^2}+\dfrac{bc-ad}{c^2+d^2}i$.

②复数三角形式的运算

乘法: $r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)\cdot r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$

$$=r_1r_2[\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)];$$

一般地, 有

$$\begin{aligned}&r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)\cdot r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)\cdot\\&\cdots\cdots r_n(\cos\theta_n+i\sin\theta_n)\\&=r_1r_2\cdots\cdots r_n[\cos(\theta_1+\theta_2+\cdots\cdots+\theta_n)\\&+i\sin(\theta_1+\theta_2+\cdots\cdots+\theta_n)].\end{aligned}$$

乘方: $[r(\cos\theta+i\sin\theta)]^n=r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)$;

除法:

$$\frac{r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)}{r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)}$$

$$=\frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1-\theta_2)+i\sin(\theta_1-\theta_2)];$$

开方: $r(\cos\theta+i\sin\theta)$的 n 次方根是

$$\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{2k\pi+\theta}{n}+i\sin\frac{2k\pi+\theta}{n}\right)$$

$$(k=0,1,\cdots\cdots,n-1).$$

③ 复数四则运算的几何意义

特别是两个复数作减法的几何意义，若 $z_1\to\overrightarrow{oz_1}$、$z_2\to\overrightarrow{oz_2}$，那末 $z_2-z_1\to\overrightarrow{oz_2}-\overrightarrow{oz_1}=\overrightarrow{z_1z_2}$，$z_1$、$z_2$ 两点间的距离 $d=|z_2-z_1|$.

④ 几个简便计算公式

$$(1\pm i)^2=\pm 2i;$$

$$\frac{1+i}{1-i}=i,\ \frac{1-i}{1+i}=-i;$$

$$\frac{1}{i}=-i;$$

若 ω_1、ω_2 为方程 $x^3=1$ 的虚根，那末

$$\omega_1^3=\omega_2^3=1,\ \omega_1^2+\omega_1+1=0,\ \omega_2^2+\omega_2+1=0,$$

$\omega_1^2=\omega_2$、$\omega_2^2=\omega_1$.

例　　题

1. 已知 a 是不为 0 的实数，计算 $\frac{\sqrt{a^2}}{5a}$.

解 $$\frac{\sqrt{a^2}}{5a}=\frac{|a|}{5a}=\begin{cases}\frac{a}{5a}=\frac{1}{5}; & (a>0)\\ \frac{-a}{5a}=-\frac{1}{5}. & (a<0)\end{cases}$$

2. 化简：

(1) $\sqrt{(x-2)^2}-\sqrt{(x+3)^2}$; $(-3<x<2)$

(2) $\sqrt{1-2\sin 36^\circ\cos 36^\circ}$;

(3) $\frac{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{\cos\alpha}$. $\left(\pi\leqslant\alpha<\frac{3}{2}\pi\right)$

解 (1) 当 $-3<x<2$ 时，

$\sqrt{(x-2)^2}-\sqrt{(x+3)^2}=-(x-2)-(x+3)$

$$=-2x-1;$$

(2) $\sqrt{1-2\sin 36^\circ\cos 36^\circ}$

$$=\sqrt{\sin^2 36^\circ-2\sin 36^\circ\cos 36^\circ+\cos^2 36^\circ}$$

$$=\sqrt{(\sin 36^\circ-\cos 36^\circ)^2}$$

$$=\sqrt{(\cos 54^\circ-\cos 36^\circ)^2}$$

$$=\cos 36^\circ-\cos 54^\circ \quad (\cos x\text{ 在第一象限递减})$$

$$=-2\sin 45^\circ\sin(-9^\circ)$$

$$=\sqrt{2}\sin 9^\circ.$$

(3) $\dfrac{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{\cos\alpha}=\dfrac{\sqrt{\cos^2\alpha}}{\cos\alpha}=\dfrac{|\cos\alpha|}{\cos\alpha}$

$$=\frac{-\cos\alpha}{\cos\alpha}=-1.\left(\because\ \ \pi\leqslant\alpha<\frac{3\pi}{2},\ \therefore\ \ |\cos\alpha|=-\cos\alpha\right)$$

3. 当m为什么实数时，$(m^2-3m)+(2m^2-5m-3)i$ 为

(1) 实数；(2) 虚数；(3) 纯虚数；(4) 零。

解 $\because\ \ (m^2-3m)+(2m^2-5m-3)i$

$$=m(m-3)+(m-3)(2m+1)i,$$

$\therefore$ (1) 当 $m=3$ 或 $m=-\dfrac{1}{2}$时，它是实数；

(2) 当 $m\neq 3$ 且 $m\neq-\dfrac{1}{2}$时，它是虚数；

(3) 当 $m=0$ 时，它是纯虚数；

(4) 当 $m=3$ 时，它是零。

4. 化简：$\left(\dfrac{\sqrt{2}}{1+i}\right)^{2584}$.

