初中代数第一册

教材参考资料

杨大淳　刘培娜
编
王锦初　史炳星

河北人民出版社

初中代数第一册

教 材 参 考 资 料

杨大淳　刘培娜
　　　　　　　　　　编
王锦初　史炳星

河 北 人 民 出 版 社

初中代数第一册

教材参考资料

杨大淳　刘培娜
王锦初　史炳星　编

河北人民出版社出版（石家庄市北马路45号）

河北新华印刷一厂印刷　河北省新华书店发行

787×1092毫米 1/32 2.025 印张 51,000 字　印数：1—57,000　1984年4月第1版

1984年4月第1次印刷　统一书号：7086·1153　定价：0.26 元

前　　言

深刻地领会教材，是讲好每一节课的前提。为此，我们根据人民教育出版社编写的中学数学课本（以下简称课本），编写了这套有关教材内容的参考资料。(本书是根据1983年4月出版的初级中学数学课本代数第一册第一版编写)

本资料是按照课本中的内容分章编写的。对于课本中的概念、公理、定理、公式、方法、法则等作了一些分析。目的是帮助教师领会教材的编写意图，更好地理解和掌握教材。在分析过程中，有的部分比教材所要求的程度略高一些，这些内容仅供教师参考，但不作教学内容。

限于我们的水平，本资料会有不足之处，欢迎老师们提出宝贵的意见。

编者

1983.9

目　　录

第一章　有　理　数

一、相反意义的量

在周围世界中存在着各种不同的量，例如，重量、容量、产量等等。

不同的量都有一个共同的属性，就是它们都可以各自选出各自的同类量作为一个单位度量该量的大小．凡是量都能够用数表示，这个数就是表示一个量和度量单位的比的比值，这个值叫做该量的数值（或量数）．

在各种不同的量中，有的量只具有一种方向，如，容积、产量等．还有的量具有不同的方向，如，温度是具有相反方向的量，又如，在平面上以一点为起点的不同方向的力等．

二、有理数

在初中代数课本第一册里*，规定了如下的有理数的定义．

定义　整数和分数统称为有理数．

我们可以考虑，定义中的整数指的是

$$0,\ \pm1,\ \pm2,\ \pm3,\ \pm4,\ \pm5,\ \cdots\cdots \qquad (1)$$

---

* 以下简称课本．

定义中的分数指的是

$$\pm\frac{1}{2},\ \pm\frac{1}{3},\ \pm\frac{2}{3},\ \pm\frac{3}{2},\ \pm\frac{1}{4},\ \pm\frac{3}{4},\ \pm\frac{4}{3},\ \cdots\cdots \quad (2)$$

事实上，还有如下形式的分数

$$\pm\frac{1}{1},\ \pm\frac{2}{2},\ \pm\frac{3}{3},\ \cdots,\ \pm\frac{2}{1},\ \pm\frac{4}{2},\ \pm\frac{6}{3},$$

$$\cdots,\ \pm\frac{3}{1},\ \pm\frac{6}{2},\ \pm\frac{9}{3},\ \cdots\cdots \quad (3)$$

$$\pm\frac{2}{4},\ \pm\frac{3}{6},\ \cdots,\ \pm\frac{2}{6},\ \pm\frac{3}{9},\ \cdots,$$

$$\pm\frac{4}{6},\ \pm\frac{6}{9},\ \cdots,\ \pm\frac{6}{4},\ \pm\frac{9}{6},\ \cdots\cdots \quad (4)$$

从形式上看，序列(3)中的数都是分数，它们应该属于上述有理数的定义中所指的分数之内，但是，事实上它们都是整数，因此，我们应该有以下的理解：

在有理数的这个定义里的分数指的是序列(2)中的数（可以把这样的数称为纯分数），而序列(4)中的分数都分别与序列(2)中相应的分数相同．

在这个定义里的整数指的是序列(1)中的数．序列(3)中的数，从形式上看它们是分数，但实际是整数，而且它们分别与序列(1)中相应的数（除去零以外）相同．

有理数的定义，是根据有理数概念的外延来规定的．也就是说，用有理数这个概念所包括的一切对象（整数和分数）来规定有理数的定义．

还可以用有理数概念的内涵来规定有理数的定义．也就是说，用有理数这个概念的本质属性来规定有理数的定义．

定义 能用两个整数的比表示的数叫做有理数.

