教育部高职高专规划教材

# 高等应用数学习题课指导

阎章杭 贾兴民 白水周 主编



化学工业出版社
教材出版中心

教育部高职高专规划教材

# 高等应用数学习题课指导

阎章杭　贾兴民　白水周　主编

化学工业出版社
教材出版中心
·北京·

（京）新登字 039 号

**图书在版编目（CIP）数据**

高等应用数学习题课指导/阎章杭，贾兴民，白水周主编．—北京：化学工业出版社，2005.4
教育部高职高专规划教材
ISBN 7-5025-6809-3

Ⅰ．高…　Ⅱ．①阎…②贾…③白…　Ⅲ．应用数学-高等学校：技术学院-解题　Ⅳ．O29-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 023368 号

---

教育部高职高专规划教材
**高等应用数学习题课指导**
阎章杭　贾兴民　白水周　主编
责任编辑：高　钰
责任校对：边　涛
封面设计：郑小红

*

化学工业出版社
教材出版中心　出版发行
（北京市朝阳区惠新里 3 号　邮政编码 100029）
发行电话：(010)64982530
http://www.cip.com.cn

*

新华书店北京发行所经销
北京市彩桥印刷厂印刷
三河市前程装订厂装订
开本 787mm×1092mm　1/16　印张 11¾　字数 282 千字
2005 年 5 月第 1 版　　2005 年 5 月北京第 1 次印刷
ISBN 7-5025-6809-3/G·1744
定　价：17.00 元

---

# 出版说明

高职高专教材建设工作是整个高职高专教学工作中的重要组成部分。改革开放以来，在各级教育行政部门、有关学校和出版社的共同努力下，各地先后出版了一些高职高专教育教材。但从整体上看，具有高职高专教育特色的教材极其匮乏，不少院校尚在借用本科或中专教材，教材建设落后于高职高专教育的发展需要。为此，1999年教育部组织制定了《高职高专教育专门课课程基本要求》（以下简称《基本要求》）和《高职高专教育专业人才培养目标及规格》（以下简称《培养规格》），通过推荐、招标及遴选，组织了一批学术水平高、教学经验丰富、实践能力强的教师，成立了“教育部高职高专规划教材”编写队伍，并在有关出版社的积极配合下，推出一批“教育部高职高专规划教材”。

“教育部高职高专规划教材”计划出版500种，用5年左右时间完成。这500种教材中，专门课（专业基础课、专业理论与专业能力课）教材将占很高的比例。专门课教材建设在很大程度上影响着高职高专教学质量。专门课教材是按照《培养规格》的要求，在对有关专业的人才培养模式和教学内容体系改革进行充分调查研究和论证的基础上，充分吸取高职、高专和成人高等学校在探索培养技术应用型专门人才方面取得的成功经验和教学成果编写而成的。这套教材充分体现了高等职业教育的应用特色和能力本位，调整了新世纪人才必须具备的文化基础和技术基础，突出了人才的创新素质和创新能力的培养。在有关课程开发委员会组织下，专门课教材建设得到了举办高职高专教育的广大院校的积极支持。我们计划先用2～3年的时间，在继承原有高职高专和成人高等学校教材建设成果的基础上，充分汲取近几年来各类学校在探索培养技术应用性专门人才方面取得的成功经验，解决新形势下高职高专教育教材的有无问题；然后再用2～3年的时间，在《新世纪高职高专教育人才培养模式和教学内容体系改革与建设项目计划》立项研究的基础上，通过研究、改革和建设，推出一大批教育部高职高专规划教材，从而形成优化配套的高职高专教育教材体系。

本套教材适用于各级各类举办高职高专教育的院校使用。希望各用书学校积极选用这批经过系统论证、严格审查、正式出版的规划教材，并组织本校教师以对事业的责任感对教材教学开展研究工作，不断推动规划教材建设工作的发展与提高。

