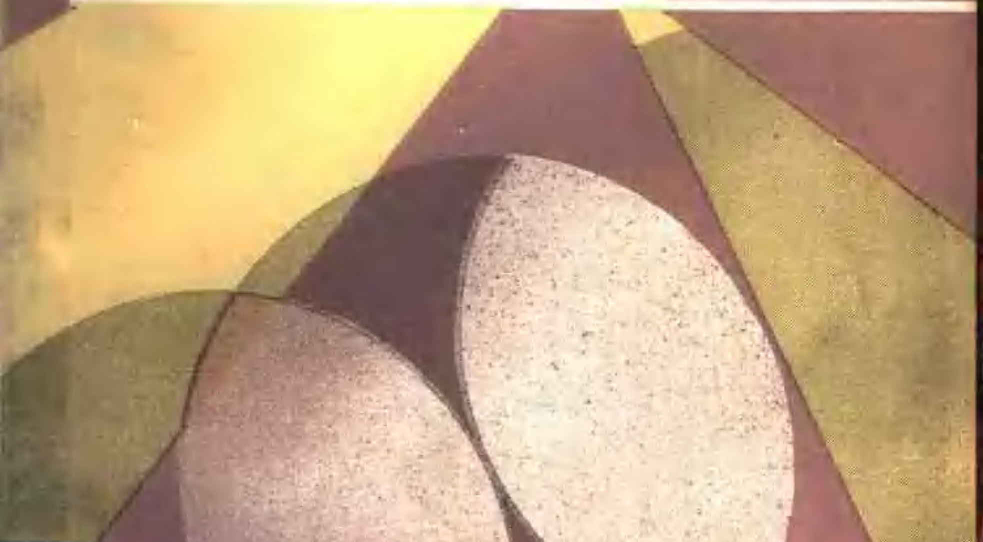
ZhXShX

中学数学丛书

刘世泽

平面向量



ZHONGXUE SHUXUE CONGSHU

湖北教育出版社

ZHONGXUE SHUXUE CONGSHU

ZhXShX

中学数学丛书

平面向量

刘 世 泽

湖 北 教 育 出 版 社

平 面 向 量

刘 世 泽

*

湖北教育出版社出版、发行　　新华书店湖北发行所经销

武汉大学出版社印刷总厂印刷

787×1092毫米32开本　5.5印张　1插页　122 000字

1989年5月第1版　1989年5月第1次印刷

印　数：1－1 600

ISBN 7—5351—0060—0/G·53

定　价：1.75元

编 者 的 话

为了帮助广大中学生学习数学基础知识，一九八一年秋，湖北人民出版社委托我们湖北省暨武汉市数学学会推荐介绍作者，组织编写了《逻辑代数初步》、《线性代数初步》、《概率统计初步》、《微积分初步》四本小册子，分别介绍中学数学教材中有关高等数学的初步知识。这一工作，得到大中学校教师的热情支持，并希望以中学生为主要对象，编辑出版一套《中学数学丛书》。根据读者的要求和老师们的意见，出版社约请我会在此基础上主编一套《中学数学丛书》。我们认为，这个工作是很有意义的。于是，发动高等院校及中学的广大数学教师以及数学研究工作者共同讨论，决定了二十几个选题，结合出版社组稿的四种，制定了《中学数学丛书》选题计划。

《中学数学丛书》的编写，围绕中学数学教学大纲和全国统编数学教材，从中学生的学习实际出发，对中学数学知识适当作了拓宽和加深。编写这套丛书的目的，是为了帮助中学生巩固基础知识，加强基本训练，熟练掌握基本技能，培养分析和解决数学问题的能力，提高学习质量。

参加这套丛书编写的，有大专院校的老师和数学研究工作者，以及教学经验丰富的中学教师。编写中充分注意中学生的实际，考虑到他们的实际水平和接受能力，力求写得深入浅出，通俗易懂，使一般水平的学生都能看懂，且学有所得。

