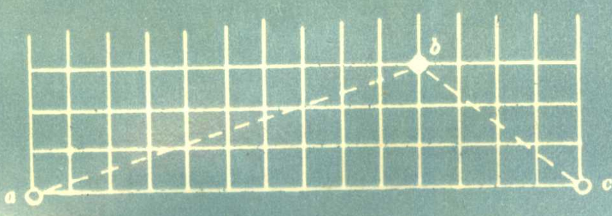
数学模型

濮定国　田蔚文　主编



东南大学出版社

(苏)新登字第012号

内容提要

本书针对理工科高校开设数学模型课的需要，分8章，通过剖析经济、管理、生物、物理、工商交通等方面的一些数学模型，论述数学模型的建立、分析、计算和求解、评价等内容。

本书适合理工科院校师生阅读，只要学过高等数学和工程数学的人员即可阅读。

责任编辑　　张　克

数学模型

濮定国　田蔚文　主编

*

东南大学出版社出版发行

（南京四牌楼2号　邮编210096）

江苏省新华书店经销　南京邮电学院印刷厂印刷

*

开本850×1168毫米1/32　印张5.75　字数144千

1994年12月第1版　1994年12月第1次印刷

印数：1—5000册

ISBN 7—81023—986—4/O·86

定价：5.90元

前　言

数学模型是联系实际问题和数学方法的桥梁，要对社会、经济、工业和医学等各个邻域提出的实际问题作定量分析，首先要把错综复杂的问题简化，找出决定该问题的主要因素和内在规律，抽象成合理的数学模型并选择适当的数学工具进行计算和求解。从这个意义上说，开设数学模型这门课程，对培养学生的观察，想象，创新和解决实际问题的能力，巩固和综合运用已学的数学方法是很有益的。

本书主要通过剖析一些实际的案例，介绍对各类实际问题如何在合理假设条件下，建立相应的数学模型，并对这些模型求解。同时，我们还讨论这些模型解的性态和模型本身的优缺点，提出适当的评估和改进的可能性。

本书的数学模型按研究的对象来归类，当然数学模型也可按模型的数学属性分类。在附录 D 中，列出按数学方法对本书介绍的模型的分类。

本书假定读者已学过大学的高等数学和工程数学。对于本书要用到的一些超越上述范围的数学知识，我们在附录中都作了必要的介绍。本书可作大学理工科二年级以上学生选修数学模型课程的教材，也可供需要了解建模方法和解这些数学模型的方法的读者参考。

参加本书编写的作者：徐洪（1.4 节），马洪宽（5.1—5.3 节）；张华隆（7.1—7.2 节）；濮定国和田蔚文（合作编写其余章节和附录）。最后由濮定国统改和定稿。

本书由李玉贞审阅。

编　者

目　录

1 一些简单的例子

刚开始接触数学模型这学科的人，常对数学模型感到较神密。诚然，建立某些数学模型需要用到非常深奥的原理，复杂的计算和对数学模型的背景有深刻的了解。但是，也有许多现象，包括我们日常生活中所遇到的事情，通过适当的假设就能用较简单的数学模型和原理对这种现象解释和分析。下面的例子，就是说明如何从一些不太复杂的现象，经过初步分析，抓住问题的主要方面，用简单的数学模型来解这些问题的方法。

1.1 方桌问题

众所周知，三点决定一个平面，所以照相机或测量仪的支撑架等一类具有三条腿的物体，在平地上都能平稳地放置。如果地面稍有起伏不平，桌子一类具有四条腿的物体有时放置不平稳，有一条腿悬空不着地。然而日常生活经验告诉我们，只要把方桌原地适当旋转一定角度，就能平稳放置。如何解释这个现象？我们首先假定下面两个条件是被满足的：

