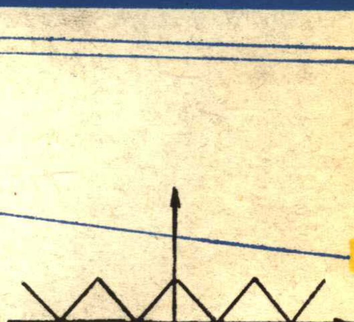
逻辑与中学数学

李元中　高安民　编

陕西科学技术出版社



逻辑与中学数学

逻辑与中学数学

李元中　高安民　编

陕西科学技术出版社

逻辑与中学数学

李元中　高安民　编

陕西科学技术出版社出版

（西安北大街131号）

陕西省新华书店发行　　安康地区印刷厂印刷

开本787×1092 1/32　印张3.5 字数71,000

1982年2月第1版　　1982年2月第1次印刷

印数1—23,000

统一书号：7202·30　　定价：0.26元

前　言

逻辑学是研究思维规律及思维形式的科学，它和数学有着密切的关系。

由于缺乏逻辑知识，不少中学生常常在数学推证和演算中发生错误。为了使他们很好地掌握数学知识，就必须培养他们进行周密地思考、严谨地推理、清晰而准确地进行表达的本领，因而就要使他们掌握一些必要的逻辑知识。

数学教学的任务之一，就是培养学生的逻辑思维能力，教师在这一方面必须予以足够的重视。但是，脱离数学单纯地传授逻辑知识，是不会收到预期效果的，只有把逻辑知识和数学结合起来叙述，才容易使学生理解得清楚、运用得灵活、记忆得牢固。若能结合他们已有的知识进行分析讲解，将会使他们产生更大的兴趣。

本书把逻辑和数学结合起来进行讲解，既注意了结合中学数学典型教材进行分析，也注意到学生在数学推证或演算过程中因缺乏逻辑知识而常犯的一些错误的纠正。因此，本书既可作为中学数学教学的参考，也可以作为中学生的课外读物。书中有个别例子超出了中学数学范围，同学们阅读时可以先跳过去，这无妨于对整个意思的理解。

本书编写过程中，魏庚人教授曾给予作者极大的鼓励和支持，并亲自审阅了原稿，提出了指导性的意见，谨此表示衷心感谢。

由于编者水平所限，书中缺点错误在所难免，请读者批评指正。

编　者

一九八一年二月

目　　录

第一章　逻辑学及逻辑思维的基本规律

§1　逻辑学及其研究的对象

人们对事物的认识过程，可以分为两个阶段：开始接触事物时，只可能看到事物的现象方面，所得到的只是关于事物的片面的、零碎的、表面的印象，这叫认识的感性阶段；在感性认识的基础上，把所获得的感性材料，经过思考、分析，加以去粗取精、去伪存真、由此及彼、由表及里的整理和改造，形成概念、判断、推理，从而反映事物的全体、本质和内部联系，这叫认识的理性阶段。

认识的理性阶段是人类头脑中的一种思想活动，通常称为思维。

思维有它固有的形式和规律，这些规律不是主观的产物，而是客观事物、现象间的关系在人们头脑中的反映。思维的规律有同一律、矛盾律、排中律和充足理由律。

逻辑学除了研究思维的规律以外，还研究思维的形式。思维的形式有：概念、判断、推理、证明、假说等。因此，我们可以说：

逻辑学是研究思维的规律及形式的科学。

语法是研究词组成句子的规律。要能前后一贯、层次分明、条理清楚地进行写作，就必须借助语法的帮助。与此类

似，形式逻辑提供了正确思维的规律和形式，为要周密地思考，就必须正确地使用思维形式并遵守思维规律。诚然，没有学过逻辑的人，也可能作出合乎逻辑的论断，好象没有学过语法的人也能写出通顺的句子一样，这是因为人们在实践的过程中，都在不同程度上积累了一定的逻辑知识。但是，仅仅停留在自发阶段是不够的。学习一些逻辑知识，可以使我们把不自觉地运用逻辑的能力提高到自觉的阶段，有利于培养我们确定地、无矛盾地、前后一贯地、论证充足地进行思维的能力。

