普通高等教育基础课规划教材

微积分 下册

张润琦 陈一宏 主编

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

普通高等教育基础课规划教材

微 积 分

下 册

主编 张润琦 陈一宏
编写 毛京中 张润琦
主审 李心灿

机 械 工 业 出 版 社

本书是根据教育部颁布的高等学校工科本科生“高等数学课程教学基本要求”，参考研究生入学考试“数学考试大纲”编写而成的．上册包含一元函数微积分和常微分方程等内容．下册包含多元函数微积分和级数等内容．

本书尽量从实际问题引入数学概念．注意培养学生用微积分的思想和方法观察、解决问题的能力．例题、习题题型丰富，有些是研究生入学考试试题，其中不少题目紧密结合实际应用．有利于培养学生的应用意识以及分析解决问题的综合能力．

本书是工科本科生的教科书，也可以作为研究生入学考试复习用书．

图书在版编目（CIP）数据

微积分．下册/张润琦，陈一宏主编．—北京：机械工业出版社．2006．1
普通高等教育基础课规划教材
ISBN 7-111-18326-6

Ⅰ．微… Ⅱ．①张… ②陈… Ⅲ．微积分—高等学校—教材 Ⅳ．0172

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2006）第 001153 号

机械工业出版社（北京市百万庄大街 22 号 邮政编码 100037）
责任编辑：郑 丹 版式设计：冉晓华 责任校对：刘志文
封面设计：赵 晶 责任印制：洪汉军
三河市宏达印刷有限公司印刷
2006 年 2 月第 1 版第 1 次印刷
1000mm × 1400mm B5 · 10 印张 · 376 千字
定价：29.00 元

前　言

本书是根据教育部颁布的高等学校工科本科生"高等数学课程教学基本要求",参考研究生入学考试"数学考试大纲"编写而成的．上册包含函数的极限和连续,一元函数微积分,常微分方程等内容．下册包含向量代数和空间解析几何,多元函数微积分以及级数等内容．

为了能够让学生在较少的学时内理解和掌握微积分的重要概念、思想和方法,编写时注意到了下述几个方面:

1. 对主要概念尽量先从各类实际问题入手进行数学分析,逐步抽象出严格的数学概念．

2. 在理解微积分基本概念和理论的基础上,注意培养学生应用微积分的思想和方法解决实际问题的能力．在本书的微分、积分和微分方程各部分内容中,都有较多的实例和习题．通过对这些问题的分析、求解．不断提高学生运用数学知识建立实际问题的数学模型的能力．

3. 努力提高学生的综合解题能力．每章最后一节为综合例题．这些例题和习题为精选的典型问题,有些是研究生入学考试试题,有些问题的素材取自国外的参考书．教师可根据具体情况在习题课上选用．

本书是教学改革研究项目"大学数学课程的改革和建设"的成果之一,是在长期的教学实践过程中,不断总结广大教师的教学经验,修改原有教材逐步形成的．

本书的编写得到数学教育家李心灿教授的指导和帮助,他还认真审阅了全稿,提出了诸多宝贵建议,在此表示衷心感谢．机械工业出版社对本书的出版给予了大力支持,在此一并致谢．