《中学数学丛书》共计三十余册，多数小册子内容是和

教材相对应的，几本综合性的小册子，是为了帮助同学们掌握数学概念，学会分析与归纳，寻找解题途径并掌握较好的解题方法而编写的。丛书中每本小册子既相对独立又互相联系。同学们既可系统阅读，也可以根据自己的情况有选择地使用。学习中哪一方面比较薄弱，哪一方面存在疑难，便可选择其中的有关部分阅读。同时，对教师教学亦有一定的参考作用。

这套丛书出版以后，欢迎读者提出批评与建议，以便我们组织力量进一步修改再版，把这套丛书编好。同时，希望读者对进一步编好中学生课外读物提出宝贵意见。

湖北省暨武汉市数学学会

一九八二年五月

目　　录

第一章　向量的基本概念

向量的基本概念是从物理学和工程技术中抽象出来的；反过来，向量的理论和方法，又成为解决物理学和工程技术问题的重要工具．

§1　标量和向量　向量的几何表示

(一) 标量和向量

在客观世界中，我们经常遇到两类不同性质的量：一类是必须带上一定的单位、并用数值表示其大小的量，如长度、面积、体积、质量等，此种量称为标量；另一类量不仅有数值表示其大小，而且还有指定的方向，如位移、速度、力、力矩等，这类量我们称为向量或矢量．

定义1　既有大小又有方向的量称为向量(或矢量)．

例 1　一条河流以每小时 5 公里的速度向东南方向流动的流速是向量；与水平方向成30°角的方向上作用50牛顿的力也是向量．

向量不仅在力学、工程技术上应用较广，而且对数学理论本身也有着重要的意义．

(二) 向量的几何表示

通常用有向线段表示向量．起点(或始点)为 A、终点(或

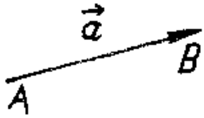


图 1.1

端点)为 B 的有向线段记为 $\overrightarrow{AB}$(图1.1)．有向线段 $\overrightarrow{AB}$ 的长(即 A 和 B 两点间的距离)记为 $|\overrightarrow{AB}|$(或 $|AB|$)，以表示向量的大小．有向线段 $\overrightarrow{AB}$ 的方向(即由起点到终点的方向并在终点处画一个“箭头”)，以表示向量的方向．向量 $\overrightarrow{AB}$ 通常也用粗体的字母 $\boldsymbol{a}$ 或 $\boldsymbol{b}$ 表示；或用普通字母上面附上箭头如 $\vec{a}$ 或 $\vec{b}$ 表示．

平面向量有时用符号(25，30°)表示，意思是向量的大小为25个单位，其方向为与水平线的正向(规定从左向右为正向)成30°夹角．今后我们将一向量与水平线的正向所夹的有向角 θ(逆时针旋转为正，顺时针旋转为负)称为方位角．($0\leqslant\theta<2\pi$)

例 2 试用有向线段表示作用于质点 O 的两个力：$\vec{F}_1$(20牛顿，120°)，$\vec{F}_2$(15牛顿，45°)．

如图 1.2 所示，取 1 厘米长度代表10牛顿，那么20牛顿的力 $\vec{F}_1$ 就用一个 2 厘米长的有向线段 $\overrightarrow{OA}$ 表示．同样，力 $\vec{F}_2$ 就用有向线段 $\overrightarrow{OB}$ 表示．