教育部高等教育司

2001年4月3日

# 前　言

当前，我国高职高专教育成为社会关注的热点，面临很好的发展机遇。同时，国家的经济、科技和社会发展也对高职高专教育人才的培养提出了许多更高要求。然而，随着我国高职高专教育的深入发展，改革的力度加大（如高职的学制逐步由“三年制”改为“二年制”），教学的内容与学时数已经或者将要逐步压缩。为了适应这种新形势发展的需要，为了进一步推动全国的高职高专教材的改革，开封大学、河南大学、洛阳大学、北京工业职业技术学院、包头职业技术学院、石家庄职业技术学院、漯河职业技术学院、南阳理工学院、商丘职业技术学院、三门峡职业技术学院、徐州建筑职业技术学院、天津渤海职业技术学院、石家庄铁路职业技术学院、黄河水利职业技术学院、吉林交通职业技术学院、无锡职业技术学院、邵阳职业技术学院、漳州职业技术学院、济源职业技术学院、鹤壁职业技术学院、雅安职业技术学院等院校的优秀教师和专家，经过长时间的酝酿和研究，于近两年联合编写并成功出版了四套教材《高等数学与工程数学》，《高等数学与经济数学》，《应用数学基础》（上）、（下）。现在我们又针对当前教学改革的新形势，认真整理改编出两套新教材——《高等数学》、《高等应用数学》，从而形成了一套完整的大学数学系列教材。该系列教材涵盖了高职高专三年制、两年制、五年制各工程类、经济类、管理类专业大学数学的教学内容。

为了使该系列教材更上一个台阶和层次，我们还将该系列教材进一步完善成为“立体化教材”。除了出版了每套教材的辅助教材——习题课指导外，还编写出版了该系列教材的电子教案，同时还建有专门的网站，提供相应的网上服务。

本书是《高等应用数学》的配套教材，其内容包括：每章内容小结、常见问题分类及解题方法、典型习题解答与提示、自我测验（备选习题），其中带“*”部分为选学内容。

本教材针对当前高职高专学生普遍存在的数学基础差、课程难学、规律难寻、习题难做、表述难全等问题，对主教材的每一章，从学习内容、学习方法到习题解答都进行了系统的、科学的编排，特别注意培养学生自学能力和运用数学知识解决实际问题的能力。该书内容为主教材的习题课提供了充实的资料和素材，大大方便了教师的备课及学生的学习。

为了便于阅读，本书在章节顺序和内容叙述、解题方法、符号标志等方面都与主教材保持一致，每一章编排结构如下：

1. 每章内容小结：首先对该章内容进行归纳提炼，必要时列表给出，帮助读者了解该章的概貌，然后指出重点、难点，使读者心中有数，把握学习的主动权。另外，针对初学者容易出现的问题，提出学习建议和注意事项，提高学习效果。

2. 常见问题分类及解法：根据每一章常见问题进行分类，总结每一类习题常见的解题方法和解题技巧，并通过典型例题给出示范、分析、归纳。提倡一题多解和与实际应用相结合。

3. 典型习题解答与提示：考虑到高职高专学生的特点，本书给出了主册各章节练习题、复习题的答案、提示或详细解答，其中基本题（约占总练习题的1/3）仅给出答案，对难度较大的题或提高题则给出提示或详细解答。

4. 自我测验（备选习题）：考虑到不同的学生类型、不同的专业对习题的要求不一样，

因而又附加了一部分习题，以供选择或作为学生自我检测用题，此部分习题仅给出答案，而不做详细解答。

该书由阎章杭担任总策划、负责组织实施。

主　编：阎章杭　贾兴民　白水周

副主编：韩成标　农家琦　王　霞

参加本书编审工作的有（按章节顺序排名）

第一篇：拜云胜　辛自力　白景华　农家琦　郭建萍　韩成标

第二篇：阎章杭　辛自力　祁建华

第三篇：杨　明　王　霞　路世英

第四篇：贾兴民　张振山　白水周

在本书编写过程中，曾得到有关学校领导、系部领导和有关专家的大力支持和帮助，杜跃鹏老师积极参与了利用 Mathematic 软件进行数学实验内容的编写，河南大学教授、专家阎育华、王国胜曾对本书进行了认真的审核，并提出许多宝贵的建议，在此一并表示衷心的谢意！

由于编写水平有限，错误和不当之处在所难免，恳请广大读者批评指正！

数学系列规划教材编委会

# 内 容 提 要

本书属立体化教材《高等应用数学》的配套辅助教材．本书的主要内容有：每章内容小结、常见问题分类及解法、典型习题解答与提示以及自我测验．

本书在章节顺序、内容叙述、解题方法、符号标志等方面都与主教材保持一致．其内容为该门课程的习题课提供了充实的资料和素材，大大方便了教师的备课及学生的学习．

本书可作为三年制或二年制高职高专院校、成人高校、本科院校开办的二级院校工程类或财经、管理类相关专业的学生学习《高等应用数学》课程的配套教材．另外，对工程技术人员、经济管理人员也有较高的参考价值．