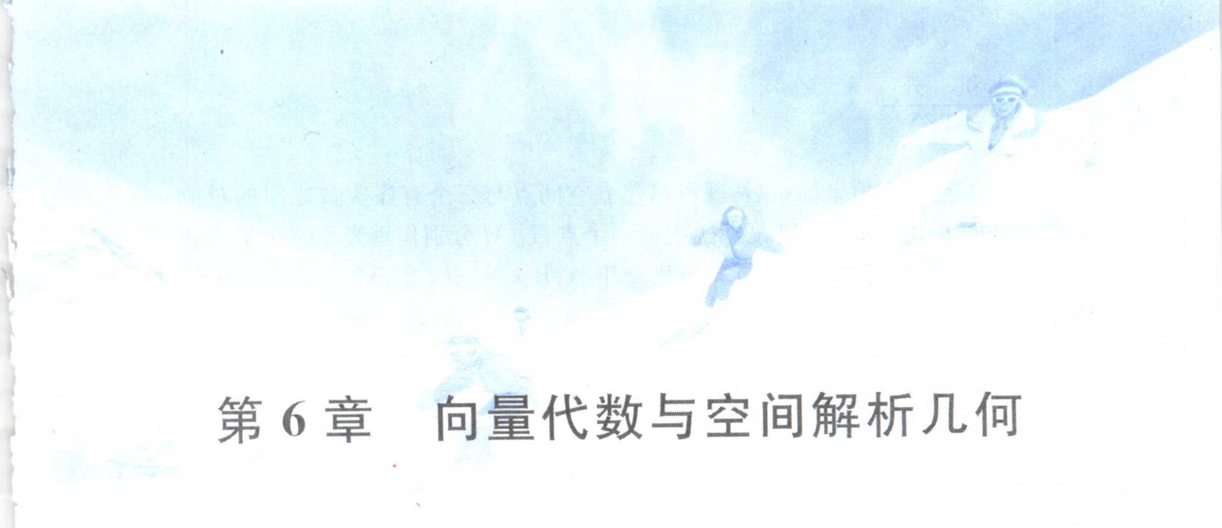
本书上册第 1 章和第 5 章由李翠哲执笔．第 2 章和第 3 章由程杞元执笔,第 4 章由苏伟宏执笔,下册第 6 章和第 7 章由毛京中执笔,第 8 章、第 9 章和第 10 章由张润琦执笔．全书由张润琦和陈一宏统稿．

书中标有 * 号的内容不作基本要求．

由于水平、经验所限,书中的不妥之处,恳请读者批评指正．

编　者
于北京理工大学

目　录



第 6 章　向量代数与空间解析几何

空间解析几何知识对于多元函数微分学和积分学是必不可少的．本章首先建立空间直角坐标系，介绍向量的一些运算，然后以向量为工具讨论空间平面与直线，最后介绍空间曲面与曲线．学习时要注意空间解析几何与平面解析几何的联系与区别．

6.1　空间直角坐标系

1. 空间直角坐标系

过空间一点 O 引出的三条互相垂直且有相同长度单位的数轴构成空间直角坐标系．点 O 叫做坐标原点，三条数轴分别叫做 x 轴、y 轴、z 轴，如图 6-1 所示．我们在本章使用的空间直角坐标系都是右手系，它的 x 轴、y 轴、z 轴的次序与方向是按右手法则排列的，即若将右手四个手指由 x 轴正向经过 $90°$ 转到 y 轴时，右手拇指刚好指向 z 轴正向．

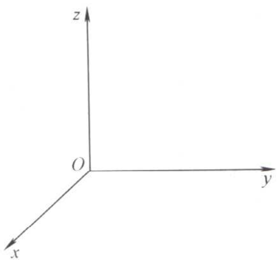


图　6-1

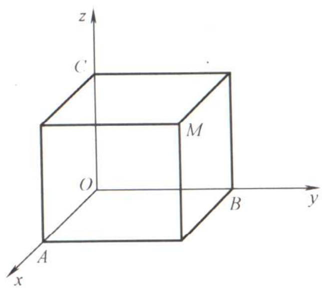


图　6-2

取定了空间直角坐标系后，就可以建立空间点与三个有序实数之间的对应关系．如图 6-2 所示，设 M 是空间中的一个点，过 M 分别作垂直于三个坐标轴的平面，这三个平面与三个坐标轴分别交于 A、B、C 三点，这三个点在三个坐标轴上的坐标分别是 x、y、z，则称有序数组 $(x、y、z)$ 为点 M 的坐标．其中，x、y、z 分别叫做点 M 的 x 坐标、y 坐标、z 坐标．反之，任意给定一个有序数组 $(x、y、z)$，在空间中有惟一的一个点以 $(x、y、z)$ 为坐标．因此，空间中的点与有序数组之间建立了一一对应关系．

在空间直角坐标系中，每两条坐标轴所确定的平面叫做坐标面．三个坐标平面把整个空间分成八部分，每一部分叫做一个卦限．上半空间的四个卦限依次称为Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ卦限，下半空间的四个卦限依次称为Ⅴ、Ⅵ、Ⅶ、Ⅷ卦限，如图 6-3 所示．

