高等学校教学用書

高等数学教程

第四卷　第一分册

B. И. 斯米尔諾夫著

高等教育出版社

高等学校教学用書

高 等 数 学 教 程

第四卷　第一分册

В. И. 斯米尔諾夫著
陈　傳　璋　譯

高 等 教 育 出 版 社

本書系根据1953年苏联国立技术理論書籍出版社（Государственное издательство технико-теоретической литературы）出版的斯米尔諾夫（В. И. Смирнов）著"高等数学教程"（Курс высшей математики）第四卷第三版譯出的。原書經苏联高等教育部审定为綜合大学数理系的教学参考書。

本書中譯本分兩分册出版。

本書系荣获斯大林奬金的著作。

高 等 数 学 教 程

第四卷　第一分册

В. И. 斯米尔諾夫著

陈 傳 璋 譯

高等教育出版社出版 北京宣武門内承恩寺7号

（北京市书刊出版业营业许可証出字第054号）

上海大东集成联合印刷厂印刷　新华书店发行

統一书号 13010 · 391　开本 850×1168 1/32　印張 9 15/16

字数 236,000　印数 22,501—27,500　定价（4）¥0.95

1958年1月第1版　1960年8月上海第5次印刷

再版序言

在第四卷的这一版中，除了变分学一章外，对各章都作了重大的修改。部份材料已拿到新版第二卷中去，另一方面，这第四卷里也添加了很多新內容。

C. M. 罗辛斯基先生曾校閱了积分方程一章的手稿，給了我一系列宝貴的意見，我根据这些意見作了这一章最后的校訂，这里表示我極大的感謝。在写最后兩章时，利用了 O. A. 拉德日斯基及 X. Л. 斯莫里荚基兩先生的很大帮助，我曾多次的和他們商量过这兩章的內容。这兩章中的某些节是我請他們写的，在正文中都已加以注明。

O. A. 拉德日斯基先生校閱了第三章的手稿，X. Л. 斯莫里荚基先生校閱了第四章的手稿。在最后校訂方面他們給了我一系列宝貴的意見。

謹对他們表示極大的感謝。

B. 斯米尔諾夫

1951 年 6 月 13 日

目　录

第一章　积分方程

1. 积分方程的形成的举例　在积分号下含有未知函数的一切方程都称为积分方程。設求微分方程 $y'=f(x, y)$ 满足初始条件 $y(x_0)=y_0$ 的解。我們已在前面[**II**; **51**]見过这个問題归結到求解积分方程：

$$y(x)=\int_{x_0}^{x} f(x, y)dx+y_0 。$$

十分相似地也可把有已給初始値 $y(x_0)=y_0$; $y'(x_0)=y'_0$ 的二阶微分方程 $y''=f(x, y)$ 的求解問題归結到求解积分方程：

$$y(x)=\int_{x_0}^{x} dx\int_{x_0}^{x} f[z, y(z)]dz+y_0+y'_0(x-x_0)。$$

把二重积分变作單积分[**II**; **15**]，可將这方程写为下面的形式：

$$y(x)=\int_{x_0}^{x} (x-z)f[z, y(z)]dz+y_0+y'_0(x-x_0)。$$

从积分方程

$$(1)\qquad y(x)=\int_{0}^{x} (x-z)f[z, y(z)]dz+c_1+c_2x,$$

得到方程 $y''=f(x, y)$ 的通解，其中 c_1 及 c_2 是任意常数，而积分的下限設为零。現在考察关于二阶方程的边界問題，也就是求满足边界条件 $y(0)=a$; $y(l)=b$ 的方程的解。如在方程(1)中首先令 $x=0$，再令 $x=l$，則得到决定任意常数的兩个方程，它們給出：

$$c_1=a;\ \ c_2=\frac{b-a}{l}-\frac{1}{l}\int_{0}^{l} (l-z)f[z, y(z)]dz。$$

將获得的値代入公式(1)，我們把边界問題引导到积分方程：

(2) $$y(x)=F(x)+\int_0^x (x-z)f[z,\ y(z)]\,dz-$$
$$-\frac{x}{l}\int_0^l (l-z)f[z,\ y(z)]\,dz,$$