§2　逻辑与数学教学

既然形式逻辑是研究思维规律及形式的科学，而任何科学的研究都必须借助正确的思维，所以形式逻辑在各门学科中都是普遍适用的，而它和数学的关系尤为紧密。

下面我们看一个例子：

1979年全国高等院校入学考试数学试题中有一道证明勾股定理的题目，有不少考生已经作出了如图1—1的图形，

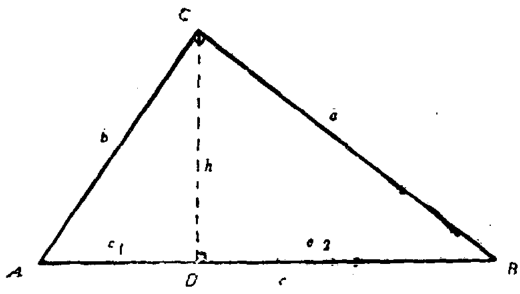


图　1—1

知道$\triangle ABC$与$\triangle ACD$、$\triangle CBD$是相似三角形，也知道相似

三角形对应边成比例的定理，并且导出了许多正确的关系式，如：

$$\frac{c}{b}=\frac{a}{h}, \quad \frac{a}{c_2}=\frac{b}{h}, \quad \frac{c_1}{h}=\frac{h}{c_2}$$

$$\frac{c}{b}=\frac{b}{c_1}, \quad \frac{b}{a}=\frac{c_1}{h}, \quad \frac{c}{a}=\frac{a}{c_2}$$

……………………………………………………

但却在这繁多的关系式中理不出头绪，分不清哪些是有用的，哪些是无用的，颠来倒去始终导不出 $c^2=a^2+b^2$ 的结论。

这是什么原因呢？是数学知识不足吗？不是！这里已经具备了证明勾股定理所需要的数学知识，原因在于逻辑思维的混乱，没有紧紧抓住要证明的结论，没有分析要证明这个结论究竟需要哪些论据，而只是盲目地列关系式。虽然所列的关系式都是正确的，但正确的却未必是有用的，从而自己为自己设置了一个迷阵，搅乱了思维。

这里若能抓住欲证的结论，只找与结论有关的论据，就会自然地留神到其中含有 a^2、b^2 的关系式：

$$\frac{c}{b}=\frac{b}{c_1} \qquad \frac{c}{a}=\frac{a}{c_2}$$

即 $b^2=cc_1$， $a^2=cc_2$

从而得 $a^2+b^2=c_1c+c_2c=(c_1+c_2)c=c^2$。

另有一些考生是利用余弦定理证明的，其证明如下：

"因为 $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$，

而 $\angle C=90°$， $\cos C=0$，

所以 $c^2=a^2+b^2$。"

这种证法可以不可以呢？不可以！这犯了逻辑中循环论证的错误。因为在中学课本里，余弦定理是用勾股定理证明的。

再如，概念不清，乱用公式、定理，推理方式不当等，也常常造成错误，这些例子我们在后面会陆续看到。

从上面的例子可以看到，逻辑和数学确有极其密切的关系。我们知道，数学教材本身就是按一定的逻辑系统组织起来的，处处都贯串着丰富的逻辑知识，学习一些逻辑知识，对数学教学和学习是会有帮助的。

§3 逻辑思维的基本规律

形式逻辑有一套从无数经验中提炼出来的基本规律。

远在公元前四世纪时，古希腊的大哲学家亚里斯多德就发现了正确思维必须遵守的三个规律：同一律、矛盾律、排中律。到了十七世纪末，德国的数学家和哲学家莱布尼兹又补充了一个充足理由律。这些规律反映了客观事物和现象间所固有的最简单的和最一般的关系。

正确的思维应该是确定的、无矛盾的、前后一贯的、论证充足的。如果不是这样，思维就将陷于混乱，表达思维的语言也就会语无伦次。逻辑思维的基本规律，是我们正确认识客观世界和正确表达思想必须遵守的规律。