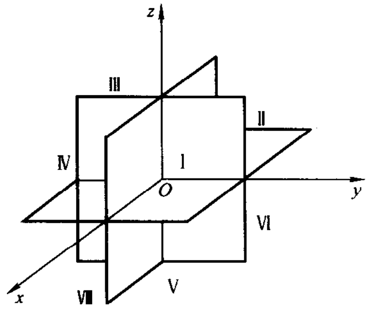


图 6-3

在每个卦限中，点的坐标符号分别为

Ⅰ$(+,+,+)$，Ⅱ$(-,+,+)$

Ⅲ$(-,-,+)$，Ⅳ$(+,-,+)$

Ⅴ$(+,+,-)$，Ⅵ$(-,+,-)$

Ⅶ$(-,-,-)$，Ⅷ$(+,-,-)$

原点的坐标为 $(0,0,0)$．x 轴上点的坐标为 $(x,0,0)$，y 轴上点的坐标为 $(0,y,0)$，z 轴上点的坐标为 $(0,0,z)$．xOy 面上点的坐标为 $(x,y,0)$，yOz 面上点的坐标为 $(0,y,z)$，zOx 面上点的坐标为 $(x,0,z)$.

2. 空间两点间的距离

如图 6-4 所示，设 $M(x_1,y_1,z_1)$ 和 $N(x_2,y_2,z_2)$ 是空间中的两点，过 M 和 N 分别作垂直于 xOy 面的直线，它们分别与 xOy 面交于点 M_1，N_1，过 M 作 NN_1 的垂线 ML，则点 M 到点 N 的距离

$$d = \sqrt{ML^2 + NL^2} = \sqrt{M_1N_1{}^2 + NL^2}$$

由于 $M_1(x_1,y_1,0)$，$N_1(x_2,y_2,0)$，因此由平面解析几何可知

$$M_1N_1{}^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

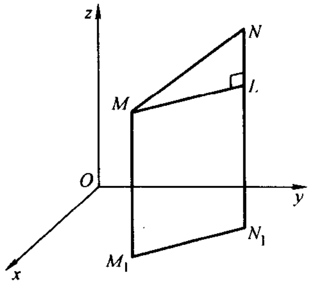


图 6-4

又 $NL = |z_2 - z_1|$，故

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

特别地，点 $M(x,y,z)$ 与原点 $O(0,0,0)$ 间的距离

$$d=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

与平面解析几何中两点间的距离公式相比较，空间中两点间的距离公式中只是增加了 $(z_2-z_1)^2$ 一项．此外，空间直角坐标系平移后点的新旧坐标之间的关系式与平面情形相比较也只是增加了一项，即

$$\begin{cases}x=a+x'\\y=b+y'\\z=c+z'\end{cases}$$

其中，(a,b,c) 是新坐标系原点 O' 的坐标，(x',y',z') 与 (x,y,z) 分别是点在新旧坐标系中的坐标．证明略．

习　题　6.1

1. 指出下列各点在空间直角坐标系中的位置．
$A(1,-2,3)$，$B(2,3,-4)$，$C(2,-3,-4)$，
$D(-2,-3,1)$，$E(3,4,0)$，$F(0,4,-1)$，
$G(0,0,3)$，$H(0,-2,0)$．
2. 求点 $(2,-1,3)$ 关于原点、各坐标轴及各坐标面的对称点的坐标．
3. 求点 $M(4,-3,5)$ 到各坐标轴的距离．
4. 证明：以 $A(4,1,9)$、$B(10,-1,6)$、$C(2,4,3)$ 为顶点的三角形是等腰直角三角形．
5. 在 z 轴上求与点 $A(-4,1,7)$ 和 $B(3,5,-2)$ 等距离的点．
6. 在 yOz 面上求与点 $A(3,1,2)$、$B(4,-2,-2)$ 和 $C(0,5,1)$ 等距离的点．

6.2　向量及其线性运算

1. 向量的概念

在实际问题中，我们常遇到两类不同性质的量：一类是只具有大小的量，称为数量，例如时间、质量、温度等；另一类是不仅具有大小而且还有方向的量，称为向量（或矢量），例如力、速度等．向量可以用有向线段表示，有向线段的长度表示向量的大小，有向线段的方向表示向量的方向．如图 6-5 所示，以 A 为起点，B 为终点的向量记作 $\overrightarrow{AB}$ 或 $\boldsymbol{a}$．