其中 $$F(x)=a+\frac{b-a}{l}x。$$

我們可將方程(2)写作下面的形式:

(3) $$y(x)=F(x)-\int_0^x \frac{z(l-x)}{l}f[z,\ y(z)]\,dz-$$
$$-\int_x^l \frac{x(l-z)}{l}f[z,\ y(z)]\,dz。$$

我們引入兩个变量的函数:

(4) $$K(x,\ z)=\begin{cases}\dfrac{z(l-x)}{l},\ \text{当 } z\leqslant x \text{ 时};\\[2ex] \dfrac{x(l-z)}{l},\ \text{当 } x\leqslant z \text{ 时}。\end{cases}$$

借助于这个函数,方程(3)可写作下面的式样:

(5) $$y(x)=F(x)-\int_0^l K(x,\ z)f[z,\ y(z)]\,dz。$$

应用获得的結果到綫性方程

(6) $$y''+p(x)y=\omega(x)。$$

我們可斷言在边界条件:

(7) $$y(0)=a;\quad y(l)=b$$

下这方程的求解問題与从綫性积分方程:

(8) $$y(x)=F_1(x)+\int_0^l K(x,\ z)p(z)y(z)\,dz$$

求函数 $y(x)$ 是一样的,其中

$$F_1(x)=F(x)-\int_0^l K(x,\ z)\omega(z)\,dz$$

是依賴于变量 x 的巳知函数。

我們看出，在方程(1)內积分的上限是变量，而在方程(8)內积分的兩限都是常数。还看出，無論在方程(1)內或方程(8)內待求函数不仅在积分号下出現而且也在积分号外出現。我們在以前[II; 50]已見过当采用逐次迫近法以解方程时这情况是極重要的。

用某参数 λ 乘方程(6)的系数 $p(x)$，且考察在齐次边界条件：

(9) $$y(0)=0;\quad y(l)=0$$

下的齐次方程

(10) $$y''+\lambda p(x)y=0。$$

这个齐次边界問題引导到含有参数 λ 的齐次积分方程：

(11) $$y(x)=\lambda\int_0^l K(x,\ z)p(z)y(z)dz。$$

在以后的基本問題中有这样一个問題，参数 λ 应取什么样的値使提出的問題有不恒等于零的解。在应用富里埃方法到数学物理的边界問題时，我們以前曾經遇到过这样問題。还应指出函数 $K(x,\ z)$ 的某些特征，这个函数叫做积分方程的核。这个核在由不等式 $0\leqslant x\leqslant l$ 及 $0\leqslant z\leqslant l$ 所确定的正方形 k_0 內是連續的。在这个正方形的对角綫上，亦卽在 $x=z$ 时，核的一級导数有了跳躍：

$$K_x(x,\ z)\,|_{x=z+0}-K_x(x,\ z)\,|_{x=z-0}=-1。$$

其次，如果把提到的核看作 x 的函数，在对角綫的外面，这函数是齐次方程 $y''=0$ 滿足齐次边界条件(9)的解。最后我們指出，由等式

(12) $$K(z,\ x)=K(x,\ z)$$

所表現出的核的对称性質。核的所有这些性質立卽从公式(4)显出。

核 $K(x,\ z)$ 具有簡單的物理意义。我們回忆，当集中力作用

在兩端固定的絃的一点 $x=z$ 时，在力所作用的这点处应有条件 [II;163]：

$$T_0[(u_x)_{x=z+0}-(u_x)_{x=z-0}]=-P,$$

其中 P 是作用力的大小。不难驗証的是，函数

$$u(x)=\frac{P}{T_0}K(x,z)$$

給出在上面提到的集中力的作用下絃的靜力弯曲的形狀。这时我們注意，在靜力情况內絃的波动方程簡單地归結到方程 $u_{xx}=0$。我們这里就最簡單情形来講的，把边界問題引导到积分方程的种种思想，將在第四章里詳細講到。

