XINJINGJIANG

新精讲

XINJINGJIANG NEW 新理念·新设计·新形象

初三代数(上)

编著　雷明生

DAISHU

江苏教育出版社

新精讲

初三代数（上）

江苏教育出版社

新理念·新设计·新精讲
XINJINGJIANG

编著 雷明生

图书在版编目(CIP)数据

新精讲.初三代数.上/雷明生编著.—南京:江苏教育出版社,2002.6

ISBN 7-5343-4508-1

Ⅰ.新... Ⅱ.雷... Ⅲ.代数课-初中-教学参考资料 Ⅳ.G634

中国版本图书馆CIP数据核字(2002)第037959号

书　　名	**新精讲·初三代数(上)**
编　　著	雷明生
出版发行	江苏教育出版社
地　　址	南京市马家街31号(邮编210009)
网　　址	http://www.1088.com.cn
经　　销	江苏省新华发行集团有限公司
照　　排	南京理工排版校对有限公司
印　　刷	丹阳教育印刷厂
厂　　址	丹阳市西门外(邮编212300)
开　　本	880×1240毫米　1/32
印　　张	6.5
插　　页	1
字　　数	170 000
版　　次	2002年7月第1版 2002年7月第1次印刷
印　　数	1-9 000册
书　　号	ISBN 7-5343-4508-1/G·4203
定　　价	8.20元
邮购电话	025-5400774,8008289797
批发电话	025-3303538,3300420
盗版举报	025-3300952,6635549

说　明

在过去十年的教辅图书市场，我社的“精讲”丛书是一个闻名遐迩的品牌。这套丛书之所以成功，关键在于它文如其名，把“精”和“讲”作为最重要的两个特色。所谓“精”，是指它的作者队伍由一批江苏省著名特级教师组成，代表了教育大省江苏的最高教学水平；所谓“讲”，是指“精讲”借助于自己高水平的作者队伍，高屋建瓴，精心讲解，帮助学生消化、理解教学内容，提高自身能力。事实证明，这对学生是非常有好处的，学生称赞“课堂里听课搞不懂的问题，看精讲就能解决”，“买一本精讲，就像把特级教师请回家”。

进入新世纪，教育改革呈现日新月异的局面，现代化教育的理念日益深入人心。与以往相比，初、高中各学科的教学内容、教学要求都有了很大变化。根据这个情况，我社推出了“**新精讲**”丛书。同样文如其名，“新精讲”保留了老“精讲”丛书“**精**”和“**讲**”的特色，同时更加突出“**新**”。

对于这个“新”字，可以更具体地阐释为“新理念、新设计、新形象”9个字，这也是“新精讲”丛书最重要的特色。

“新精讲”诞生于新世纪之初。新世纪之初，教育改革正以前所未有的力度向前推进，而我们，包括我们最主要的读者——广大教师、学生，正身处一个日新月异的时代，不断地体验着新事物、新思想、新观点的冲击。因此，“新精讲”必须与现代化教育的要求接轨，与日新月异的时代接轨，这正是我们对“新精讲”丛书所持有的新理念。

在新理念的指导下，我们对整套丛书有了全新的设计。首先，我们有意识地对作者队伍进行了调整，选择了一批活跃在教学第一线，熟悉教育改革趋势的优秀中青年教师。为了找到最好的作者，语文、数学、化学学科还采取了公开登报招聘作者的方式。在丛书的内容设置方面，与以往相比，突出培养学生的创新能力和研究问题的能力，同时给学生尽可能多的练习机会。对于整套丛书的封面、版式、印制，我们也做了精心的设计，希望“精讲”这个老品牌能够有一副新面孔，能够吸引住新世纪读者的“眼球”。

有了新理念、新设计，我们相信，展现在广大读者眼前的“新精讲”会是一种全新的形象：它是由全国教育强省江苏省的一流名师倾力编写，全国名牌出版社江苏教育出版社精心打造，紧密切合新时代，体现现代化教育理念的精品教辅。这是我们的希望，更是我们近一年来辛勤工作、孜孜以求的目标！

江苏教育出版社

2002年6月

目　　录

第十二章　一元二次方程

一、一元二次方程

12.1　用公式解一元二次方程

理一理——学习目标

通过本节内容的学习,同学们应该知道整式和一元二次方程的概念;会用直接开平方法解一元二次方程;会用配方法解一元二次方程;会推导一元二次方程的求根公式,能够运用求根公式解一元二次方程.