# 目　　录

## 第一篇　一元函数微积分学



## 第二篇　多元函数微积分学初步

## 第三篇　概率论与数理统计基础



## 第四篇　线性代数基础

# 第一篇　一元函数微积分学

## 第一章　函数、极限与连续

### 第一节　本章内容小结

#### 一、本章的主要内容

函数的定义；函数的几种特性；复合函数、反函数与初等函数的概念；数列与函数极限的定义；极限的运算法则；无穷小与无穷大的概念；两个重要极限；无穷小的比较；函数在点与区间的连续性及间断性；闭区间上连续函数的性质．

#### 二、几个常用的基本极限

(1) $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} c=c$，($c$ 为常数)；　　(2) $\lim\limits_{x\to x_0} x=x_0$；

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$；　　(4) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^\alpha}=0$，($\alpha$ 为正的常数)；

(5) $$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots+a_m}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+\cdots+b_n}=\begin{cases}\dfrac{a_0}{b_0}, & \text{当 } n=m\\ 0, & \text{当 } n>m\\ \infty, & \text{当 } n<m\end{cases}$$

(其中 $a_0,a_1,\cdots,a_m$ 和 $b_0,b_1,\cdots,b_n$ 都是常数，且 $a_0\neq0$，$b_0\neq0$)；

(6) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=1$；　　(7) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x}{x}=1$；　　(8) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$；

(9) $\lim\limits_{t\to0}(1+t)^{\frac{1}{t}}=\mathrm{e}$；　　(10) $\lim\limits_{x\to+\infty} q^x=0$ ($|q|<1$).

#### 三、几个充要条件

(1) $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} f(x)=A\Leftrightarrow f(x)=A+\alpha$ $\left[\text{当} \begin{matrix}x\to x_0\\(x\to\infty)\end{matrix} \text{时 } \alpha\to0\right]$；

(2) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=A$；

(3) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=A$；

(4) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to x_0-0}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0+0}f(x)=f(x_0)$.