我們还指出把数学物理的边界問題引导到积分方程的一个特殊方法。以前曾用下面形式：

$$u(M)=\iint_S\frac{\rho(M')}{d}\,ds$$

来定义球壳的勢函数，其中 $\rho(M')$ 是在球面 S 上的已知函数，ds 是球面的面积元素，而 d 是空間点 M 到球面上变点 M' 的距离。設 n 是球面上某点 M_0 的法綫方向。用 $\left(\frac{\partial u(M_0)}{\partial n}\right)_i$ 及 $\left(\frac{\partial u(M_0)}{\partial n}\right)_e$ 表示当变点 M 从球的內部及外部趋于点 M_0 时导数 $\frac{\partial u(M)}{\partial n}$ 的極限值。我們以前 [III_2;133] 曾引出过下面的公式：

$$(13)\qquad \begin{aligned}\left(\frac{\partial u(M_0)}{\partial n}\right)_i&=-\iint_S\rho(M')\frac{\cos\omega}{d^2}\,ds+2\pi\rho(M_0),\\ \left(\frac{\partial u(M_0)}{\partial n}\right)_e&=-\iint_S\rho(M')\frac{\cos\omega}{d^2}\,ds-2\pi\rho(M_0),\end{aligned}$$

其中 d 是从点 M_0 到球面上变点 M' 的距离，而 ω 是向徑 $M'M_0$ 与方向 n 的交角。

在后一章中我們將見这些公式不仅对于球面有效。現在我們提出对于球面的諾伊曼內部問題，也就是，設求一函数它在球的內

部是調和的，且它的法綫导数在球面上有已知边界值：

$$(14)\qquad \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_S = f(M_0)。$$

待求的函数 u 將是球壳的势函数的形式。这个势函数在球的内部是調和的，且只要选擇这个势函数的密度 $\rho(M')$ 使它也满足边界条件(14)。注意公式(13)中的第一式及边界条件(14)，我們获得决定待求密度的下面的积分方程：

$$2\pi\rho(M_0) = f(M_0) + \iint_S \rho(M')\frac{\cos\omega}{d^2}\,ds。$$

我們看出，在已給情况下函数 $f(M)$ 及 $\rho(M)$ 必須确定在球面上，且积分不像上例中那样展布在 OX 軸的区間上而是在球面上。

2. 积分方程的分类 我們暫时只考虑这样情况的綫性积分方程，它的待求函数应确定在 OX 軸上。我們写积分方程

$$(15)\qquad y(x) = \int_a^x K(x, z)y(z)dz + f(x),$$

其中 $y(x)$ 是待求函数，而 $f(x)$ 及 $K(x, z)$ 是已知函数。像前面已經提到过的，函数 $K(x, z)$ 称为积分方程的核。

所写的方程称为渥尔特拉第二种方程。具有常数积分限的相似方程：

$$(16)\qquad y(x) = \int_a^b K(x, z)y(z)dz + f(x)$$

称为弗列德和蒙第二种方程。若待求函数仅出現在积分号下，則我們获得渥尔特拉或弗列德和蒙第一种方程。它們有如下的形式：

$$(17)\qquad \int_a^x K(x, z)y(z)dz = f_1(x);\quad \int_a^b K(x, z)y(z)dz = f_1(x)。$$

作为渥尔特拉第一种方程的例就是以前 [II; 79] 曾經講过的亞貝尔方程：

$$\varphi(h)=\frac{1}{\sqrt{2g}}\int_0^h\frac{u(y)dy}{\sqrt{h-y}}。$$

我們給出弗列德和蒙第一种方程的一个例子。設$u(x)$是当絃具有对于單位長計算的連續分布的荷重$p(z)$时絃的靜力弯曲。我們將把这个連續分布的荷重看作集中荷重$p(z)dz$的和。每一这样集中荷重，按照上节所述，使我們得到絃的靜力弯曲如下：

$$\frac{1}{T_0}K(x, z)p(z)dz,$$

其中$K(x, z)$由公式(4)来确定。取积分，我們获得在連續分布的荷重下絃的靜力弯曲：

$$u(x)=\frac{1}{T_0}\int_0^l K(x, z)p(z)dz。$$

若弯曲$u(x)$視作已知，而求相应的荷重$p(z)$，这方程就是弗列德和蒙第一种方程。

我們注意，渥尔特拉方程是弗列德和蒙方程的特殊情况。事实上，若我們將以前定义的核$K(x, z)$預先加以条件：当$z>x$时$K(x, z)=0$，則在渥尔特拉方程內可对于z从$z=a$到$z=b$取积分。