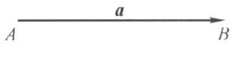


图　6-5

向量 $\overrightarrow{AB}$（或 $\boldsymbol{a}$）的大小叫做向量的模，记作 $|\overrightarrow{AB}|$（或 $|\boldsymbol{a}|$）．

模为零的向量叫做零向量，记作 $\mathbf{0}$. 零向量没有确定的方向，或者说它的方向是任意的．

模为 1 的向量称为单位向量．与 $\boldsymbol{a}$ 同方向的单位向量记作 $\boldsymbol{a}^0$.

与 $\boldsymbol{a}$ 方向相反、模相等的向量叫做 $\boldsymbol{a}$ 的负向量，记作 $-\boldsymbol{a}$.

如果向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 所在的线段平行，则称此二向量平行，记作 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$.

这里讨论的都是自由向量，即如果向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的模相等且方向相同，则称 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 是相等的，记作 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$，它们经过平移后能够完全重合．在这个意义上，相互平行的向量又可称为共线的向量．为了讨论的方便起见，常把向量 $\overrightarrow{AB}$ 平行移动得一以原点为起点的向量 $\overrightarrow{OM}$（$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{AB}$）. 以 M 为终点的向量 $\overrightarrow{OM}$ 叫做点 M 的向径．

2. 向量的加减法

根据力学中力、速度等的合成法则，我们对一般的向量加法有如下定义：

定义　设向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$，当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 不平行时，以这两个向量为邻边作平行四边形 $OACB$，其中 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，则其对角线向量 $\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{c}$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和向量，记作 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$（图 6-6）. 这种求和的法则叫做平行四边形法则．

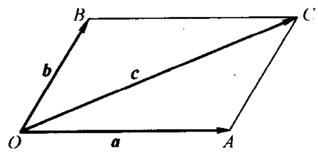


图 6-6

由于 $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，因此也可以用三角形法则定义两向量的和，即将向量 $\boldsymbol{b}$ 平行移动，使其起点与 $\boldsymbol{a}$ 的终点重合，则 $\boldsymbol{a}$ 的起点到 $\boldsymbol{b}$ 的终点的向量就是 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$.

当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 平行时，如图 6-7 所示，设 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{b}$，则有 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\overrightarrow{AC}$.

求多个向量的和时，可利用多边形法则，如图 6-8 所示，有 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d}=\overrightarrow{AB}$.

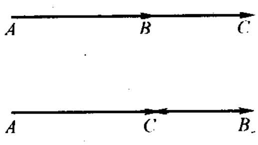


图 6-7

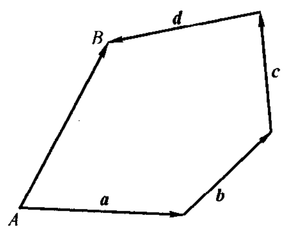


图 6-8

向量加法符合以下运算规律：

(1) 交换律　$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$

(2) 结合律　$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$

这两个运算规律可由图 6-9 和图 6-10 得到证明．

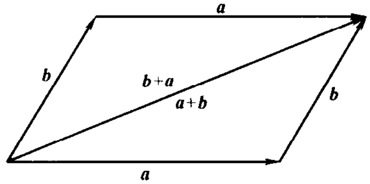


图 6-9

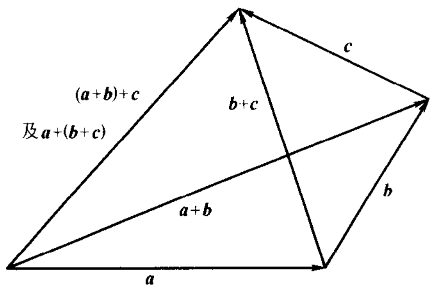


图 6-10

利用加法的逆运算可定义向量的减法．

定义　若 $\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}$，则称 $\boldsymbol{c}$ 为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的差向量，记作 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$.