在这个定义中,"两个整数的比"中比的后项不能是零,不然的话,就失去了意义.

一个最简分数(既约分数)能化为有限小数(十进小数)的充要条件是这个分数的分母除去2和5外不再有其他质因数.即凡符合这个条件的分数都能化为十进小数,凡不符合这个条件的分数都不能化为十进小数.

现在选取既约分数$\frac{a}{b}$,分母b有2和5以外的质因数,为了方便起见,用10乘a,再用b除$10a$,得$10a=q_1b+r_1$(这里q_1是用b除$10a$的商,r_1是余数,$r_1<b$).再继续用b除$10r_1$,……,我们有

$$
\begin{aligned}
10a &= q_1b+r_1,\\
10r_1 &= q_2b+r_2,\\
10r_2 &= q_3b+r_3,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}
$$

这里,r_i($i=1,2,3,\cdots\cdots$)不会是零,不然的话,$\frac{a}{b}$将化为有限小数,而且$r_i<b$.

因为$r_i<b$,所以最多有$(b-1)$个余数是不同的.即r_b必然与r_1,r_2,r_3,……,r_{b-1}中的一个$r_j(j=1,2,3,\cdots\cdots,b-1)$相同.也就是说,用$b$除$10r_b$所得的商$q_{b+1}$必与用$b$除$r_j$的商$q_{j+1}$相同,即

$$q_{b+1}=q_{j+1},$$

并且余数也相同,即

$$r_{b+1}=r_{j+1}.$$

再用 b 除 $10r_{b+1}$ 得商 q_{b+2} 和余数 r_{b+2}，它们必分别与用 b 除 r_{j+1} 所得的商 q_{j+2} 和余数 r_{j+2} 相同。即

$$q_{b+2}=q_{j+2},$$

$$r_{b+2}=r_{j+2}.$$

再继续除下去，除得的商和余数将循环出现，且无止境。

因此，用b除a的结果是一个无限循环小数。

例如

$$\frac{1}{7}=0.142857142857\cdots\cdots=0.\dot{1}4285\dot{7}.$$

又根据无穷数列

$$a,\ aq,\ aq^2,\ \cdots\cdots(|q|<1)$$

所有项和的公式

$$S=\frac{a}{1-q},$$

可以把无限循环小数化为分数。

例如，就无限循环小数中$0.\dot{1}\dot{4}$来说，

$$0.\dot{1}\dot{4}=\frac{14}{100}+\frac{14}{10000}+\frac{14}{1000000}+\cdots\cdots$$

$$=\frac{\frac{14}{100}}{1-\frac{1}{100}}$$

$$=\frac{14}{99}.$$

还可以把整数和有限小数也看作无限循环小数。

例如，把 9 可以看作$9.\dot{0}$或$8.\dot{9}$；0.725 可以看作 $0.725\dot{0}$或$0.724\dot{9}$。

现在，可以知道任何整数和分数都可以化为无限循环小数，而无限循环小数都可以化为整数或分数。因此，我们还可以规定如下的有理数的定义。

定义 无限循环小数叫做有理数。

有理数是指能够表示两个整数的比的数。

有理数是稠密的。

这可以根据有理数对于加、减、乘、除（除数不得为零）四种运算都可以施行加以证明。我们可以任意选取两个有理数 a 和 $b(a<b)$，取 a 和b 的算术平均数 $m_1=\frac{a+b}{2}$， 可以知道 $a<m_1<b$。再取 a 和 m_1 的算术平均数 $m_2=\frac{a+m_1}{2}$，这里 $a<m_2<m_1$。继续作下去，可以得到a和 m_2 的算术平均数 m_3，这里 $a<m_3<m_2$。如此继续下去可以找到无穷多个有理数比 a 大而比 b 小。因此有理数是稠密的。

有理数系是可列的（或可数的）。

所谓一个数系是可列的，就是说这个数系能够与自然数系一一对应。也就是说，存在一个排列方法能够把这个数系编成序列

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots\cdots,\ a_n\cdots\cdots;$$

例如，有理数系可以如下排列

$$0,\ \frac{1}{1},\ -\frac{1}{1},\ \frac{1}{2},\ -\frac{1}{2},\ \frac{2}{1},\ -\frac{2}{1},\ \frac{1}{3},\ -\frac{1}{3},\ \frac{3}{1},$$