以后我們几乎專致力于第二种方程，且主要是弗列德和蒙第二种方程。我們在解数学物理的边界問題时經常碰到的正是这种方程。第二种方程的理論較之第一种的簡單得多。前面已經提到过，若在积分号外有待求函数，就自然地可能采用逐次迫近法。

积分方程的理論在很多地方与綫性代数的問題相似，关于代数問題我們已在第三卷內闡明。我們回忆，在n維空間內有形如[III₁;25]：

$$y_i=a_{i1}u_1+\cdots+a_{in}u_n, \quad (i=1, 2, \cdots, n)$$

的綫性变换且在写出的变换中系数a_{ik}組成了矩陣。这变换可用另一个样子写为以下形式：

$$\boldsymbol{y}=A\boldsymbol{u},$$

其中 $\boldsymbol{u}(u_1, \cdots, u_n)$是原来向量,$\boldsymbol{y}$ $(y_1, y_2, \cdots, y_n)$ 是变换后向量,而 A 是由系数 a_{ik} 組成的矩陣。在积分方程的情况用通常在某区間 $[a, b]$ 內确定的函数来代替 n 維空間的向量。用核 $K(x, z)$ 来代替系数 a_{ik} 的矩陣,且用积分过程来代替求和,因而在所考察的情况綫性变换可表达如下公式:

$$y(x)=\int_a^b K(x, z)u(z)dz, \tag{18}$$

其中 $u(z)$ 是原来函数,而 $y(x)$ 是变换后函数。

其次,我們回忆所謂矩陣 A 的特征值是指参数 λ 这样的值,它使方程

$$A\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x}$$

有不等于零的解 $\boldsymbol{x}$。以后我們將称参数 λ 这样的值为核 $K(x, z)$ 或相应变换的特征值,它使齐次积分方程

$$y(x)=\lambda\int_a^b K(x, z)y(z)dz \tag{19}$$

有不恒等于零的解。我們看出,此处在参数 λ 的引用方面,与前面指出的代数問題并不完全相似。如果完全相似地来引用,我們必須代替(19)而写出下列方程:

$$\int_a^b K(x, z)y(z)dz=\lambda y(x)。$$

以后在积分方程的全部理論中我們將保持公式(19)的形式。

还要注意,使函数 $u(x)$ 对应于同一函数 $u(x)$ 的恒等变换[也就是使 $y(x)$ 与 $u(x)$ 等同的变换]不能表达为积分形式(18)。

在闡明积分方程的理論时,自然必須关于核 $K(x, z)$ 以及函数 $f(x)$ 及 $y(x)$ 作某些假設。

如同已經提到过的,我們暫將專致力于一維情况的积分方程。过渡到多維情况的方法將在下面指出。

最后，我們指出，今后通常認为已知及待求函数都是复函数：

$$K(x, z)=K_1(x, z)+K_2(x, z)i;$$

$$f(x)=f_1(x)+f_2(x)i;$$

$$y(x)=y_1(x)+y_2(x)i,$$

其中 $K_s(x, z)$，$f_s(x)$，$y_s(x)$ $(s=1, 2)$ 都是实函数。自变量永远被認为是实的。

在下节中我們將回忆正交函数系的性質且对于这个問題添加某些补充。这对于积分方程理論的闡明將是必要的。

以后將常常說到有限閉区間 $a\leqslant x\leqslant b$（也就是这样的区間，它包含兩端点在內）。我們总是用符号 $[a, b]$ 記这样的区間。

3. 正交函数系 在区間 $[a, b]$ 内为連續的实函数

$$\varphi_1(x), \varphi_2(x), \cdots, \tag{20}$$

如果有

$$\int_a^b \varphi_p(x)\varphi_q(x)dx=\begin{cases}0, & \text{当 } p\neq q \text{ 时；}\\ 1, & \text{当 } p=q \text{ 时，}\end{cases} \tag{21}$$