也可以利用 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})$ 定义 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的差．图 6-11 中的 $\boldsymbol{c}$ 表示 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的差向量．

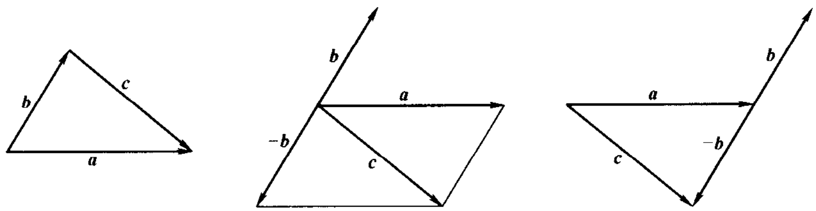


图 6-11

3. 数与向量的乘积

定义　实数 λ 与向量 $\boldsymbol{a}$ 的乘积 $\lambda\boldsymbol{a}$（叫做数乘向量）是一个向量，其模为 $|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|$，其方向为，当 $\lambda>0$ 时 $\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 同向；当 $\lambda<0$ 时 $\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 反向；当 $\lambda=0$ 时 $\lambda\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$.

数乘向量有下列运算规律：

(1)结合律　$\lambda(\mu\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$

(2)分配律　$(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$

$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$

证　(1)由于

$$|\lambda(\mu\boldsymbol{a})|=|\lambda||\mu\boldsymbol{a}|=|\lambda||\mu||\boldsymbol{a}|=|\lambda\mu||\boldsymbol{a}|=|(\lambda\mu)\boldsymbol{a}|$$

即 $\lambda(\mu\boldsymbol{a})$ 与 $(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$ 的模相等．又不论 λ,μ 为什么样的数，由定义可得知 $\lambda(\mu\boldsymbol{a})$ 与 $(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$ 的方向相同．因此有

$$\lambda(\mu\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$$

(2)证明略．

由数乘向量定义可知 $\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{a}^0$，因此，当 $|\boldsymbol{a}|\neq 0$ 时

$$\boldsymbol{a}^0=\frac{1}{|\boldsymbol{a}|}\boldsymbol{a}=\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$$

由此可以推出

定理 设 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 是非零向量，则 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$ 的充分必要条件是存在数 λ，使 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$.

证 充分性是显然的．下面证必要性．

设 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$，则必有 $\boldsymbol{a}^0=\boldsymbol{b}^0$ 或 $\boldsymbol{a}^0=-\boldsymbol{b}^0$，即

$$\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}=\frac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}\text{ 或 }\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}=-\frac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}$$

取 $\lambda=\left|\frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{a}}\right|$ 或 $\lambda=-\left|\frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{a}}\right|$，则有 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$. 定理得证．

4. 向量的投影

设向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$，如图 6-12 所示，过 $\boldsymbol{a}$ 的起点 M 与终点 N 分别作与向量 $\boldsymbol{b}$ 所在直线垂直的平面，此两平面分别与 $\boldsymbol{b}$ 所在直线交于点 M' 和 N'，则存在数 λ，使得 $\overrightarrow{M'N'}=\lambda\boldsymbol{b}^0$，将数 λ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 在向量 $\boldsymbol{b}$ 上的投影，记作 $(\boldsymbol{a})_b$，即 $(\boldsymbol{a})_b=\lambda$.

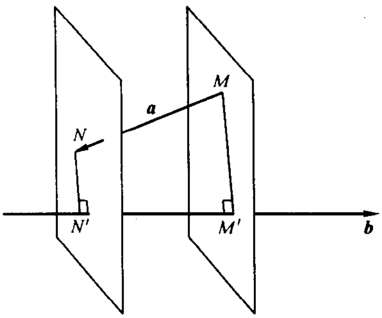


图 6-12

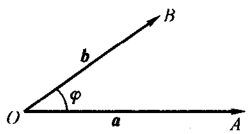


图 6-13

将向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的起点移到一起，如图 6-13 所示，规定不超过 π 的 $\angle AOB=\varphi$ 为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角，记作 $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$，即 $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=\varphi$. 另外，规定向量与坐标轴正方向的夹角为向量与坐标轴的夹角．

由以上定义可得向量投影具有如下性质：

(1) $(\boldsymbol{a})_b=|\boldsymbol{a}|\cos(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$