解 $\because\ \ (1+i)^2=2i,$

$$\therefore\ \ \left(\frac{\sqrt{2}}{1+i}\right)^{2584}=\left(\frac{2}{2i}\right)^{1292}=\left(\frac{1}{i}\right)^{1292}$$

$$=(-i)^{1292}=i^{1292}=(-1)^{646}=1.$$

5. 如果$(x+y)^2 i-\frac{6}{i}-x=-y+5i(x+y)-1$，求$x$、$y$的实数值.

解 原式变成 $-x+[(x+y)^2+6]i=-y-1+5(x+y)i$ 使实部和虚部的系数分别对应相等,得方程组

$$\begin{cases}(x+y)^2+6=5(x+y), & (1)\\ x=y+1. & (2)\end{cases}$$

从(1),得$(x+y-2)(x+y-3)=0$,

$\therefore \quad x+y=2, x+y=3.$

解方程组

I. $\begin{cases}x-y=1,\\ x+y=2;\end{cases}$ II. $\begin{cases}x-y=1,\\ x+y=3.\end{cases}$

由I、II,得

$$\begin{cases}x=\frac{3}{2},\\ y=\frac{1}{2};\end{cases} \qquad \begin{cases}x=2,\\ y=1.\end{cases}$$

6. 化复数 $1+\cos\varphi+i\sin\varphi$ 为三角形式. $\left(0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$

解 令 $a=1+\cos\varphi, b=\sin\varphi$, $0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}$, $\therefore \quad a>0, b>0$.

又$\because \quad r^2=a^2+b^2=(1+\cos\varphi)^2+\sin^2\varphi=2(1+\cos\varphi)$

$$=\left(2\cos\frac{\varphi}{2}\right)^2,$$

$$r=\sqrt{\left(2\cos\frac{\varphi}{2}\right)^2}=2\cos\frac{\varphi}{2}.\left(\because \quad \cos\frac{\varphi}{2}>0\right)$$

由于,

$$\cos\theta=\frac{a}{r}=\frac{1+\cos\varphi}{2\cos\frac{\varphi}{2}}=\cos\frac{\varphi}{2}>0,$$

$$\sin\theta=\frac{b}{r}=\frac{\sin\varphi}{2\cos\frac{\varphi}{2}}=\sin\frac{\varphi}{2}>0,$$

$\because$ θ 在第一象限，并且有 $\theta=\frac{\varphi}{2}$，

$\therefore$ $1+\cos\varphi+i\sin\varphi=2\cos\frac{\varphi}{2}\left(\cos\frac{\varphi}{2}+i\sin\frac{\varphi}{2}\right).$

7. 已知复数 $x(\neq\pm i)$ 的模是 1，求证复数 $\frac{x}{1+x^2}$ 是一个实数.

证明 设 $x=a+bi$，(a,b 为实数，且 $a\neq 0$)

则 $a^2+b^2=1$，

$$x^2=a^2-b^2+2abi=2a^2-1+2abi,$$

$\therefore$ $\frac{x}{1+x^2}=\frac{a+bi}{2a^2+2abi}=\frac{1}{2a}.$

$\because$ a 是实数，且 $a\neq 0$，

$\therefore$ $\frac{x}{1+x^2}$ 是一个实数.

8. x、y 为复数，求证:

$$|x+y|^2+|x-y|^2=2|x|^2+2|y|^2.$$

证明 设 $x=a+bi, y=c+di$，

则 $|x|=\sqrt{a^2+b^2}, |y|=\sqrt{c^2+d^2}$.

$|x+y|=|(a+c)+(b+d)i|=\sqrt{(a+c)^2+(b+d)^2}$，

$|x-y|=|(a-c)+(b-d)i|=\sqrt{(a-c)^2+(b-d)^2}$.

$\therefore$ $|x+y|^2+|x-y|^2=(a+c)^2+(b+d)^2+(a-c)^2$
$+(b-d)^2$
$=2(a^2+b^2)+2(c^2+d^2)=2|x|^2+2|y|^2.$

9. 已知 $x+\frac{1}{x}=2\cos\theta$，求证:

$$x^m+\frac{1}{x^m}=2\cos m\theta.$$

证明 $\because \quad x+\frac{1}{x}=2\cos\theta,$

$\therefore \quad x^2-2\cos\theta\cdot x+1=0.$

$\therefore \quad x=\frac{2\cos\theta\pm\sqrt{4\cos^2\theta-4}}{2}$

$$=\frac{2\cos\theta\pm 2i\sin\theta}{2}=\cos\theta\pm i\sin\theta.$$

由 $\quad x=\cos\theta\pm i\sin\theta$, 得

$$x^m=\cos m\theta\pm i\sin m\theta,$$

$$\frac{1}{x^m}=\cos m\theta\mp i\sin m\theta.$$

$\therefore \quad x^m+\frac{1}{x^m}=2\cos m\theta.$

10. 在直角坐标系里有两个点 z_1 和 z_2, 它们所表示的复数分别是 1 和 $2+i$, 以这两个点为顶点, 在第一象限内作一个正三角形, 求这正三角形第三个顶点所表示的复数.