則謂这些实函数在区間内構成正交标准系。

設 $f(x)$ 是任一实函数，在区間 $[a, b]$ 内是連續的。下数值

$$c_k=\int_a^b f(x)\varphi_k(x)dx \tag{22}$$

称为函数 $f(x)$ 关于系 (20) 的富里埃系数[閱 II；156]。由 c_k 的定义我們有等式：

$$\int_a^b\left[f(x)-\sum_{k=1}^n c_k\varphi_k(x)\right]^2dx=\int_a^b[f(x)]^2dx-\sum_{k=1}^n c_k^2, \tag{23}$$

这等式把函数 $f(x)$ 在用它的富里埃級数的部份和 $s_n(x)$ 来代替时所得的平方中值誤差表示为差式。从公式(23)显出以 c_k^2 为普通項的無穷級数的收斂性且有所謂貝塞尔不等式：

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 \leqslant \int_a^b [f(x)]^2 dx \text{。} \tag{24}$$

若对于任何連續函数$f(x)$在公式(24)中等号成立，也就是若对于任何連續函数有所謂完整公式:

$$\int_a^b [f(x)]^2 dx = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2, \tag{25}$$

則謂系(20)是完整的。完整公式表現出这样事实:当函数$f(x)$代以它的富里埃級数的部份和$s_n(x)$时，則当n無限增大时平方中值誤差趋于零。还要回忆，若我們作积分

$$\int_a^b \left[f(x) - \sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_k(x)\right]^2 dx,$$

其中a_k是任意实系数，如果采取a_k等于函数$f(x)$的富里埃系数，則这个积分的值將为最小[**II**;**148**]。

到現在为止，我們設函数$\varphi_k(x)$及$f(x)$是連續的。上面所說的一切在更一般情况下也保持正确的。例如，可以設这些函数是有界的且有有限个不連續点。我們注意，这时上面写出的所有积分显然都有意义。

設$\varphi_k(x)$是連續的，而$f(x)$在区間$[a, b]$内除了一点$x=d$外也都是連續的，在这点的鄰域内它是無界的，并且

$$|f(x)| \leqslant \frac{C}{|x-d|^{\alpha}}, \tag{26}$$

其中C及α是常数且$0<\alpha<\frac{1}{2}$。这时$[f(x)]^2$是可积的[**II**;**82**]，且不等式(24)的証明完全保持有效，并且所有积分都有意义。正交函数理論的最为自然的扩充需要其他积分概念。我們將在第五卷予以闡明。

以后，如果沒有相反声明，我們將假設一切函数都是連續的。

我們来証明一个初等的引理。若 $\omega(x)$ 在区間 $[a, b]$ 内是連續且非負的函数，又

$$(27) \qquad \int_a^b \omega(x)\,dx = 0,$$

則 $\omega(x)$ 在区間 $[a, b]$ 内恒等于零。設我們的斷言不正确，且在所提到的区間内的某点 $x=c$ 处有 $\omega(c)>0$，則对于充分小的正数 ε，函数 $\omega(x)$ 在区間 $[c-\varepsilon, c+\varepsilon]$ 内將是正的，且設 $m\ (>0)$ 是它在这区間内的最小値。由于 $\omega(x)$ 的非負性，就有：

$$\int_a^b \omega(x)\,dx \geqslant \int_{c-\varepsilon}^{c+\varepsilon} \omega(x)\,dx \geqslant \int_{c-\varepsilon}^{c+\varepsilon} m\,dx = 2\varepsilon m,$$