学习本节中的主要概念,并对整式和一元一次方程的概念进行类比,这样既能加强新旧知识间的联系,又能掌握一种学习方法.

讲一讲——知识剖析

1. 弄清两个概念

同学们知道,单项式和多项式统称为整式. 如 5, xy, x^2+x 等都是整式. 对于一个方程来说,如果它的两边都是关于未知数的整式,这个方程就称为整式方程. 要判断一个方程是不是整式方程,只要抓住方程两边是否都是关于未知数的整式这个关键.

例 1　下列方程中,哪些是整式方程? 哪些不是整式方程?

(1) $4x^2+\frac{1}{2x}+1=0$;

(2) $x(5x-1)=38$;

(3) $4x^2-7xy+y^2=0$;

(4) $\frac{y^2}{5}=0$;

(5) $\frac{1}{\sqrt{3}}p^2-2=0$;

(6) $3y(y-1)+4y-5=3y^2$;

(7) $nx^2+2x-5=0$(n为常数且$n\neq 0$);

(8) $5mx^2+6nx+p=0$(m, n, p为常数且$n\neq 0$).

分析 要说明这些方程是不是整式方程,只要逐一检查这些方程的两边是否都是整式.

解 是整式方程的有(2),(3),(4),(5),(6),(7),(8).

说明 运用概念进行辨析性判断时,一要深刻领会概念的内涵,二要有合理的思考方法,这里可以用排除法.

同学们知道,形如$ax+b=0(a\neq 0)$的方程叫一元一次方程.类似地,形如$ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$的方程叫一元二次方程.在这个整式方程中,只含有一个未知数,并且未知数的最高次数是2.这里的"未知数的最高次数是2",是指方程经过化简整理后所得方程的未知数的最高次数.例如,方程$x^4+2x=x^2(x^2-1)+3$,经过去括号、移项、合并同类项,可以化为$x^2+2x-3=0$,所以方程$x^4+2x=x^2(x^2-1)+3$实质上是一元二次方程,而不是四次方程.

任何一个关于x的一元二次方程,经过化简整理后,都可以化为$ax^2+bx+c=0$的形式.但并不是形如这种形式的方程一定是一元二次方程.只有当$a\neq 0$时,它才是一元二次方程.如果$a=0$,$b\neq 0$,那么这个形式的方程就变成一元一次方程.

$ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$是一元二次方程的一般形式,a, b, c分别表示二次项系数、一次项系数和常数项,要注意的是它们还包括各自的符号.

把一元二次方程化为它的一般形式,往往需要经过去括号、移项、合并同类项等化简过程,在运算过程中,同学们一定要有较好的

耐心，一步一步地算，每一步都要正确地使用相关的数学原理，做到步步有据，不要跳步算，这是提高运算正确率的好方法. 同时，我们的毅力也会在解题中得到锻炼. 有时，同学们不能将问题解决到底，不一定是知识水平不够，而是缺乏毅力和耐心.

例 2 下列方程是一元二次方程的是(   )

(A) x^2+3x-2　　(B) $x^2+3x-2=x^2$

(C) $x^2=2+3x$　　(D) $x^2-x^3+4=0$

分析 A 中虽然含有一个未知数，并且未知数的最高次数是 2，但它不是等式，故不是方程；B 中经过整理化为 $3x-2=0$，它是一元一次方程；D 中未知数的最高次数为 3，不符合一元二次方程的条件. 因此，正确答案应是 C.