## 四、图 1-1 给出了当 $x\to\infty$ 和 $x\to x_0$ 时函数的极限与由此引申出来的有关概念之间的关系

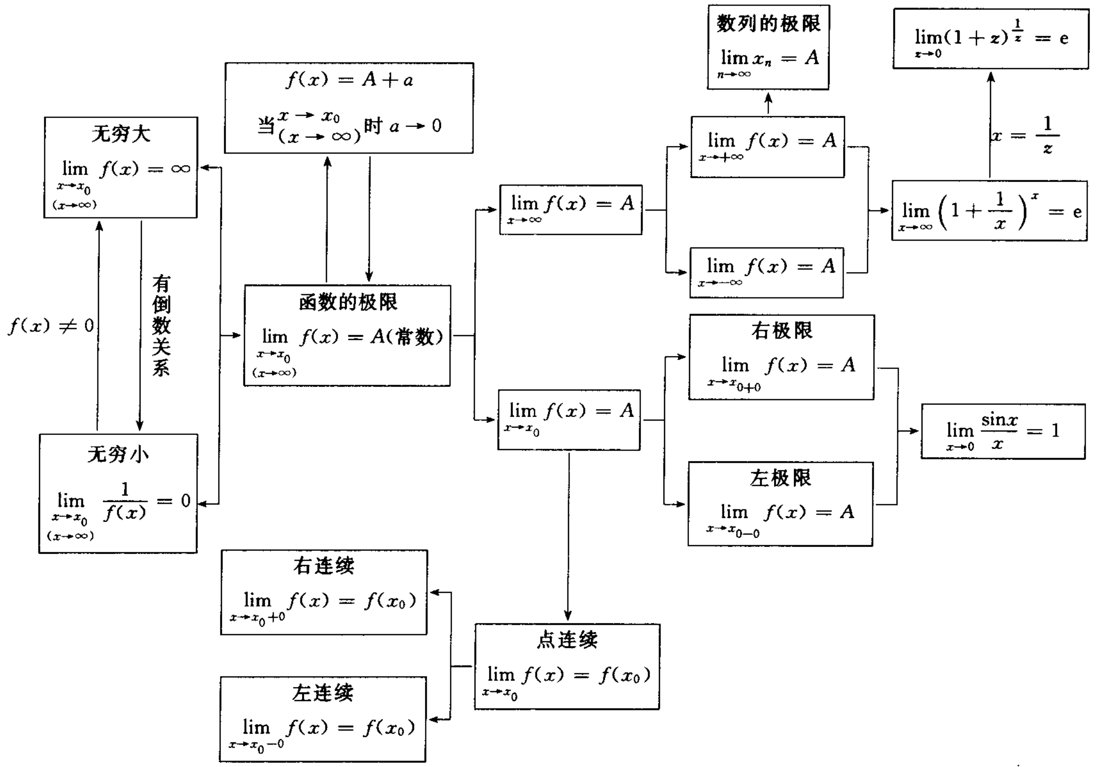


图 1-1　函数的极限与其引伸概念之间的关系

## 五、表 1-1 列出了函数 $y=f(x)$ 的点连续与区间连续的概念

表 1-1　函数 $y=f(x)$ 的点连续与区间连续的概念

| 条　　件 | 结　　论 |
|---|---|
| (1)如果 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$ 或 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$ | 那么 $y=f(x)$ 在点 $x_0$ 连续 |
| (2)如果 $y=f(x)$ 在 $(a,b)$ 内每一点连续 | 那么 $y=f(x)$ 在 $(a,b)$ 内连续 |
| (3)如果 $y=f(x)$ 在 $(a,b)$ 内连续，且 $\lim\limits_{x\to b-0}f(x)=f(b)$，$\lim\limits_{x\to a+0}f(x)=f(a)$ | 那么 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续 |

## 六、本章关键词

函数　极限　连续

# 第二节　常见问题分类及解法

## 一、求函数的定义域

函数的定义域就是指使函数有意义的自变量 $x$ 的取值范围．判断函数有意义的方法有以

下几种：

① 分式的分母不等于零；

② 偶次方根式中，被开方式大于等于零；

③ 含有对数的式子，真数式大于零；

④ 反正弦、反余弦符号内的式子绝对值小于等于 1；

⑤ 分段函数的定义域是各段函数定义域的并集；

⑥ 若已知 $y=f(x)$ 的定义域是 $[a,b]$，求 $y=f[\varphi(x)]$ 的定义域，方法是解不等式组 $a\leqslant\varphi(x)\leqslant b$.

**例 1**　求下列函数的定义域：

(1) $y=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-3x+2}}+\arccos(3x-18)$；　(2) $y=\dfrac{\ln(5x-2)}{x^2-7x+10}+\sqrt{10-x}$ .

**解**　所求定义域应使函数式中各部分都有意义，即求解不等式组 .

(1) 若使函数有意义，必须

$\begin{cases}x^2-3x+2>0\\|3x-18|\leqslant1\end{cases}$，解得 $\begin{cases}x<1\text{ 或 }x>2\\\dfrac{17}{3}\leqslant x\leqslant\dfrac{19}{3}\end{cases}$，故所求函数定义域为 $\dfrac{17}{3}\leqslant x\leqslant\dfrac{19}{3}$；

(2) 若使函数有意义，必须

$\begin{cases}5x-2>0\\x^2-7x+10\neq0\\10-x\geqslant0\end{cases}$，解得 $\begin{cases}x>\dfrac{2}{5}\\x\neq2,x\neq5\\x\leqslant10\end{cases}$，故所求函数的定义域为 $\dfrac{2}{5}<x\leqslant10$ 且 $x\neq2$，$x\neq5$.

**例 2**　已知函数 $y=f(x)$ 的定义域为 $[2，5]$，求函数 $y=f(4x-3)$ 的定义域 .

**解**　由已知得　$2\leqslant4x-3\leqslant5$，即 $\dfrac{5}{4}\leqslant x\leqslant2$，故所求函数的定义域为 $\dfrac{5}{4}\leqslant x\leqslant2$.

## 二、判断两个函数是否相同

一个函数的确定取决于其定义域和对应关系的确定，因此判断两个函数是否相同必须判断其定义域是否相同，且要判断函数表达式是否统一即可 .