而这与条件(27)矛盾。

在[**III$_1$;31**]中我們已見过，若有 m 个綫性無关的向量，則总可以做出同样多个兩兩正交且标准的向量，使原来的向量可由新向量綫性表出，反之也是一样。这一切对函数来說也完全适用。設

$$\psi_1(x), \cdots, \psi_m(x)$$

是在 $[a, b]$ 内連續且綫性無关的，即含常系数 α_k 的恒等关系式

$$\alpha_1\psi_1(x)+\cdots+\alpha_m\psi_m(x)\equiv 0,$$

只当这些系数都等于零的情况成立。現在我們来作在 $[a, b]$ 内为正交且标准化的新函数：

$$\varphi_1(x), \cdots, \varphi_m(x),$$

使 $\varphi_k(x)$ 可由 $\psi_1(x), \cdots, \psi_k(x)$ 綫性表出，反之，一切 $\psi_k(x)$ 也可由 $\varphi_1(x), \cdots, \varphi_k(x)$ 綫性表出。为簡写起見，我們引用代数中曾經用过的記号，即用記号 (f, F) 来表示乘积 $f(x)F(x)$ 在区間 $[a, b]$ 内的积分：

$$(f, F) = \int_a^b f(x)F(x)\,dx。$$

函数 $\psi_k(x)$ 的正交化手續，亦即函数 $\varphi_k(x)$ 的構成手續，按以下方式进行：

$$\varphi_1(x)=\frac{\psi_1(x)}{\sqrt{(\psi_1,\psi_1)}}$$

$$\chi_2(x)=\psi_2(x)-(\psi_2,\varphi_1)\varphi_1(x);\qquad \varphi_2(x)=\frac{\chi_2(x)}{\sqrt{(\chi_2,\chi_2)}}$$

$$\chi_3(x)=\psi_3(x)-(\psi_3,\varphi_2)\varphi_2(x)-(\psi_3,\varphi_1)\varphi_1(x);\ \varphi_3(x)=\frac{\chi_3(x)}{\sqrt{(\chi_3,\chi_3)}}$$

....

$$\chi_m(x)=\psi_m(x)-(\psi_m,\varphi_{m-1})\varphi_{m-1}(x)-\cdots-(\psi_m,\varphi_1)\varphi_1(x);$$

$$\varphi_m(x)=\frac{\chi_m(x)}{\sqrt{(\chi_m,\chi_m)}}。$$

函数 $\varphi_k(x)$ 与 $\chi_k(x)$ 只相差一个常数因子，这个因子加到 $\chi_k(x)$ 是为了使这些函数标准化，亦即为了使它們的平方在 $[a, b]$ 上积分等于1。从所写出的公式立即显出在 $\psi_k(x)$ 及 $\varphi_k(x)$ 之間的綫性相关性，正如我們前面所說的。还要注意，在函数 $\chi_k(x)$ 中，沒有一个可变为恒等于零，因此 $(\chi_k,\chi_k)\neq 0$，因为比方說要是有 $\chi_2(x)\equiv 0$ 的話，則可引到 $\varphi_1(x)$ 及 $\psi_2(x)$ 之間的綫性相关性：

$$\psi_2(x)-(\psi_2,\varphi_1)\varphi_1(x)\equiv 0,$$

这归結到 $\psi_1(x)$ 及 $\psi_2(x)$ 之間的綫性相关性，而与諸函数 $\psi_k(x)$ 的綫性無关的假設矛盾。应用引理，从已确定的事实立即得出 $(\chi_k,\chi_k)\neq 0$，因为，否則应有 $\chi_k\equiv 0$。这样一来，确定函数 φ_k 的一切公式都有意义，函数 $\chi_k(x)$ 与已經作好了的函数 $\varphi_1(x),\varphi_2(x),\cdots,\varphi_{k-1}(x)$ 的正交性可依次檢驗。例如：

$$(\chi_2,\varphi_1)=(\psi_2,\varphi_1)-(\psi_2,\varphi_1)(\varphi_1,\varphi_1)=$$
$$=(\psi_2,\varphi_1)-(\psi_2,\varphi_1)=0。$$

既有 $\varphi_1(x)$ 及 $\varphi_2(x)$ 的正交标准性，得：

$$(\chi_3,\varphi_1)=(\psi_3,\varphi_1)-(\psi_3,\varphi_2)(\varphi_2,\varphi_1)-(\psi_3,\varphi_1)(\varphi_1,\varphi_1)=$$
$$=(\psi_3,\varphi_1)-(\psi_3,\varphi_1)=0,$$

同样也有 $(\chi_3,\varphi_2)=0$ 等等。