$-\frac{3}{1}$, $\frac{1}{4}$, $-\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $-\frac{1}{5}$, ……

也可以排成一个方阵形式

$$
\begin{array}{l}
\cdots\cdots,\ -\frac{4}{1},\ -\frac{3}{1},\ -\frac{2}{1},\ -\frac{1}{1},\ \frac{0}{1},\ \frac{1}{1},\ \frac{2}{1},\ \frac{3}{1},\ \frac{4}{1},\cdots\cdots \\
\cdots\cdots,\ -\frac{4}{2},\ -\frac{3}{2},\ -\frac{2}{2},\ -\frac{1}{2},\ \frac{0}{2},\ \frac{1}{2},\ \frac{2}{2},\ \frac{3}{2},\ \frac{4}{2},\cdots\cdots \\
\cdots\cdots,\ -\frac{4}{3},\ -\frac{3}{3},\ -\frac{2}{3},\ -\frac{1}{3},\ \frac{0}{3},\ \frac{1}{3},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{3},\ \frac{4}{3},\cdots\cdots \\
\cdots\cdots,\ -\frac{4}{4},\ -\frac{3}{4},\ -\frac{2}{4},\ -\frac{1}{4},\ \frac{0}{4},\ \frac{1}{4},\ \frac{2}{4},\ \frac{3}{4},\ \frac{4}{4},\cdots\cdots \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{array}
$$

三、数轴

数轴是实数轴．数轴的长是无限的，可以用数轴上的点表示有理数．表示整数 a 的点 A 是数轴上到原点的距离等于 $|a|$ 处的点．规定 $a>0$ 时，点 A 在原点的右边，$a<0$ 时，A 点在原点的左边．表示真分数的点可以利用把一条线段等分的作图方法，将长度单位等分，等分的份数等于这个真分数的分母，这个真分数的分子是多少就取多少个等份，于是可以找到这个真分数所对应的点．例如，就分数 $\frac{2}{7}$ 来说，把长度单位分为七等份，取其中的两等份，然后，在原点 O 的右边，以 O 为起点在数轴上截取线段 OB，使它的长为单位线段的七等份的两份，点 B 就表示 $\frac{2}{7}$．至于表示带分数的点可以类似

地作出．这只是从理论上说应该这样作出点，当然实际作法可以从简．

由于有理数是稠密的，把全体有理数用数轴上的点表示，这些点将密密麻麻地排在数轴上，但是，它们并不能布满整个数轴，而是处处有空隙．

例如，$\sqrt{2}$不是有理数．我们可以用数轴上的点表示$\sqrt{2}$．在原点的右边作正方形（如图1），它的边长为1，对角线长为$\sqrt{2}$．以O为圆心，对角线长为半径作弧交OX于A点；A点就表示$\sqrt{2}$．

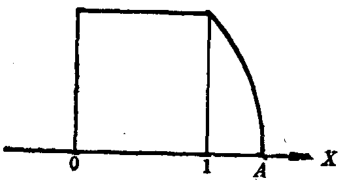

图1

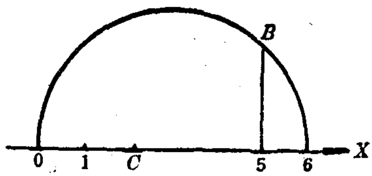

图2

又如，$\sqrt{5}$也不是有理数．我们可在原点O右边的正半轴上，以O为起点取6个单位长，然后以点O为端点6个单位长的线段为直径作半圆（如图2），然后在表示5的点处作OX的垂线与半圆交于点B，这个半弦的长为$\sqrt{5}$．于是以O为圆心，以半弦为半径在点O的右方截取OC等于该半弦长，点C就表示$\sqrt{5}$．当然在数轴上用一个点表示某数时，只是近似地描出即可．