一、同一律

同一律的公式是：A 是A。

这里A表示一个概念。它的意思是，在进行推理和论证的过程中，每一个概念在同一时间和同一关系下，应该是确定不变的。换句话说，在同一讨论过程中，每个概念都应当按照同一的意义来使用，不能忽而这样忽而那样。因此，用同一个概念去表达两个不同的对象，或者用两个不同的概念去表达同一对象都是违反同一律的。那样会破坏思维的一贯

性而造成逻辑错误。这样的错误通常叫做偷换概念。

在日常生活和数学的讨论中，不自觉地犯偷换概念错误的例子是很多的。例如：物质是不灭的，而这张桌子是物质，所以这张桌子是不灭的。这显然是荒谬的。造成荒谬的原因是，前后两次所使用的“物质”不是同一的涵意，前者是指哲学意义的物质，而后者是指具体的物体而言。又如：任何数的平方都是非负的，i是一个数，而$i^2=-1$。这是由于前后两次使用“数”这一概念时，不是按同一意义使用的，前者是指实数而言，而后者却是指复数而言。

此外，以特殊代替一般也是一种常见的错误。例如，有的学生证明勾股定理是这样进行的：因为边长为3、4、5的三角形是直角三角形，而$3^2+4^2=5^2$，所以勾股定理成立。这是用特殊的直角三角形，取代了论题中的一般直角三角形的概念。

马克思主义者认为，客观事物是在不断地发展变化的。古希腊的哲学家赫拉克利特也生动地表述过这种观点，他说：“太阳每天都是新的”，“我们不能两次走下同一条河”。那么承认了同一律，是不是就承认了事物是永恒不变的呢？是不是就违反了马克思主义这一基本观点呢？不是！这可以从两方面来说明。首先，同一律中的A是指事物的概念，并非事物的本身。事物本身在变化，而作为反映事物的概念却有它的相对稳定性。例如，世界上的河流在不断地变化着，但“河流”这一概念却相对地稳定着，它不能既是河流又是别的什么。另一方面，事物固然在不断发展变化，但也有它相对稳定的一面。黄河在不断地变化，但毕竟还是黄河；小红不断地长高，但毕竟还是小红。所以，作为反映事

物的概念也是相对稳定的。如果我们不保持同一律，所讨论的事物在我们的思想中就会忽而变成这个，忽而又变成那个，这样只会使我们的讨论陷于混乱。

由概念组成判断，由判断组成推理。同一律要求在讨论过程中保持概念的同一性，就是为了统一推理的前提。否则，推理将无法进行。

二、矛盾律

矛盾律的公式是：A不是非A。

它的意思是，在推理或讨论的过程中，在同一时间、同一关系下，不能对同一对象作出两个相反的论断。

例如，我们不能说，张三是一个好人，同时他又是一个坏人；这个方程有根，同时这个方程又无根；直线l_1与l_2平行，同时l_1又与l_2相交。

违反矛盾律常常是不自觉的。例如图1—2所示：

在直角三角形ABC中，$\angle C=90°$，$\angle B>\angle A$。

作$\angle C$的平分线，与AC的中垂线交于O点，$\triangle COA$是等腰三角形，因而

$$\angle OAD=45°$$

而$\angle A>\angle OAD=45°$，

又$\angle A+\angle B=90°$，

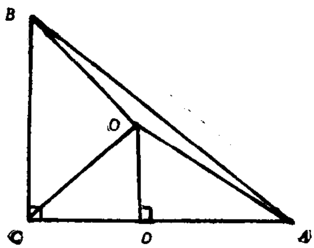


图 1—2

所以$\angle B<45°$，从而$\angle A>\angle B$与原来的$\angle B>\angle A$矛盾。

这是因为本来$\angle C$的平分线与AC的中垂线交于三角形之外，但作图中不自觉地违反了矛盾律，从而导致错误。

矛盾律是用否定的形式来表现同一律的，就其实质来

说，它们两个是完全相同的，是同一个道理的两面。其实我们在讲同一律时说，不允许偷换概念，就已经涉及到了矛盾律。

马克思主义认为，一切事物中都存在着矛盾，矛盾是事物发展的动力，它贯穿于事物发展运动的始终。而现在形式逻辑又要求不出现矛盾，这是怎么一回事呢？原来它们二者所说的“矛盾”不是同一的。一个是指客观现实中的矛盾，一个是指思维过程中的矛盾。客观现实中确实存在着矛盾，而逻辑思维中却不应该出现矛盾。