(2) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})_c=(\boldsymbol{a})_c+(\boldsymbol{b})_c$

5. 向量的坐标表示

前面介绍的向量的概念及线性运算都是用几何方法定义的，但是有些问题仅靠几何方法很难解决，下面要引进向量的坐标，把向量与数组联系起来，把向量的运算化成数的运算．

设$\overrightarrow{OM}$是起点为原点、终点为$M(x,y,z)$的向量，如图 6-14 所示，由向量加法有

$$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$$

在 x 轴、y 轴、z 轴的正方向分别取单位向量$\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$(称为基本单位向量)，则有$\overrightarrow{OA}=x\boldsymbol{i}$，$\overrightarrow{OB}=y\boldsymbol{j}$，$\overrightarrow{OC}=z\boldsymbol{k}$，于是有

$$\overrightarrow{OM}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$$

上式称为向量$\overrightarrow{OM}$的坐标表示式，也可以简写为

$$\overrightarrow{OM}=\{x,y,z\} \text{ 或 } \overrightarrow{OM}=(x,y,z)$$

其中，x,y,z 称为向量$\overrightarrow{OM}$的坐标．

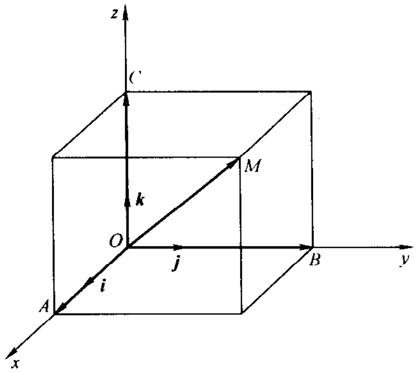


图 6-14

利用向量的坐标表示式，可以将前面用几何方法定义的向量的模及线性运算化成向量的坐标之间的运算(其中用到向量加法及数乘向量的运算规律)．

设 $\boldsymbol{a}=x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}+z_1\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}=x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j}+z_2\boldsymbol{k}$，则有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b}&=(x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}+z_1\boldsymbol{k})\pm(x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j}+z_2\boldsymbol{k})\\&=(x_1\pm x_2)\boldsymbol{i}+(y_1\pm y_2)\boldsymbol{j}+(z_1\pm z_2)\boldsymbol{k}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lambda\boldsymbol{a}&=\lambda(x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}+z_1\boldsymbol{k})\\&=\lambda x_1\boldsymbol{i}+\lambda y_1\boldsymbol{j}+\lambda z_1\boldsymbol{k}\end{aligned}$$

当$\overrightarrow{M_1M_2}$是起点为 $M_1(x_1,y_1,z_1)$ 终点为 $M_2(x_2,y_2,z_2)$ 的向量时，由于

$$\overrightarrow{M_1M_2}=\overrightarrow{OM_2}-\overrightarrow{OM_1}$$

$$\overrightarrow{OM_1}=x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}+z_1\boldsymbol{k}$$

$$\overrightarrow{OM_2}=x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j}+z_2\boldsymbol{k}$$

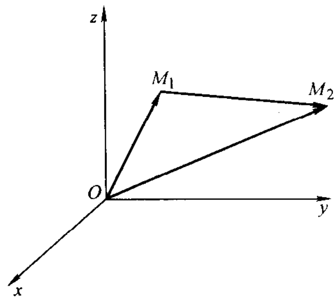


图 6-15

因此有

$$\overrightarrow{M_1M_2}=(x_2-x_1)\boldsymbol{i}+(y_2-y_1)\boldsymbol{j}+(z_2-z_1)\boldsymbol{k}$$

此式即为向量$\overrightarrow{M_1M_2}$的坐标表示式，其中 x_2-x_1、y_2-y_1、z_2-z_1 为$\overrightarrow{M_1M_2}$的坐标．因此，若将$\overrightarrow{M_1M_2}$平移，使 M_1 与原点重合时，则 M_2 被移到点$(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)$．

利用向量的坐标，可以将 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$ 的充分必要条件 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$ 表示为

$$x_2=\lambda x_1,\ y_2=\lambda y_1,\ z_2=\lambda z_1$$

或

$$\frac{x_1}{x_2}=\frac{y_1}{y_2}=\frac{z_1}{z_2}$$

式中，若某个分母为零，则相应的分子也应取为零．例如，$z_2=0$ 表示向量 $\boldsymbol{b}$ 的起点与终点的 z 坐标相同，即向量 $\boldsymbol{b}$ 垂直于 z 轴，由于 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$，故 $\boldsymbol{a}$ 也垂直于 z

轴,因此相应的 z_1 应是零.