(1) 地面具有一个连续的表面。

(2) 每个桌腿和地面的接触点是在桌腿上固定的一点，这四个点的连线构成一个正方形，并且桌子放在地上时，至少有三点着地。

在无台阶的地面上，上述两条件可以看作是合理的。我们假定桌腿上着地点为 A，B，C，D 四点。O 表示正方形 $ABCD$ 的中点（如图 1.1），θ 表示 $ABCD$ 绕 O 点旋转的角度，$f_1(\theta)$ 表示旋转 θ 度后 A 和 C

点到地面距离和，$f_2(\theta)$ 表示旋转 θ 度后 B 和 D 点到地面距离和。由假设条件 2 知 $f_1(\theta)f_2(\theta)=0$ 对所有 θ 成立，令 $f(\theta)=f_1(\theta)-f_2(\theta)$，则 $f(0)=-f(\pi/2)$，因为 $f_1(0)=f_2(\pi/2)$ 和 $f_1(\pi/2)=f_2(0)$。由假设条件 1 知 $f(\theta)$ 是连续函数。如 $f(0)\neq 0$，则 $f(0)$ 和 $f(\pi/2)$ 异号推出存在 θ，$0<\theta<\pi/2$，使 $f(\theta)=0$，而 $f_1(\theta)$，$f_2(\theta)$ 必有一个为 0，所以另一也为零，这说明要么 $\theta=0$ 时 A，B，C 和 D 点着地，要么在 θ 时该四点着地。即我们只要在原地适当旋转一定角度，一定能把桌子放平。

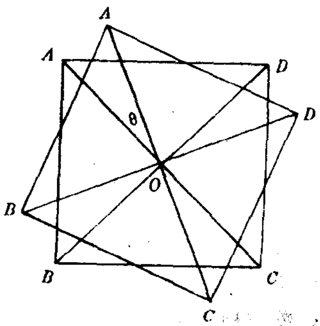


图 1.1

1.2 接人问题

假定某先生每天下午 6:00 准时下班。他的太太每天驾驶汽车在 6:00 到达先生的公司门口接先生回家。某天先生 5:30 提早下班。下班后立即步行回家，路上与太太的汽车相遇后乘上汽车回家，到达家中的时间比平时早 10 分钟，问该先生步行了多少时间？

上述问题中缺少该夫妻家和公司的距离，太太驾驶汽车的速度等数据，看上去无法求解，其实不然。当然，我们需要作一些必要的假设，使问题处于“理想”条件下。

(1) 假定太太每天驾车离家的时间是固定不变的，车速也是恒定的。

(2) 假定先生和太太相遇时，立即上车往家中行驶，即夫妻相遇打招呼，开车门，车掉头等时间可忽略不计。

作了上述假定后，我们作出图 1.2 来帮助分析问题。

图中 A 点表示该夫妻家，B 和 C 点分别表示公司和先生提早下

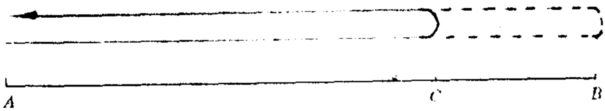


图 1.2

班时和太太相遇的地点。因太太每天准时出门，所以在提早下班这一天，假定太太在 C 点没有看见先生，因而在 B 点掉头回驶至 A 点，则和平时一样时间到家。所以该日太太驾车少走了 BC 二倍距离和少驾车 10 分钟，到达 C 点的时间比到达 B 点时间早 5 分钟，即在 5:55 时到达 C 点，而先生此时已步行了 25 分钟。

1.3　应急设施的位置

每个城镇都会遇到一些突发事件，例如急病，失火，刑事案件等需要紧急处理。有时把救护站，消防队和警察所结合在一起构成应急设施。图 1.3 是美国里奥兰翘镇 1985 年每个长方街区应急事件的次数。在北边有一个 L 形的区域是一个障碍，车子不能从中穿过。而南边的长方区域是一个有浅水池塘的公园。