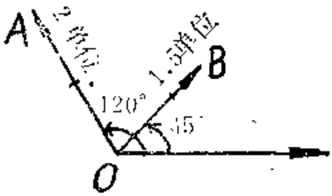


图 1.2

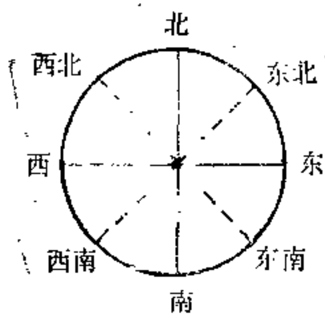


图 1.3

平面向量的方向有时也用类似于罗盘的方位来表示．如图1.3所示，如与水平线的正向成0°的方向是正东，成45°的方向是东北，成270°的方向是正南，等等．

定义2　向量$\vec{a}$的大小称为向量$\vec{a}$的模（或长，或绝对值），记为$|\vec{a}|$．

起点和终点重合的向量称为零向量，记为$\vec{O}$或$\overrightarrow{AA}$．零向量的模为零，它的方向是不确定的或任意的．

模为1个单位长的向量称为单位向量，常用$\vec{e}$表示．与向量$\vec{a}$有相同方向的单位向量，称为向量$\vec{a}$的单位向量，通常用$\vec{a}_0$表示．

向量的模是非负实数．

习 题 1.1

1．指明下列各量哪些是标量，哪些是向量？

①朝东西方向移动50公里的运动；

②一间教室的面积60平方米；

③全校学生的人数；

④与水平方向成60°角的方向上作用10牛顿的力；

⑤一列火车由南向北方向上以64公里/小时的速度行驶；

⑥某地区工业生产总产值去年比前年增长10%．

2．用给定的数据，按比例画出下列向量：

①向量$\overrightarrow{AB}$的大小为400单位，方位角为45°，所用的比例为1厘米:100单位；

②25牛顿的力，作用在正北方向上，比例为1厘米:10牛顿；

③方向为西北的一个500公里/小时的速度，比例为1厘米：125公里/小时；

④方位角为250°，大小为4单位的向量$\overrightarrow{OM}$，比例为1厘米：2单位.

§2　向量的种类　相等向量　平行向量

（一）向量的种类

根据实际问题的需要，按向量起点的不同情况，可分为：

(1) 自由向量：只由向量的模和方向所确定，空间的任意点均可作为它的起点.

(2) 滑动向量：只由向量的模、向量所在的直线和它的方向所确定，向量所在直线上的任何点均可作为它的起点.

(3) 定位向量(或位置向量，或向径)：由向量的模、方向和起点所确定.

例如起点在原点的向量$\overrightarrow{OP}$，它可以确定P点的位置，故$\overrightarrow{OP}$为定位向量.

按向量所在空间的不同情况，可分为：

(1) 轴上向量(共线向量)：位于同一有向直线上(轴)的向量，也称为一维向量.

(2) 平面向量(共面向量)：位于同一平面上的向量，也称为二维向量.

(3) 空间向量：位于同一空间的向量，也称为三维向量.

在本书中，我们主要研究平面的自由向量及其在几何中的应用.

（二）相等向量

定义3　两个方向相同、模相等的向量称为相等向量．向量 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 相等，记为 $\vec{a}=\vec{b}$，并约定凡零向量均相等．

由向量相等的定义，显然有

(1) 反身性：对于任一向量 $\vec{a}$，有 $\vec{a}=\vec{a}$；

(2) 对称性：若 $\vec{a}=\vec{b}$，则 $\vec{b}=\vec{a}$；

(3) 传递性：若 $\vec{a}=\vec{b}$，$\vec{b}=\vec{c}$，则 $\vec{a}=\vec{c}$．

应当怎样证明两个向量 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 相等呢？这必须验证如下两条：

(1) $|\vec{a}|=|\vec{b}|$，即向量 $\vec{a}$ 的模等于向量 $\vec{b}$ 的模；

(2) $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 的方向相同．具体地说，$\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 所在的直线应互相平行，且 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 的指向（或方位）要一致．

由此看出，两个向量相等与代数里两个数值相等有着本质的差别，因此向量相等通常也称为几何相等．

例 3　在图1.4中，$ABCD$ 为平行四边形，指明哪些是相等向量．

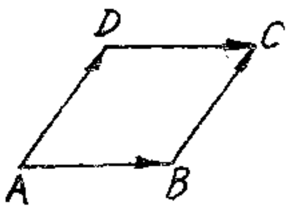


图　1.4

解：因为平行四边形的对边平行且相等，故有

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC},$$

$$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}.$$

由于定义 3 是指自由向量的相等，所以两个相等的向量，它们的起点可以不相同，也就

是说把同一向量可以平移到平面上的任何位置，所得的向量都是相等的向量.