**例 3**　判断下列各对函数是否相同？

(1) $f(x)=\cos^2\dfrac{x}{2}$ 与 $g(x)=\dfrac{1}{2}(1+\cos x)$；　(2) $f(x)=\dfrac{|x|}{x}$ 与 $g(x)=1$.

**解**　利用定义域和对应法则来判断 .

(1) 因为 $f(x)=\cos^2\dfrac{x}{2}$ 的定义域是一切实数，而 $g(x)=\dfrac{1}{2}(1+\cos x)$ 的定义域也是一切实数，所以 $f(x)$ 与 $g(x)$ 具有相同的定义域；又因为 $f(x)=\cos^2\dfrac{x}{2}=\dfrac{1}{2}(1+\cos x)=g(x)$，即 $f(x)$ 与 $g(x)$ 具有相同的对应法则，所以 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是相同的函数；

(2) 因为 $f(x)=\dfrac{|x|}{x}$ 的定义域是 $x\neq0$ 的一切实数，而 $g(x)=1$ 的定义域是一切实数，所以 $f(x)$ 与 $g(x)$ 不是相同的函数.

## 三、判断函数奇偶性

判断函数的奇偶性，主要的方法就是利用定义，其次是利用奇偶的性质，即奇(偶)函数

之和仍是奇(偶)函数；两个奇函数之积是偶函数；两个偶函数之积仍是偶函数；一奇一偶之积是奇函数.

**例 4**　判断下列函数的奇偶性：

(1) $f(x)=\dfrac{a^x-1}{a^x+1}$　($a>0$ 且 $a\neq1$)；　(2) $f(x)=x^3(2x^2+\tan x^2)$.

**解**　(1) 用定义判断

因为 $f(-x)=\dfrac{a^{-x}-1}{a^{-x}+1}=\dfrac{1-a^x}{1+a^x}=-\dfrac{a^x-1}{a^x+1}=-f(x)$，所以 $f(x)=\dfrac{a^x-1}{a^x+1}$ 是奇函数；

(2) 用性质判断

因为 $x^3$ 是奇函数，$2x^2+\tan x^2$ 是偶函数，所以 $f(x)=x^3(2x^2+\tan x^2)$ 是奇函数.

## 四、数列极限的求法

利用数列极限的四则运算法则、性质以及已知极限求极限.

1. 若数列通项的分子、分母都是关于 $n$ 的多项式，则用分子分母中 $n$ 的最高次项的幂函数同除分子分母，然后由四则运算法则求极限.

**例 5**　求下列数列极限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+2n+5}{n^3+3n^2+5n-3}$；　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^2+n-1}{5n^2+3n-4}$；　(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{\sqrt{n^2+3n-2}}$.

**解**

(1) 原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{1}{n}+\dfrac{2}{n^2}+\dfrac{5}{n^3}}{1+\dfrac{3}{n}+\dfrac{5}{n^2}-\dfrac{3}{n^3}}=0$；　(2) 原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2+\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n^2}}{5+\dfrac{3}{n}-\dfrac{4}{n^2}}=\dfrac{2}{5}$；

(3) 原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\dfrac{1}{n}}{\sqrt{1+\dfrac{3}{n}-\dfrac{2}{n^2}}}=1$.

2. 若通项中含有根式，一般采用先分子或分母有理化，再求极限的方法.

**例 6**　求 $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2-1})$.

**解**　对通项式有理化得

$$\text{原式}=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2-1})(\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2-1})}{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2-1}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\dfrac{1}{n}}{\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}+\sqrt{1-\dfrac{1}{n^2}}}=\frac{1}{2}.$$

3. 若所求极限是无穷项之和，通常先利用等差或等比数列的前 $n$ 项和公式求和，再求极限.

**例 7**　求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2^2}-\dfrac{1}{2^3}+\cdots+(-1)^n\dfrac{1}{2^n}\right]$.

**解**　先求由 $a_1=1$，$q=-\dfrac{1}{2}$ 所构成的等比数列的前 $n+1$ 项和，再求极限，

$$原式=\lim_{n\to\infty}\frac{\left[1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right]}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{3}\left[1-(-1)^n\frac{1}{2^n}\right]=\frac{2}{3}.$$

4. 利用两边夹逼定理求数列极限，方法是将极限式中的每一项放大或缩小，并使放大、缩小后的数列具有相同的极限．

**例 8**　求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^2+\pi}+\frac{n}{n^2+2\pi}+\cdots+\frac{n}{n^2+n\pi}\right)$.