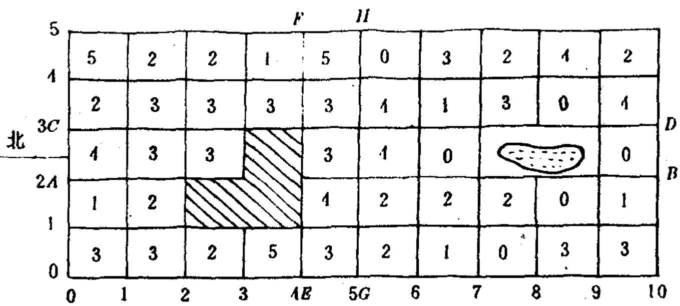


图 1.3

假定应急车辆驰过南北和东西向的一条街道分别需要15秒和20秒。1986年该镇需要建立两个应急设施，这两个设施应建在什么地方使总的响应时间最少。

为了使问题简化，我们假定应急设施都位于街角。

为了更好地分析上述问题，我们还假定：

(1) 应急车辆是沿街道走的，而且转弯和过十字路口的时间忽略不计。车辆总能从离突发事件较近的设施发车。

(2) 假定突发事件都在每个街区的中心发生。应急车辆是在突发事件所在街区的十字路口沿对角线到达街区中心，从应急设施到突发事件发生点走最近路。

(3) 1985年发生的突发事件的分布是有代表性的。

我们用二维数来表示点的位置，街区十字路口用(i, j)表示，i从西到东取0－5间6个整数，j从北到南取0－10间11个整数。街区中心用(k, l)表示，k取0.5－4.5间5个数，l取0.5－9.5间10个数表示。用$a((i, j), (k, l))$表示车辆从街角(i, j)到中心(k, l)所需时间，在不经过两个障碍区时

$$a((i, j), (k, l)) = 20(|i-k| - 0.5) + 15(|j-l| - 0.5) + (15^2 + 20^2)^{1/2}/2 \quad (\text{秒}) \tag{1.1}$$

当应急车辆因绕过障碍物而增加行驶时间时，a的值需适当调整，例如当$3 \leqslant i \leqslant 5$和$j = 8$时，驶到水池西边四个区的时间要比式(1.1)增加20秒，对于L形障碍也同样处理。这样选址问题就化为找两点(i_1, j_1)，(i_2, j_2)，使得其为下面优化问题解

$$\min\left\{\sum_{(k, l)} d(k, l) \min\{a((i_1, j_1), (k, l)); a((i_2, j_2), (k, l))\}\right\} \tag{1.2}$$

其中$\sum$取遍(k, l)可能取的45个点求和，$d(k, l)$为(k, l)所在街区1985年突发事件数。显然函数a最多取值的次数为

$$2 \cdot C_{66}^2 \cdot 45 = 96525 \times 2 = 193050$$

如果我们对问题作进一步分析，还可以大大减少函数 a 的取值次数。首先，如应急设施选在镇四周街角，则把位置相应向中心区平移一条街，例如把(0, 3)移动到(1, 3)或(3, 0)移动到(3, 1)等等，则总的响应时间必定减少。其次，两个应急设施不能都在直线 AB 的西边，否则 把这两个设施位子沿直线 AB 垂直方向平行移动到 AB 上。这样的移动可能增加最西边的一组街区总的相应时间 25×20 秒加上 L 形障碍物可能增加的响应时间 16×15 秒合计 740 秒。但东边两条街区的减少时间至少为 $20 \times 69 = 1380$ 秒。同样的道理，两个设施不能都选在 CD 线的东边，FE 线的北边和 GH 线的南边。进一步的分析我们还可以得出最优的选择应急设施的位置应位于 AB 线或 CD 线上。这样我们最多计算函数 a 的值 $18 \times 45 = 810$ 次和取 a 的值最多为 $2 \times (6 \times 12 + 4 \times 11) \times 45 = 10440$ 次。