不合定义 3 的两个向量就称为不相等. 如果向量$\overrightarrow{a}$和$\overrightarrow{b}$不相等，记为$\overrightarrow{a} \neq \overrightarrow{b}$. 向量$\overrightarrow{a}$和$\overrightarrow{b}$不相等，能否象实数一样比较它们的大小呢？我们的回答是不能的. 因为向量是由它的模和方向所确定，所以"大于"或"小于"的概念对向量不适用，即记号

$$\overrightarrow{a} > \overrightarrow{b} \quad \text{或} \quad \overrightarrow{a} < \overrightarrow{b}$$

没有意义. 由于向量的模是非负实数，按照实数的大小比较，两个向量的模之间是可以比较大小的，即记号

$$\left|\overrightarrow{a}\right| > \left|\overrightarrow{b}\right| \quad \text{或} \quad \left|\overrightarrow{a}\right| < \left|\overrightarrow{b}\right|$$

是有意义的.

同样，记号$\overrightarrow{a} = 2$个单位长没有意义，记号$\left|\overrightarrow{a}\right| = 2$个单位长却有意义.

（三）平行向量

实际生活中说力有大小，是指力的模的大小. 例如在拔河比赛中，甲队比乙队力气大，是把甲队的拉力的模大于乙队拉力的模. 如甲队用1000公斤的力拉绳子的一头，而乙队在相反方向用900公斤的力拉绳子的另一头，比赛结果甲队准赢. 如甲、乙两队的势均力敌，就是说甲队的拉力和乙队的拉力相对地平衡了，分不出胜负. 这时甲队和乙队的拉力是大小相等，方向相反的两个力，这样的力有如下定义.

定义 4　与向量$\overrightarrow{a}$的模相等，而方向相反的向量$\overrightarrow{b}$称为$\overrightarrow{a}$的负向量(或反向量)，以$-\overrightarrow{a}$表示，即有　$\overrightarrow{b} = -\overrightarrow{a}$.

若 $\vec{b}$ 为 $\vec{a}$ 的负向量，由定义 4 可知，$\vec{a}$ 也为 $\vec{b}$ 的负向量，即 $\vec{a}=-\vec{b}$. 因此模相等、方向相反的两个向量叫做互为负向量.

如图1.4可知，$\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{BA}$，$\overrightarrow{BA}=-\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{CD}$，$\overrightarrow{CD}=-\overrightarrow{AB}$.

定义 5 方向相同或相反的向量称为平行向量. $\vec{a}$、$\vec{b}$ 是平行向量，记为 $\vec{a}\parallel\vec{b}$. 规定零向量平行于任何向量.

平行向量可分为两类：一类是方向相同的平行向量，称为同向向量. 另一类是方向相反的平行向量，称为反向向量. 若 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 为同向向量，有时记为 $\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b}$；若 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 为反向向量，有时记为 $\vec{a}\uparrow\downarrow\vec{b}$.

相等向量是同向向量，但同向向量却不一定相等；互为负向量是反向向量，但反向向量却不一定是互为负向量.

如果 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 是平行向量，则可将 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 平移到同一直线上，故平行向量又称为共线向量.

思考：若 $\vec{a}=\vec{b}$ 或 $\vec{a}=-\vec{b}$，则 $\vec{a}\parallel\vec{b}$ 吗？反之若 $\vec{a}\parallel\vec{b}$，则 $\vec{a}=\vec{b}$ 或 $\vec{a}=-\vec{b}$ 吗？

例4 如图1.5所给的平面向量，试指出：

①那些向量是相等的；②那些向量是互为负向量；

③那些向量是同向的；④那些向量是反向的；

⑤那些向量是平行的

解：①相等向量有 $\vec{a}=\vec{c}$，$\vec{a_1}=\vec{d_1}$；

②互为负向量有 $\vec{a}$（或 $\vec{c}$）与 $\vec{b}$，$\vec{a_1}$（或 $\vec{d_1}$）与 $\vec{c_1}$，$\vec{a_2}$ 与 $\vec{b_2}$；