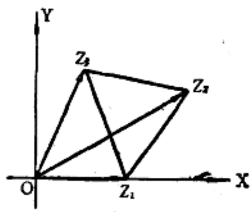

图 1-3

解 如图 1-3, $\because \quad \overrightarrow{oz_1}\to 1$

$$\overrightarrow{oz_2}\to 2+i$$

$\therefore \quad \overrightarrow{z_1z_2}=\overrightarrow{oz_2}-\overrightarrow{oz_1}\to 2+i-1=1+i$

又$\because$ 向量 $\overrightarrow{z_1z_2}$ 按反时针方向旋转 $\frac{\pi}{3}$ 得到 $\overrightarrow{z_1z_3}$,

$\therefore \quad \overrightarrow{z_1z_3}\to(1+i)\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1-\sqrt{3}}{2}+\frac{1+\sqrt{3}}{2}i,$

$\because \quad \overrightarrow{oz_3}=\overrightarrow{oz_1}+\overrightarrow{z_1z_3},$

$\therefore \quad \overrightarrow{oz_3}\to 1+\frac{1-\sqrt{3}}{2}+\frac{1+\sqrt{3}}{2}i=\frac{3-\sqrt{3}}{2}+\frac{1+\sqrt{3}}{2}i.$

$\therefore$ 在第一象限内, 正三角形第三个顶点所表示的复数为

$$\frac{3-\sqrt{3}}{2}+\frac{1+\sqrt{3}}{2}i.$$

11. 利用复数方法证明：已知正方形 $OBCD$，如图 1-4，E 是 CD 中点，F 是 CE 中点，求证：$\angle DOE=\frac{1}{2}\angle BOF$.

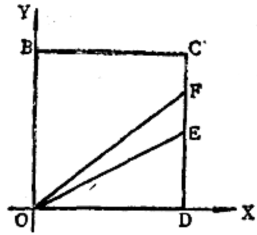

图 1-4

证明 令正方形边长为 a,

$\therefore\quad \overrightarrow{OD}\to a,\ \overrightarrow{OE}\to a+\frac{1}{2}ai,\ \overrightarrow{OF}\to a+\frac{3}{4}ai,\ \overrightarrow{OB}\to ai.$

$\because\quad \angle DOE$ 等于 $\overrightarrow{OD}$ 与 $\overrightarrow{OE}$ 的夹角，等于 $\dfrac{a+\frac{1}{2}ai}{a}$ 的幅角的主值．即 $1+\frac{1}{2}i$ 的幅角的主值．

$\therefore\quad 2\angle DOE$ 等于 $\left(1+\frac{1}{2}i\right)^2=\frac{3}{4}+i$ 的幅角的主值．

同理，$\angle BOF$ 等于 $\dfrac{ai}{a+\frac{3}{4}ai}$ 的幅角的主值，即等于 $\frac{16}{25}\left(\frac{3}{4}+i\right)$ 的幅角的主值．

显然，$\frac{3}{4}+i$ 与 $\frac{16}{25}\left(\frac{3}{4}+i\right)$ 的幅角主值相等．

$\therefore\quad 2\angle DOE=\angle BOF$，即 $\angle DOE=\frac{1}{2}\angle BOF$.

习 题 一

1. 指出下列各数哪些是有理数，哪些是无理数，哪些是虚数：

$-\frac{1}{2}$；$\sqrt{7}$；3.1416；π；$\sqrt[3]{-2}$；-9 的平方根；3.125；

$\lg 2$; $\cos\frac{\pi}{4}$; $\cos 120^\circ$的平方根; $\sqrt{2}-1$; $\sqrt{169}+12$;

1.010010001; $3.232232223\cdots\cdots$.

2. 若$(x-2)^2+(y+3)^2=0$, x、y为实数,求x、y.

3. 若$a^2+4a+4+b^2-6b+9=0$, a, b为实数,求a, b.

4. 有没有满足下列条件的实数?

(1) $x^2+y^2+1=0$;

(2) $x^2+y^2-2x+6y+11=0$.

5. 比较大小:

(1) 3.16与$\sqrt{10}$;　　(2) 3.1416与π;

(3) $\sqrt[4]{4}$与$\sqrt[6]{\frac{6^3}{8^2}}$;　　(4) $\sqrt{3}+\sqrt{7}$与$\sqrt{2}+\sqrt{8}$.

6. 对于任何实数x, $|x-5|=x-5$总能成立吗?为什么?

7. 已知$|m|=|n|$,能断定$m=n$吗?为什么?

已知$|m|>|n|$,能断定$m>n$吗?为什么?

8. 化简下列各式:

(1) $\frac{x}{\sqrt{x^2}}$; $(x<0)$

(2) $\sqrt{x^2-4x+4}$; $(x\leqslant 2)$

(3) $\sqrt{(x-1)^2}+\sqrt{(x+1)^2}$; $(-1\leqslant x\leqslant 1)$

(4) $\sqrt{\lg^2 5-\lg 25+1}$;

(5) $\sqrt{1-2\sin 25^\circ\cos 25^\circ}$;

(6) $\frac{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\sin\alpha}$; $(270^\circ<\alpha<360^\circ)$

(7) $|2y-1|-\sqrt{y^2-2y+1}$.

$\left(其中\ y<\sqrt{x-1}+\sqrt{1-x}+\frac{1}{2}\right)$