表 1.1 列出 10 个最好的选择点组。

表 1.1　10 个最好的选择点组

点	(3, 2)	(3, 1)	(2, 2)	(3, 2)	(2, 1)	(3, 2)	(3, 1)	(3, 2)	(3, 1)	(1, 4)
点	(3, 6)	(3, 6)	(3, 6)	(2, 6)	(3, 6)	(2, 7)	(2, 6)	(3, 7)	(3, 5)	(4, 5)
时间	4577	4637	4642	4652	4657	4662	4677	4682	4697	4717

从上面的数据看，最优的选择总的应急时间和其它次优点组响应时间比较，一年不超过 140 秒。实际上，因为应急设施接到报急，发动应急车辆和路上可能因交通堵塞、红绿灯等情况，总的响应时间要比计算结果大得多。而且其它的一些因素，比如应急设施的建设费用，包括土地使用等可能使应急设施取址在次优点附近，而不是在最优点附近。其次，上面的数学模型和它的最优、次优解是建立在我们的假定上的。若对这些假定作修改，例如：

(1) 假定应急设施建在任一条边上，或在任意的位置上。

(2) 突发事件均匀地分布在街区的四周，或均匀地分布在该街区内。

(3) 应急设施的建设费用在镇中心区比边缘区贵得多。要考虑建设费。

上面的假定也具有一定合理性，这样我们的模型又要作适当的修改。如我们把 1985 年发生突发事件看作具有某些随机性和突发事件分布具有某种连续性和光滑性，则模型更复杂。对更一般的选址问题，我们可能要考虑更多的因素。

1.4 博弈问题

1) 问题

猜币游戏：该游戏由两人对垒，每人手中藏起一枚五分镍币，一枚一角银币和一枚二角五分辅币，然后各自同时出示一枚所藏硬币。如属同一品种，则该币归第一位局中人所有；否则就属于第二位局中人。最后以得分多者为胜。

问题：

(1) 该游戏对双方是否公平？

(2) 如不公平，则受益方采取何种策略可稳操胜券，而另一方则如何尽可能输得少？

2) 问题分析

如果只进行一次或很少几次游戏，则双方都不具有保证稳操胜券的策略。如果运气不佳，双方均有可能每次都输。所以，这里的公平性或获胜策略只有在统计意义下讨论，才有意义，即需在长期进行游戏或进行较多次游戏的情况下，才有意义讨论该问题。

显然，任何一方采取一种有规律的策略，一旦被对手知晓，则必输无疑。所以，双方的策略应是以某种随机的方式选择出示的硬币，而各类硬币的出现概率予以固定。

直观地看，该游戏对第一位局中人显然是不公平的(读者可思考一下其原因)。下面我们试图解决问题 1 和 2，为双方找到各自的最佳策略。

3）问题的解

首先，必须用数学语言清晰地把问题表示出来，这在数学模型的建立过程中是较难、较关键的一步。

如果用 A、B、C 分别表示镍币、银币和辅币，而以 (X, Y) 表示每次游戏的结果，其中

$$X, Y \in \{A, B, C\}$$

且 X 表示第一位局中人（以后简称为 P_1）显示的硬币，Y 表示第二位局中人（简称为 P_2）显示的硬币。显然，所有可能出现的结果为：

$$(A, A), (A, B), (A, C)$$

$$(B, A), (B, B), (B, C)$$

$$(C, A), (C, B), (C, C)$$

对第一位局中人有利的结果只有

$$(A, A), (B, B), (C, C)$$

假设 P_1 分别以 x_1，x_2，x_3 的概率出示 A、B、C 硬币，而 P_2 则分别以 y_1，y_2，y_3 的概率出示 A、B、C。当然应有 $x_1 + x_2 + x_3 = 1$，$y_1 + y_2 + y_3 = 1$。