**解**　因为 $\frac{n}{n^2+i\pi}\geqslant\frac{n}{n^2+n\pi}$ $(i=1,2,\cdots,n)$，$\frac{n}{n^2+i\pi}\leqslant\frac{n}{n^2+\pi}$ $(i=1,2,\cdots,n)$

所以　$n\frac{n}{n^2+n\pi}\leqslant\frac{n}{n^2+\pi}+\frac{n}{n^2+2\pi}+\cdots+\frac{n}{n^2+n\pi}\leqslant n\frac{n}{n^2+\pi}$

而　$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2+n\pi}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{\pi}{n}}=1$，　$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2+\pi}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{\pi}{n^2}}=1$

故　$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^2+\pi}+\frac{n}{n^2+2\pi}+\cdots+\frac{n}{n^2+n\pi}\right)=1$.

5. 若通项式为形如 $1^\infty$ 形式的不定式，一般采用重要极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}$ 求极限．

**例 9**　求下列极限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+3}$；　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+3}{n+1}\right)^n$.

**解**　用重要极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}$ 求极限．

(1) 原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1+2}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^2=\mathrm{e}$；

(2) 原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n+1}\right)^n=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{2}{n+1}\right)^{\frac{n+1-1}{2}}\right]^2$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{2}{n+1}\right)^{\frac{n+1}{2}}\cdot\left(1+\frac{2}{n+1}\right)^{-\frac{1}{2}}\right]^2=\mathrm{e}^2.$$

## 五、函数极限的求法

函数的极限比数列的极限复杂，原因有两个，一是自变量的变化过程多；二是函数式复杂；因此，求函数的极限首先要观察自变量的变化和函数表达式，然后选择适当方法．一般地，函数极限有以下几种求法．

① 数列极限的求法也适合求函数的极限．

② 利用函数的连续性求函数的极限，即若 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处连续，则有 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$.

**例 10**　求 $\lim\limits_{x\to4}\frac{x+1}{x^2+5x+4}$.

**解**　因为函数 $\frac{x+1}{x^2+5x+4}$ 在 $x=4$ 处连续，所以 $\lim\limits_{x\to4}\frac{x+1}{x^2+5x+4}=f(4)=\frac{1}{8}$.

③ 若求分段函数在分界点处的极限，则利用极限存在的充要条件求极限．即函数在某一

点极限存在的充要条件是函数在该点的左右极限存在且相等．

**例 11**　已知

$$f(x)=\begin{cases}x^2+2x-3 & x\leqslant 1\\ x-1 & 1<x<3\\ \sin x+1 & x\geqslant 3\end{cases}，求\lim_{x\to 1}f(x)，\lim_{x\to 3}f(x).$$

**解**　在 $x=1$ 处，求 $f(x)$的左右极限

$\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}(x^2+2x-3)=0$，　$\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(x-1)=0$，所以　$\lim\limits_{x\to 1}f(x)=0$；

在 $x=3$ 处，求 $f(x)$的左右极限

$\lim\limits_{x\to 3^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 3^-}(x-1)=2$，　$\lim\limits_{x\to 3^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 3^+}(\sin x+1)=\sin 3+1$.

因为　$\lim\limits_{x\to 3^-}f(x)\neq\lim\limits_{x\to 3^+}f(x)$，　所以$\lim\limits_{x\to 3}f(x)$不存在．

④ 利用两个重要极限求函数的极限．即若所求极限为形如$\frac{0}{0}$形式的不定式，并且极限式中含有三角函数，一般通过三角函数的恒等变换再利用重要极限$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ 求极限；若所求极限为形如 $1^\infty$形式的不定式，并且所求函数易转化为$(1+u)^{\frac{1}{u}}$或$\left(1+\frac{1}{u}\right)^u$ 的形式，通常采用$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$ 求极限．

**例 12**　求$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{\arcsin 5x}$.

**解**　因为已知极限为$\frac{0}{0}$形式不定式，且含有三角函数，则有

$$原式=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{7x}\times\frac{5x}{\arcsin 5x}\times\frac{7x}{5x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{7x}\times\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\arcsin 5x)}{\arcsin 5x}\times\lim_{x\to 0}\frac{7}{5}=\frac{7}{5}.$$