三、排中律

排中律的公式是：或者是A，或者是非A。

它的意思是：在同一讨论过程中，A和非A有一个且仅有一个是对的，不能有第三种情形出现。即同一对象具有某种性质或不具有某种性质，二者必居其一，且仅居其一。

为了弄清排中律与矛盾律的联系与区别，我们先介绍一下互相矛盾关系与互相反对关系。

“a大于零”与“a不大于零”，二者中必有一个且仅有一个是真实的，不能二者都对，也不能二者都错；“$\angle A$是锐角”与“$\angle A$不是锐角”，也具有上述关系。象这样的两个判断具有的关系称为互相矛盾的关系。“a大于零”与“a小于零”这二者之中，若前一个为真，肯定后一个不真，但由前一个不真，不能肯定后一个必真，因为还有第三种可能“a等于零”的情况存在。象这样的两个判断之间的关系，称为互相反对的关系。“$\angle A$是锐角”与“$\angle A$是钝角”是互相反对的关系，因为若已知其一个为真，那么另一个必然不真，但由一个是不真的，并不能肯定另一个是真的，因为

它们二者都可能是不真的，而第三种情形才是真的。

整系数多项式的每一个整数根，必可整除其常数项。对多项式

$$p(x)=3x^3+2x^2+x-1$$

经检验后知1及-1都不是$p(x)$的根，因而$p(x)$没有整数根。但我们却不能因此就说：$p(x)$的根都是分数。如果这样说，就违反了排中律。因为，“某数是整数”和“某数是分数”不是矛盾的关系，只是反对的关系。

排中律和矛盾律的作用，都是排除思维中的矛盾，但排中律所排除的是由两相矛盾关系所产生的矛盾，而矛盾律所排除的是由两相反对关系所产生的矛盾。

排中律肯定互相矛盾的两个判断中，必然是一个对一个错，而矛盾律所断定的是关于两个具有互相反对关系的判断，一个对另一个必错，但是，由一个错不能断定另一个对。

四、充足理由律

充足理由律的公式是：因为有A，所以有B。其中A和B都表示一个或几个判断。A称为B的理由，B称为A的结论。

客观世界中的事物和现象都是处在互相联系之中的，而联系中最主要的一种乃是因果联系。世界上没有没有原因的结果，而一定的原因也必然产生一定的结果。例如一个人得了伤寒，他必然是受到了伤寒菌的侵蚀，没有伤寒菌的侵蚀，决不会好端端地就得起伤寒来了。这种因果关系就是充足理由律的客观基础。

形式逻辑的主要任务，就是由已有的事实推出新的事实。而任何正确的推断，都必须有充足的理由。例如，要得

出二三角形全等的结论，就必须以对应三边相等，或二角及其夹边对应相等，或二边及其夹角对应相等作为理由。

充足的理由应该具备三种性质，即真实性、全面性、相关性。

真实性是首要的，但只有真实性还不够，片面的理由虽是真实的，但也不能算是充足理由。例如，只是由四边形的对角线互相平分，就说这一四边形是菱形，显然是不妥当的。此外，还须具有相关性，相关性是指作为理由的判断和结论之间必须具有本质的联系。有时，一些错误的论证，虽然具有“因为……所以……”的形式，但实质上“理由”和“结论”却是毫不相关的。例如，“因为 $A+B+C=\pi$，所以 $\sin A+\sin B+\sin C$ 是一个定数”，其“理由”和“结论”就毫不相关，因而是错误的。

同一律，矛盾律，排中律保证概念或判断在同一论证过程中的确定性和无矛盾性，充足理由律保证判断之间的联系的合理性。当然，凡是违反了同一律，矛盾律，排中律的推理，必然导致违反充足理由律。