并假设 P_1，P_2 出示硬币都是相互独立的。那么，对第一位局中人而言，他每次游戏的期望值为：

$$E(x, y) = x \begin{bmatrix} 5 & -5 & -5 \\ -10 & 10 & -10 \\ -25 & -25 & 25 \end{bmatrix} y^{\mathrm{T}}$$

其中 $x = (x_1, x_2, x_3)$，$y^{\mathrm{T}} = (y_1, y_2, y_3)^{\mathrm{T}}$。

显然，作为游戏者，P_1 希望无论 P_2 采用何种策略，他的期望值 $E(x, y)$ 尽可能大，而 P_2 则希望 $E(x, y)$，尽可能小。

因此，对 P_1，希望找到

$$\max_x \min_y E(x, y) \tag{1.3}$$

的解。而 P_2 则希望找到

$$\min_y \max_x E(x, y) \tag{1.4}$$

的解。

式(1.3)或表示在 P_2 采用最佳策略时，P_1 的最大收益，而式(1.4)或表示在 P_1 采用最佳策略时，P_2 的最小损失。

本世纪20年代后期，John Von Neamann 在其论文《公司博弈理论》(1928年载于《数学年刊》第100卷 P. 195－320)中证明了以下的结论

$$\max_x \min_y E(x, y) = \min_y \max_x E(x, y)$$

或者，用另一种方式表示：存在 x^*, y^*，使对任意 x, y 有

$$E(x, y^*) \leqslant E(x^*, y^*) \leqslant E(x^*, y)$$

显然，x^*, y^* 就是两位局中人的最佳策略(读者思考一下其中的原因)。

因此，现在的问题就是：求 x^*, y^* 使

$$E(x^*, y^*) = \max_x \min_y E(x, y) = \min_y \max_x E(x, y)$$

称 $E(x^*, y^*)$ 为博弈的值。

利用 Lagrange 乘子法不难求出 x^*, y^*，令

$$f(x, y) = E(x, y) + \lambda_1[x(1, 1, 1)^{\mathrm{T}} - 1]$$
$$+ \lambda_2[y(1, 1, 1)^{\mathrm{T}} - 1],$$

由

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y_i} = 0, \qquad i, j = 1, 2, 3$$

得方程

$$\begin{bmatrix} 5 & -5 & -5 \\ -10 & 10 & -10 \\ -25 & -25 & 25 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1^* \\ y_2^* \\ y_3^* \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_1 \\ \lambda_1 \end{bmatrix} = 0$$

$$[x_1^*, x_2^*, x_3^*] \begin{bmatrix} 5 & -5 & -5 \\ -10 & 10 & -10 \\ -25 & -25 & 25 \end{bmatrix} + [1, 1, 1]\lambda_2 = 0$$

再由 $y_1^* + y_2^* + y_3^* = 1$ 与 $x_1^* + x_2^* + x_3^* = 1$ 得

$$\begin{cases} x_1^* = \dfrac{10}{17} \\ x_2^* = \dfrac{5}{17} \\ x_3^* = \dfrac{2}{17} \end{cases} \qquad \begin{cases} y_1^* = \dfrac{7}{34} \\ y_2^* = \dfrac{12}{34} \\ y_3^* = \dfrac{15}{34} \end{cases}$$

而 $E(x^*, y^*) = -\dfrac{50}{17}$。

这就是说每局游戏 P_1 损失 $\dfrac{50}{17}$。当然这并不是说每局 P_2 一定能得到 $\dfrac{50}{17}$，这只是期望值。正如抛掷一枚无偏差的钱币，出现正面的机会是百分之五十只是一种期望而不是保证一样。

所以，在长期赌赛时 P_2 须用全部时间的 $\dfrac{7}{34}$ 出示镍币，$\dfrac{12}{34}$ 的时间出示银币，而余下的 $\dfrac{15}{34}$ 时间出示辅币，但每次出何种硬币则须随机选择。那末，平均每局 P_2 可得 $\dfrac{50}{17}$。