由以上的讨论可以知道，对于任何一个有理数，数轴上都有唯一的点与它对应，这样的点叫做有理点．但是，数轴上的任一点并不是一定存在一个有理数与这个点相对应．所

以我们说：有理数与数轴上的点不是一一对应的。

四、有理数大小的比较

课本第一章给出有理数大小比较的规定如下：

定义 在数轴上表示的两个有理数，右边的数总比左边的数大。

然后又通过一些具体例子的讨论，给出比较两个有理数大小的法则如下：

关于有理数大小的比较，我们有：

1．正数都大于零；

2．负数都小于零；

3．正数大于一切负数；

4．两个负数，绝对值大的反而小。

以上几点可根据定义证明如下：

证明 因为任何正有理点都在原点的右边，任何负有理点都在原点的左边，设a与b为任意两个正数，那么就有

1．a所对应的点在原点的右边，所以$a>0$，即正数都大于零；

2．$-a$所对应的点在原点的左边，所以$-a<0$，即负数都小于零；

3．因为a所对应的点在原点右边，也在$-b$所对应的点的右边，所以$a>-b$，即正数大于一切负数；

4．如果$|-a|\neq|-b|$，且$|-a|>|-b|$，那么$-a$与$-b$所对应的点都在原点的左边，因而$-a$所对应的点A与原点的距离大于$-b$所对应的点B与原点的距离，因此点A在

点 B 的左边，所以 $-a<-b$，即两个负数，绝对值大的反而小。

利用数轴来规定有理数的大小比较直观，便于学生接受，但在证明以上法则时，将借用许多有关几何的知识，因此从理论上讲是不够严密的，考虑到初中学生的接受能力以及对初中教材的严密性不应作过分的要求，这样安排还是较好的。

根据数集扩张的原则，讨论有理数的大小关系，必须符合以下要求：

1．有理数集里的非负有理数的大小顺序关系在算术数集里已经作的规定，这里仍应保持有效；

2．有理数集里的大小顺序关系和算术数集一样满足以下基本顺序律：

(1)三歧律

对于任意两个有理数必有而且仅有三种关系 $a>b$，$a=b$，$a<b$。之一成立。

(2)反射律

对于任意数 a 都有 $a=a$。

(3)相等的传递律

如果 $a=b$，$b=c$，那么 $a=c$。

(4)不等的传递律

如果 $a>b$，$b>c$，那么 $a>c$。

(5)对逆律

如果 $a>b$，那么 $b<a$；如果 $a<b$，那么 $b>a$。

凡是符合以上要求的数集叫做有序集，我们讨论有理数

的大小比较，就是要给出符合以上要求的定义，并能加以应用。

舍去几何形象，用语言叙述有理数大小的比较如下：

相等定义　两个有理数的符号相同且绝对值相等，叫做相等的两个有理数。

不等定义

两个正数中，绝对值大的数大于绝对值小的数；

每个负数都小于零，并且小于任意正数；

每个正数和零都大于负数；

两个负数中，绝对值大的数反而小。

五、有理数的运算

1．有理数加法的定义

（1）符号相同的两个有理数相加，和的符号与加数的符号相同，和的绝对值等于两个加数绝对值的和；

（2）符号不同的两个有理数相加，和的符号与绝对值较大的数的符号相同，和的绝对值等于两个加数的绝对值的差的绝对值；

（3）一个有理数与零相加的和仍是这个有理数。

2．有理数减法的定义

如果有理数 x 满足 $x+b=a$（a 和 b 都是有理数），那么 x 叫做有理数 a 减去有理数 b 的差。记作 $x=a-b$。

有理数的减法是有理数加法的逆运算。

3．有理数乘法的定义

（1）符号相同的两个有理数相乘，积的符号为正，积的

绝对值等于两个乘数绝对值的积；

（2）符号不同的两个有理数相乘，积的符号为负，积的绝对值等于两个乘数绝对值的积；

（3）零与任何有理数相乘的积都是零。

4．有理数除法的定义

如果有理数 x 满足 $bx=a$（a和 b 都是有理数，且$b\neq 0$），那么 x 叫做有理数 a 除以有理数 b 的商。记作$x=\frac{a}{b}$。

有理数的除法是有理数乘法的逆运算。

零不能作除数。即在

$$a\div b=\frac{a}{b}$$

中，b 不能是零。

如果$a\neq 0$，$b=0$，假使

$$\frac{a}{0}=c,$$

这样有 $0\cdot c=0$，而 $a\neq 0$，，所以产生矛盾。

如果 $a=0$，$b=0$，假使

$$\frac{0}{0}=c,$$

这样有 $0\cdot c=0$，而 c 可为任意有理数，于是 $0\div 0$ 的结果不定，也就是结果不唯一。

由以上两点可知零不能作除数。

由有理数四则运算的定义可以知道：任何两个有理数的和、差、积、商（除数不得为零）仍为有理数。于是我们说在有理数集合里，有理数的四则运算是可以施行的。