解 选择 C.

例 3 下列方程一定是关于 x 的一元二次方程的是(   )

(A) $ax^2+bx+c=0$　　(B) $k^2x+5k+6=0$

(C) $\frac{\sqrt{3}}{3}x^3-\frac{\sqrt{2}}{4}x-\frac{1}{2}=0$　　(D) $(m^2+3)x^2+\sqrt{3}x-2=0$

分析 要判断一个方程是不是一元二次方程，可根据定义判断，也可根据一元二次方程的一般形式判断. A 中 $a=0$ 时，它不是一元二次方程；B 中未知数最高次数是 1，它也不是一元二次方程；C 中未知数的最高次数是 3，它也不是一元二次方程；D 符合一元二次方程一般形式的特点，且 $m^2+3\neq 0$，所以它是一元二次方程.

解 选择 D.

例 4 填表：

方　程	二次项	二次项系数	一次项	一次项系数	常数项
$2x^2-x=4$					
$\sqrt{2}y-4y^2=0$					
$(2x)^2=(x+1)^2$					

分析 要确定表中所要填写的内容，必须先把一元二次方程化为一般形式. 因为各项名称都是在方程为一般形式的前提下定义的.

解

方　　程	二次项	二次项系数	一次项	一次项系数	常数项
$2x^2-x=4$	$2x^2$	2	$-x$	-1	-4
$\sqrt{2}y-4y^2=0$	$4y^2$	4	$-\sqrt{2}y$	$-\sqrt{2}$	0
$(2x)^2=(x+1)^2$	$3x^2$	3	$-2x$	-2	-1

说明　解答这类问题要注意:(1)要先把已知的方程化成一元二次方程的一般形式(为解题方便,通常使二次项系数为正);(2)在指出各项系数时,对带有负号的千万不要把负号丢掉;(3)如果缺少某一项,可以看做该项系数为0;(4)解答时要遵循算理,步步有据.

例5　判断关于x的方程$(k^2-1)x^2+(k+1)x-2=0$是不是一元二次方程.如果是,指出它的二次项系数、一次项系数及常数项.

解　(1)当$k^2-1\neq 0$,即$k\neq\pm 1$时,所给方程是一元二次方程,它的二次项系数是k^2-1,一次项系数是$k+1$,常数项是-2;

(2)当$k^2-1=0$且$k+1\neq 0$,即$k=1$时,所给方程不是一元二次方程,是一元一次方程;

(3)当$k^2-1=0$且$k=-1$时,原式变为$-2=0$,这不仅不是方程,也不是一个能成立的等式.

说明　本题在数学思想方法的运用上要求较高.不仅要用方程的观点求出k的取值范围,还要正确地分类.分类时主要是根据一元二次方程的定义中二次项系数不为0这个关键,因为题中二次项系数是k^2-1,所以要讨论它是否为0.这样既能加深我们对定义的理解,又体会到了分类这一数学思想方法的重要性.

2. 由方程$x^2=a$的解法想到一元二次方程的求根公式

平方根的定义告诉我们,如果$x^2=a$,那么x就是a的平方根,把“$x^2=a$”看做关于未知数x的一元二次方程得到:

当$a>0$时,方程$x^2=a$有两个互为相反数的实数根,$x_1=\sqrt{a}$,$x_2=-\sqrt{a}$;

当$a=0$时,方程$x^2=a$有两个相等的零根,即$x_1=x_2=0$;

当 $a<0$ 时，方程 $x^2=a$ 没有实数根(因为负数没有平方根)，例如方程 $x^2+16=0$ 无实数根.

例 6 解下列关于 x 的方程：

(1) $x^2-3=0$; (2) $x^2+81=0$;

(3) $4(x+2)^2-9=0$; (4) $4(x-a)^2=b(b\geqslant 0)$.