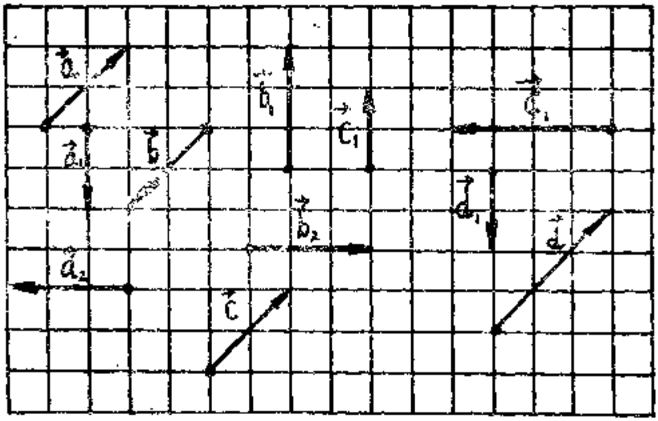


图 1.5

③凡相等向量均为同向的，此外还有：$\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{d}$，$\vec{b_1}\uparrow\uparrow\vec{c_1}$，$\vec{a_2}\uparrow\uparrow\vec{c_2}$；

④凡互为负向量均为反向的，此外还有：$\vec{b}$与$\vec{d}$反向，$\vec{a_1}$（或$\vec{d_1}$）与$\vec{b_1}$反向，$\vec{b_2}$与$\vec{c_2}$反向；

⑤平行向量：$\vec{a}\parallel\vec{b}\parallel\vec{c}\parallel\vec{d}$，$\vec{a}\parallel\vec{b_1}\parallel\vec{c_1}$，$\vec{a_2}\parallel\vec{b_2}\parallel\vec{c_2}$.

习 题 1.2

1．如图1.6所示，O为正六边形$ABCDEF$的中心，试指出：①哪些是相等向量；②哪些是互为负向量；③哪些是平行向量．

2．如图1.7所示，指出给定的向量哪些是：①相等的；②同向的；③互为负向量；④反向的；⑤平行的．

3．求证 $-(-\vec{a})=\vec{a}$．

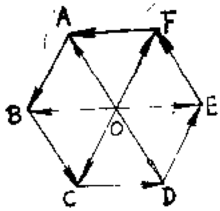


图 1.6

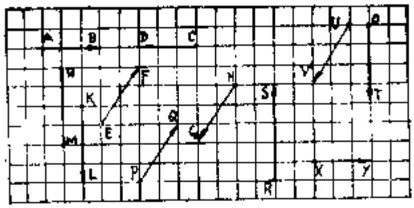


图 1.7

小 结

1. 向量：具有大小和方向的量.

2. 向量的几何表示：用有向线段.

3. 特殊向量：

(1) 零向量($\vec{0}$)；(2) 单位向量($\vec{e}$)；

(3) 平行向量：同向向量(包括相等向量)；反向向量(包括互为负向量).

复习题一

1. 设 X 轴表示向东方向，Y 轴表示向北方向，试画出表示下列各位移的向量：

①从原点向东北 5 米；　②从原点向北 3 米；

③从原点向西 4 米；　④从原点向西南 2 米.

2. 凡是单位向量都相等吗？为什么？

3. 向量在什么条件下才能相等？如果 $|\vec{a}|=|\vec{b}|$，是否可以说 $\vec{a}=\vec{b}$，为什么？

4. 已知$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$和$A\neq B$，求证：

① $AB\parallel CD$；② $|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{CD}|$；③ $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BD}$.

（提示：应研究两种情况，一是A、B、C、D在同一直线上；二是不在同一直线上。）

5. 点O、A、B是不同的三点，试证：$\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{BO}\Leftrightarrow O$是线段$AB$的中点.

（符号"$\Leftrightarrow$"表示当且仅当）