**例 13**　求$\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{\cos x-1}}$．

**解**　因为所求极限为 $1^\infty$形式不定式，由$\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}$ 得

$$原式=\lim_{x\to 0}[1+(\cos x-1)]^{\frac{1}{\cos x-1}}=\mathrm{e}.$$

⑤ 利用无穷小量的特性以及无穷小量与无穷大量的关系求极限．即无穷小量与有界变量之积仍是无穷小量；有限个无穷小量之积仍是无穷小量；有限个无穷小量之代数和仍为无穷小量等．无穷小量与无穷大量的关系是互为倒数．

**例 14**　求下列函数的极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}x^2\sin x\cos\frac{1}{x}$；　(2) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2+2x-3}{x^2-4}$.

**解**　(1) 利用无穷小量的性质求该极限，因为当 $x\to 0$ 时，$x^2$，$\sin x$ 均是无穷小量，

而 $\cos\frac{1}{x}$为有界变量，所以　$\lim\limits_{x\to 0}x^2\sin x\cos\frac{1}{x}=0$；

(2) 利用无穷大量与无穷小量的关系求该极限．

因为当 $x\to 2$ 时，$x^2+2x-3\to 5$，$x^2-4\to 0$，

所以　$\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x^2+2x-3}=0$，所以　$\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2+2x-3}{x^2-4}=\infty$，极限不存在.

### 六、判断函数连续性

利用函数连续性的等价定义，对于分段函数在分界点的连续性，可用函数在某点连续的充要条件以及初等函数在其定义域内是连续函数的结论等来讨论函数的连续性．

**例 15**　讨论 $f(x)=\begin{cases}2-e^{-x} & x<0\\ 2x+1 & 0\leqslant x\leqslant 2\\ x^2-3x+5 & x\geqslant 2\end{cases}$ 在 $x=0$，$x=2$ 处的连续性．

**解**　由已知 $x=0$，$x=2$ 均是分界点．

在 $x=0$ 处 $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(2-e^{-x})=1$，$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(2x+1)=1$，而 $f(0)=1$，所以 $f(x)$在 $x=0$ 处连续；

在 $x=2$ 处 $\lim\limits_{x\to 2^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}(2x+1)=5$，$\lim\limits_{x\to 2^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}(x^2-3x+5)=3$，所以$\lim\limits_{x\to 2}f(x)$极限不存在，故 $f(x)$在 $x=2$ 处不连续．

**例 16**　讨论当 $a$，$b$ 为何值时，函数

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}\sin x & x<0\\ a & x=0\\ x\sin\dfrac{1}{x}+b & x>0\end{cases}$$

在 $x=0$ 处连续．

**解**　在分界点 $x=0$ 处

$$\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x}\sin x=1,\quad \lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}\left(x\sin\frac{1}{x}+b\right)=b,\ f(0)=a.$$

若使 $f(x)$在 $x=0$ 处连续，必须使 $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=f(0)$成立，即 $b=1=a$，所以当 $a=b=1$ 时，函数在 $x=0$ 处连续．

## 第三节　典型习题解答与提示

### 习 题 1-1

**1.**（1）不同，定义域不同；（2）不同，对应关系不同；

（3）不同，定义域不同；（4）不相同，定义域和对应关系都不相同；

（5）相同，定义域和对应关系都相同；（6）相同，定义域和对应关系都相同．

**2.**（1）$(-\infty,-2)\cup(-2,-1)\cup(-1,+\infty)$；（2）$[-4,4]$；（3）$(-1,1)$；

（4）$(-1,0)\cup(0,+\infty)$；（5）$[0,1]$；（6）$\left(\dfrac{n\pi}{2},\dfrac{(n+1)\pi}{2}\right)$ $(n\in\mathbf{Z})$.

**3.** $f(0)=\dfrac{\pi}{2}$，$f(1)=\dfrac{\pi}{3}$，$f(\sqrt{2})=\dfrac{\pi}{4}$，$f(-\sqrt{3})=\dfrac{5\pi}{6}$，$f(-\sqrt{2})=\dfrac{3}{4}\pi$.

**4.** $f\left(-\dfrac{1}{2}\right)=0$，$f\left(\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{2}{3}$，$f\left(\dfrac{3}{4}\right)=\dfrac{1}{2}$，$f(2)=0$.