最后，如有兴趣，读者可尝试解决下面这个较复杂的问题：这也是个两人游戏，字母 C、M、D 分别是 Cheap, Middling, Dear 的缩写。它们被分别写在黑板上，并在每个字母下写上数字：

C	M	D
1, 2, 3	4, 5, 6	7, 8, 9

首先由 A 选定一个数字（例如 5），但不能让 B 知道该数字，然后告诉 B 该数字位于何组（这里是 M 组），要求 B 猜出自己选的数字。，若 B 猜中（猜中 5），就得 5 分；若猜 4 或 6，则 5 分归 A。然后，不管哪一种情况都抹去 5，再由 B 在余下的数字中进行，由 A 猜。直至所有数字被勾销。最后双方统加得分。分数高者为胜。

那末，什么是双方的最优策略？

1.5 小结

从上面的几个例子，我们可以知道用数学模型解实际问题一般包含下面几个主要步骤。

1）实际问题的信息和数据的收集，确定研究目标；

2）根据实际问题的背景，找出该问题主要的决定因素，提出一些假设条件使问题处于合理的理想状态；

3）建立相应的数学模型；

4）使用收集到的数据对数学模型求解；

5）模型及其解答的检验和评估，包括理论上对它们的各种性态的分析和用实际收集数据对结果验证；

6）应用。

对一个较为复杂的实际问题建立一个成熟的数学模型往往多次重复上面的各项工作。直到得到一个比较符合实际要求，令人满意的解为止。而且，当假定条件变化时，其对应的模型和解也要作相应的变化。

思考题

1－1　通讯网络的极小生成树：两个通讯站之间的通讯线路的费用正比于线路的长度，传统的一组通讯站的极小生成树的费用，可以通过引入一些“虚拟”通讯站并构成新的 Steiner 树的办法来降低，如图 P1.1 中大圆。用此办法节省的费用可以达到 14.47%（即 $1-\sqrt{3}/2$）。然而，一个有 n 个通讯站的网络要求用 $n-2$ 个虚拟点来构造费用最省的 Steiner 树，下面是二个简单的例子。

对于局部网络，常常要用直折线距离（或称方格距离）而不能用欧几里德直线距离。对于这种尺度可以计算距离如图 P1.2 所示。

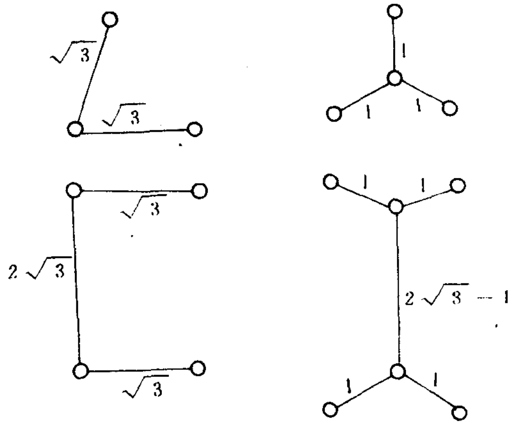
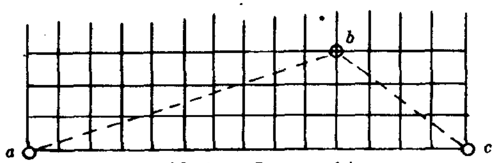


图 P1.1



$ab = 13,\ bc = 7,\ ac = 14$

费用 = 20

图 P1.2

设你希望对一个有 9 个通讯站的局部网格设计一个极小费用的生成树，它们的直角坐标是：

$a(0,15)$，$b(5,20)$，$c(16,24)$，$d(20,20)$，$e(33,25)$，

$f(23,11)$，$g(35,7)$，$h(25,0)$，$i(10,3)$

若必须用方格距离而且一切虚拟点必须位于格子点上(即坐标为整数)。每条线路的费用就是它的长度。

(1) 求网络的极小费用树。