6. 向量的方向角与方向余弦

这里要讨论如何用向量的坐标表示向量的方向.

设向量 $\boldsymbol{a}$ 与三个坐标轴正向的夹角分别为 α、β、γ,则 α、β、γ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向角,$\cos\alpha$、$\cos\beta$、$\cos\gamma$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向余弦. 方向角或方向余弦惟一地确定了向量的方向.设 $\boldsymbol{a}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$,将 $\boldsymbol{a}$ 的起点移至原点,使 $\overrightarrow{OM}=\boldsymbol{a}$,则有

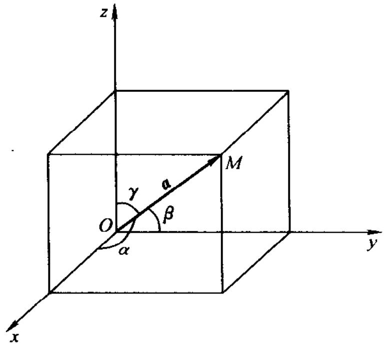


图 6-16

$$\cos\alpha=\frac{x}{|\boldsymbol{a}|}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

$$\cos\beta=\frac{y}{|\boldsymbol{a}|}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

$$\cos\gamma=\frac{z}{|\boldsymbol{a}|}=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

由以上三式可得

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$$

且

$$\boldsymbol{a}^0=\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}$$

例 1 已知 $M_1(1,-2,3)$,$M_2(0,2,-1)$,求 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 的模及方向余弦.

解 $\overrightarrow{M_1M_2}=(0-1)\boldsymbol{i}+[2-(-2)]\boldsymbol{j}+(-1-3)\boldsymbol{k}$

$=-\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}-4\boldsymbol{k}$

$$|\overrightarrow{M_1M_2}|=\sqrt{(-1)^2+4^2+(-4)^2}=\sqrt{33}$$

$$\cos\alpha=\frac{-1}{\sqrt{33}},\cos\beta=\frac{4}{\sqrt{33}},\cos\gamma=\frac{-4}{\sqrt{33}}$$

例 2 已知向量 $\boldsymbol{a}$ 的模为 5,它与 x 轴、y 轴正方向的夹角都是 $60°$,与 z 轴正方向的夹角是钝角,求向量 $\boldsymbol{a}$.

解 $\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{a}^0=|\boldsymbol{a}|\{\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma\}$ 由于

$$\alpha=\beta=60°,\cos\alpha=\cos\beta=\frac{1}{2}$$

得

$$\begin{aligned}\cos^2\gamma&=1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta\\&=1-(\frac{1}{2})^2-(\frac{1}{2})^2=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

由于γ是钝角，故

$$\cos\gamma=-\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}&=5\left\{\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right\}\\&=\left\{\frac{5}{2},\frac{5}{2},-\frac{5\sqrt{2}}{2}\right\}\end{aligned}$$

习　题　6.2

1. 已知向量$\boldsymbol{a}$和$\boldsymbol{b}$的夹角$\theta=60°$，且$|\boldsymbol{a}|=5$，$|\boldsymbol{b}|=8$，计算$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$和$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$.

2. 试用向量证明：如果平面上一个四边形的对角线互相平分，则它是平行四边形.

3. 正六边形$ABCDEF$(字母按逆时针方向排列)，设$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AE}=\boldsymbol{b}$，试用向量$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$表示向量$\overrightarrow{AC}$、$\overrightarrow{AD}$、$\overrightarrow{AF}$和$\overrightarrow{CB}$.

4. 设向量$\overrightarrow{AB}=8\boldsymbol{i}+9\boldsymbol{j}-12\boldsymbol{k}$，其中点$A$的坐标为$(2,-1,7)$，求点$B$的坐标.