**5.**（1）偶函数；（2）偶函数；（3）奇函数；（4）非奇非偶；（5）奇函数；（6）非奇非偶．

**6.** 设 $x_1$，$x_2\in(-1,0)$，$x_1>x_2$，则 $y(x_1)-y(x_2)=\dfrac{1}{x_1}-\dfrac{1}{x_2}=\dfrac{x_2-x_1}{x_1x_2}<0$，

所以 $y(x)$在$(-1,0)$内单减.

**7.** 设 $x_1,x_2\in(0,+\infty)$, $x_1>x_2$, 则 $y(x_1)-y(x_2)=\lg x_1-\lg x_2=\lg\dfrac{x_1}{x_2}>0$,

所以 $y(x)$在$(0,+\infty)$内单增.

**8.** (1) 有界; (2) 无界.

**9.** (1) $\sin^2 x=\dfrac{1}{2}(1-\cos 2x)$, 周期为 $\pi$;

(2) $\sin x+\cos x=\sin x+\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)=2\sin\dfrac{\pi}{4}\cos\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$, 周期为 $2\pi$;　(3) $\pi$.

**10.** (1) $y=\sqrt[3]{u}, u=a-x^2$;　(2) $y=3^u, u=\sin x$;

(3) $y=u^2, u=\sin v, v=2x+1$;　(4) $y=\ln u, u=\sin v, v=e^x$;

(5) $y=\arccos u, u=1-x^2$;　(6) $y=e^u, u=\arctan v, v=\dfrac{1}{x^2}$.

**11.** (1) 设 $f_1(x)$, $f_2(x)$都是偶函数, $g(x)=f_1(x)+f_2(x)$,

则 $g(-x)=f_1(-x)+f_2(-x)=f_1(x)+f_2(x)=g(x)$, 所以 $g(x)$是偶函数,

同理可证有关奇函数的结论;

(2) 设 $f_1(x)$, $f_2(x)$都是奇函数, $h(x)=f_1(x)f_2(x)$,

则 $h(-x)=f_1(-x)f_2(-x)=[-f_1(x)][-f_2(x)]=f_1(x)f_2(x)=h(x)$,

所以 $h(x)$是偶函数, 同理可证有关偶函数的结论;

(3) 设 $f_1(x)$为偶函数, $f_2(x)$为奇函数, $k(x)=f_1(x)f_2(x)$,

则 $k(-x)=f_1(-x)f_2(-x)=f_1(x)[-f_2(x)]=-k(x)$, 所以 $k(x)$为奇函数.

**12.** 设小方块边长为 $x$, 则容积为 $V=(a-2x)^2x$, $0<x<\dfrac{a}{2}$.

**13.** 圆锥底圆周长 $C$ 等于扇形的圆弧长, 即　$C=R\alpha$, 则底圆半径 $r=\dfrac{R\alpha}{2\pi}$,

底圆面积 $S=\dfrac{R^2\alpha^2}{4\pi}$, 圆锥的高 $h=\sqrt{R^2-r^2}=\dfrac{R}{2\pi}\sqrt{4\pi^2-\alpha^2}$,

所以, 圆锥体积 $V=\dfrac{1}{3}Sh=\dfrac{R^3\alpha^2}{24\pi^2}\sqrt{4\pi^2-\alpha^2}$, $0<\alpha<2\pi$.

**14.** 设小圆锥的底圆半径为 $R$, 由相似形得 $\dfrac{R}{x}=\dfrac{r}{h}$,

则 $R=\dfrac{xr}{h}$, 所以小圆锥容积为 $V=\dfrac{\pi r^2x^3}{3h^2}$,　$0\leqslant x\leqslant h$.

**15.** 设 $x$ 为乘坐千米数, $m$ 为票价, 则

$$m=\begin{cases}0.5 & 0<x<5\\ 1 & 5\leqslant x\leqslant 10\\ 1.5 & 10<x\leqslant 20\end{cases}.$$

**16.** 由相似形定理得 $\dfrac{LM}{b}=\dfrac{h-x}{h}$, 则　$LM=\dfrac{b}{h}(h-x)$,

所以 $P=\dfrac{2b}{h}(h-x)+2x=2\left(1-\dfrac{b}{h}\right)x+2b$, $0<x<h$,

$S=\dfrac{b}{h}(h-x)x=bx-\dfrac{b}{h}x^2$, $0<x<h$, 图略.