解 (1) $\because x^2=3$, $\therefore x_1=\sqrt{3}$, $x_2=-\sqrt{3}$.

(2) 移项得 $x^2=-81$, $\therefore$ 方程无实数根.

(3) 移项得 $4(x+2)^2=9$,

两边同除以 4 得 $(x+2)^2=\dfrac{9}{4}$,

$\therefore x+2=\dfrac{3}{2}$ 或 $x+2=-\dfrac{3}{2}$.

$\therefore x_1=-\dfrac{1}{2}$, $x_2=-\dfrac{7}{2}$.

(4) 方程的两边都除以 4，得

$$(x-a)^2=\frac{b}{4}.$$

$\because b\geqslant 0$,

$\therefore x-a=\pm\dfrac{\sqrt{b}}{2}$,

$\therefore x_1=a+\dfrac{\sqrt{b}}{2}$, $x_2=a-\dfrac{\sqrt{b}}{2}$.

说明 像上面这种解一元二次方程的方法叫直接开平方法. 可以看出，它的理论依据来源于平方根的定义. 这种方法平时用得比较少，它对于符合下列特点的一元二次方程，是一种简捷的方法：方程的一边是含有未知数的一次式的平方，另一边是非负常数. 如果题中给出的方程不具备上述特点，应该先进行转化. 另外，形如 $x^2=a$ 的方程中，字母 x 可以表示一个含未知数的一次式，只要把这个一次式看做一个字母，如 $(x+2)$、$(x+a)$ 等，就可以用这种方法. 这样实质上是进行变量代换或者说“换元”.

如何把不能用直接开平方法求解的一元二次方程转化为 $(x+$

$a)^2=b$的形式,从而运用直接开平方法呢?这就需要用配方法.

所谓配方法,就是把一个二次三项式,配成一个完全平方式.配方法是式的恒等变形的重要方法.把这种方法用于解方程,就是把方程中含有未知数的部分相对集中,把它变成(含未知数的一次式)$^2+$常数的形式,配方时,主要应用完全平方公式:$a^2\pm 2ab+b^2=(a\pm b)^2$.

配方法解一元二次方程的一般步骤是:

一般步骤	举例:解方程 $2x^2+16x+18=0$
(1) 将二次项系数化为1	方程两边同除以2,得 $x^2+8x+9=0$
(2) 把常数项移到方程右边	移项,得 $x^2+8x=-9$
(3) 方程两边都加上一次项系数一半的平方	方程两边各加上$\left(\frac{8}{2}\right)^2$,得 $x^2+8x+\left(\frac{8}{2}\right)^2=-9+\left(\frac{8}{2}\right)^2$
(4) 若右边是一个非负常数,就用直接开平方法	解这个方程,得 $x_1=-4+\sqrt{7}$, $x_2=-4-\sqrt{7}$

例7 用配方法解方程 $2x^2-3=-6x$.

解 移项,得 $2x^2+6x-3=0$.

把方程的各项都除以2,得

$$x^2+3x-\frac{3}{2}=0,$$

$$x^2+3x=\frac{3}{2}.$$

配方,得 $$x^2+3x+\left(\frac{3}{2}\right)^2=\frac{3}{2}+\left(\frac{3}{2}\right)^2,$$

$$\left(x+\frac{3}{2}\right)^2=\frac{15}{4}.$$

利用直接开平方法,解得 $x+\frac{3}{2}=\pm\sqrt{\frac{15}{4}}$,

$$x+\frac{3}{2}=\pm\frac{\sqrt{15}}{2}.$$

$\therefore\ x_1=-\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{15}}{2},\ x_2=-\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{15}}{2}.$

说明 由于配方法解一元二次方程比较麻烦,因而也较少用到.但配方法作为一种数学方法却是很重要的,同学们要很好掌握.

例 8 用配方法解方程 $x^2-2x-m=0$.