5. 求平行于向量$\boldsymbol{a}=6\boldsymbol{i}+7\boldsymbol{j}-6\boldsymbol{k}$的单位向量.

6. 已知向量$\boldsymbol{a}=\{1,-2,3\}$，$\boldsymbol{b}=\{-4,5,8\}$，$\boldsymbol{c}=\{-2,1,0\}$，求向量$\boldsymbol{d}$，使$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d}$是零向量.

7. 证明：三点$A(1,0,-1)$，$B(3,4,5)$，$C(0,-2,-4)$共线.

8. 设向量$\boldsymbol{m}=3\boldsymbol{i}+5\boldsymbol{j}+8\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{n}=2\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}-7\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{p}=5\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-4\boldsymbol{k}$，求向量$\boldsymbol{a}=4\boldsymbol{m}+3\boldsymbol{n}-\boldsymbol{p}$在$x$轴上的投影.

9. 设点$A(3,2,-1)$，$B(5,-4,7)$，$C(-1,1,2)$，求$\triangle ABC$的由点C向AB边所引的中线的长度.

10. 设点A、B、M在同一直线上，$A(1,2,3)$，$B(-1,2,3)$，且$AM:MB=-\frac{3}{2}$，求点M的坐标.

11. 已知点$M(4,\sqrt{2},1)$，$N(3,0,2)$，计算向量$\overrightarrow{MN}$的模、方向余弦和方向角.

12. 设一向量与x轴和y轴的夹角相等，与z轴的夹角是前者的两倍，求此向量的方向角.

13. 设向量$\boldsymbol{a}$与单位向量$\boldsymbol{j}$成$60°$角，与单位向量$\boldsymbol{k}$成$120°$角，且$|\boldsymbol{a}|=5\sqrt{2}$，求向量$\boldsymbol{a}$.

14. 向量$\boldsymbol{a}$平行于两向量$\boldsymbol{b}=\{7,-4,-4\}$和$\boldsymbol{c}=\{-2,-1,2\}$夹角的平分

线，且 $|\boldsymbol{a}|=5\sqrt{6}$，求 $\boldsymbol{a}$.

6.3 向量的乘积

6.3.1 向量的数量积

1. 数量积的概念

由物理学知识我们知道，当质点在力 $\boldsymbol{F}$ 作用下沿某一直线由 A 点移动到 B 点，如图 6-17 所示，若记 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{s}$，则力 $\boldsymbol{F}$ 所做的功为

$$W = |\boldsymbol{F}|\,|\boldsymbol{s}|\cos(\boldsymbol{F},\boldsymbol{s}) \tag{6-1}$$

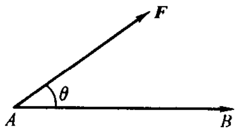


图 6-17

其中，$(\boldsymbol{F},\boldsymbol{s})$ 为 $\boldsymbol{F}$ 与 $\boldsymbol{s}$ 的夹角．两个向量之间的这种运算在其他实际问题中也会遇到，故给出如下定义：

定义 设 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 为两向量，则 $|\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|\cos(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$ 叫做 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的数量积（又称点积或内积），记作 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$，即 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|\cos(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$，其中 $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$ 是 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角．

利用向量的投影，有

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = |\boldsymbol{b}|(\boldsymbol{a})_b = |\boldsymbol{a}|(\boldsymbol{b})_a$$

$$(\boldsymbol{a})_b = \frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|} \quad (\boldsymbol{b})_a = \frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|}$$

由数量积的定义可知，式(6-1)中的功可以表示为

$$W = \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{s}$$

数量积有下列运算规律：

(1)交换律 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$

(2)结合律 $\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})=(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}(\lambda\boldsymbol{b})$（$\lambda$ 是数量）

(3)分配律 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$

其中，交换律和结合律可利用数量积的定义证明．

由于

$$\begin{aligned}&(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}\\ =\ &|\boldsymbol{c}|(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})_c\\ =\ &|\boldsymbol{c}|(\boldsymbol{a})_c+|\boldsymbol{c}|(\boldsymbol{b})_c\\ =\ &\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}\end{aligned}$$

分配律得证

2. 数量积的坐标表示式

设向量