解 移项得 $x^2-2x=m$,

配方得 $x^2-2x+1=m+1$,

即 $(x-1)^2=m+1$.

$\therefore$ 当 $m\geqslant -1$ 时,方程有实数根 $x_1=1+\sqrt{m+1}$, $x_2=1-\sqrt{m+1}$;当 $m<-1$ 时,方程无实数根.

说明 当方程中含有字母系数时,要注意对根的情况进行讨论.

公式法是解一元二次方程最基本的方法,它是从方程 $x^2=a$ 的解法得到启发,对方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$ 进行"配方",从而得到了求一元二次方程的根的公式.

用公式法解一元二次方程,实质上是省去了配方的过程,直接应用配方的结果. 求根公式 $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$,反映了一元二次方程的根与系数之间的关系,将求方程的根,转化为求代数式的值.

应用一元二次方程的求根公式时,应当注意的问题是:

(1) 用求根公式解一元二次方程,需要在确定 a、b、c 的数值(或表示式)后,对代数式 $\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ 进行求值(或化简). 因此,确定 a、b、c 是关键. 为了避免错误,应该先把方程化为一般形式,a、b、c 是负数时,一定要带着符号计算.

(2) $b^2-4ac\geqslant 0$ 是公式的一部分,这就是说,在运用求根公式求解前,先求 b^2-4ac,当 $b^2-4ac\geqslant 0$ 时,方程有实数根,再把根求出来;当 $b^4-4ac<0$ 时,方程没有实数根,这时,就不必再代入公

式了.

(3) 对于缺少一次项或常数项的一元二次方程,如果应用公式法求解,应把缺少的项的系数看做 0. 这类方程用直接开平方法或因式分解法更为便捷.

例 9 用公式法解下列方程:

(1) $x^2-2\sqrt{2}x+2=0$; (2) $x^2+x=1$.

分析 方程(1)是一元二次方程的一般形式,先找出 a、b、c 的值,并计算 b^2-4ac 的值,然后代入求根公式,即可求出方程的根;方程(2)需要先化成一般形式,再求解.

解 (1) $\because a=1,\ b=-2\sqrt{2},\ c=2,$

$$b^2-4ac=(-2\sqrt{2})^2-4\times1\times2=0,$$

$\therefore x=\dfrac{2\sqrt{2}\pm\sqrt{0}}{2}=\dfrac{2\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}.$

$\therefore x_1=x_2=\sqrt{2}.$

(2) 将原方程化为一般形式 $x^2+x-1=0$.

$\because a=1,\ b=1,\ c=-1,$

$$b^2-4ac=1^2-4\times1\times(-1)=5,$$

$\therefore x=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}.$

$\therefore x_1=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2},\ x_2=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}.$

说明 (1) 当方程有两个根相等时,要表示为 $x_1=x_2=a$ 的形式,而不要写成 $x=a$. 这样表示说明方程有两个根,而不是一个根;(2)用公式法解一元二次方程,一定要先将方程化为一般形式.

我们从平方根的定义出发,引出了直接开平方法;为了把不符合运用直接开平方法特征的方程转化为能用这种方法的一元二次方程,我们探讨了配方法;为了找到更具有通性的方法,在配方法的基础上,导出了求根公式. 因此公式法是解一元二次方程的主要方法,

能解任何一个一元二次方程.

解一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$. 用直接开平方法求解,体现了"二次"转化为"一次"的"降次"的思想方法;降次后,再用一元一次方程的解法,把"未知"转化为"已知". 用配方法求解,把方程化为形如 $(x+h)^2=k$ 的形式,体现了数学形式的转化;然后用直接开平方法把"二次"转化为"一次"、把"未知"转化为"已知". 用公式法求解,直接用公式把方程中的"未知"转化为"已知". 由此可见,解一元二次方程的基本思想是降低未知数的次数,转化为一元一次方程来求解.

配方法作为一种重要的数学方法,它在解一元二次方程、判定代数式值的大小等方面都有重要的作用.

例 10 试用配方法证明:代数式 $2x^2-x+3$ 的值不小于$\frac{23}{8}$.

证
$$\begin{aligned}2x^2-x+3&=2\left(x^2-\frac{1}{2}x\right)+3\\&=2\left[x^2-\frac{1}{2}x+\left(\frac{1}{4}\right)^2-\left(\frac{1}{4}\right)^2\right]+3\\&=2\left[\left(x-\frac{1}{4}\right)^2-\left(\frac{1}{4}\right)^2\right]+3\\&=2\left(x-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{23}{8}.\end{aligned}$$

$\because 2\left(x-\frac{1}{4}\right)^2\geqslant 0$,

$\therefore 2\left(x-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{23}{8}\geqslant\frac{23}{8}$.

即代数式 $2x^2-x+3$ 的值不小于$\frac{23}{8}$.

说明 (1) 把代数式中的二次项系数化为"1"的方法是:提取二次项系数,使括号内的二次项系数为"1". 不能像解方程那样,各项都除以二次项系数.

(2) 对代数式配方的方法是:提取二次项系数使括号内的二次项系数为 1 后,加上一次项系数一半的平方,同时减去一次项系数一半的平方.

对于两个一元二次方程,常常需要研究它们是否具有相同根的问题.

例 11 方程 $x^2-mx+5+m=0$ 与方程 $x^2-(7m+1)x+13m+7=0$ 至少有一个相同的根,求这两个方程四个根乘积的一切可能值.

解 设 x_0 为两个方程的一个相同根,依照根的定义有

$$x_0^2-mx_0+5+m=0 \quad ①,$$

$$x_0^2-(7m+1)x_0+13m+7=0 \quad ②.$$

①-② 得 $(6m+1)x_0-12m-2=0$,

即 $(6m+1)(x_0-2)=0$.

若 $6m+1=0$, 即 $m=-\frac{1}{6}$, 把它代入两方程均无实数根,故 $x_0-2=0$, 即 $x_0=2$.

把 $x_0=2$ 代入两方程得 $m=9$, 所以所求乘积为 $(5+m)(13m+7)=(5+9)(13\times9+7)=14\times124=1736$.

(注:也可直接求出两个方程的根为 2, 7, 2, 62,再把它们相乘.)

说明 本题主要运用了方程的根的定义,先假设两个方程的相同根,并把相同根分别代入原方程,再把这两个方程相减,得到关于相同根的一次方程,求出相同根,最后还可求出相异根. 这是关于相同根问题的常用解法.

A 组

1. 填空题:

(1) 已知关于 x 的方程: $x^2+4x-1=(x+2)(x-2)$; $x^2+\frac{3}{x}-5=0$; $ax^2+bx+c=0$; $-y^2=0$; $x^2-\frac{\sqrt{2}}{2}x-\frac{2}{3}=0$. 其中一定是一元二次方程的有________个.

(2) 把方程 $(2x+1)^2-(x-2)^2=(x+2)(x-2)$ 化成一般形式是____________.

(3) 一元二次方程 $2x^2+4x=1$ 的二次项系数、一次项系数及常数项之和为________.

(4) 方程 $3x^2+2=0$ 的一次项系数是________.

(5) 关于 x 的一元二次方程 $x^2+ax+a=0$ 的一个根是 3, 则 a 的值等于________.

(6) 若方程 $kx^2+x=3x^2+1$ 是一元二次方程, 则 k 的取值范围是____________.

(7) 关于 x 的一元二次方程 $x^2-a(3x-2a+b)-b^2=0$, 其中常数项是________.

2. 填表:

方　　程	$x^2-4x-3=0$	$-\sqrt{3}y^2+y=0$	$\frac{1}{2}x^2=\sqrt{9}$	$2x^2=0$
一般形式				
二 次 项				
二次项系数				