同济五版

高等数学

习题全解

（上、下册合订本）

主编

北京大学数学科学学院 詹瑞清

北京师范大学数学科学学院 李振华

构建宏观体系

点击微观技巧

引导过程思路

中国社会出版社

同济五版

高等数学习题全解

主编：北京大学数学科学学院　　詹瑞清
北京师范大学数学科学学院　李振华

中国社会出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学习题全解 / 詹瑞清,李振华主编. 一北京：中国社会出版社，2005.8
ISBN 7-5087-0706-0
Ⅰ.高… Ⅱ.①詹… ②李… Ⅲ.高等数学一高等学校一解题 Ⅳ.013－44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 085984 号

书　　名:高等数学习题全解
主　　编:詹瑞清　李振华
责任编辑:杨　晖　张国洪

出版发行:中国社会出版社　　邮政编码:100032
通联发行:北京市西城区二龙路甲 33 号新龙大厦
　　　　电话:66016392　　传真:66016392
欢迎读者拨打免费热线 8008108114 或登录 www.bj114.com.cn 查询相关信息
经　　销:各地新华书店

印刷装订:河北天普润印刷厂
开　　本:850×1168 毫米　1/32
印　　张:18.125
字　　数:345 千字
版　　次:2005 年 8 月第 1 版
印　　次:2005 年 8 月第 1 次印刷

书　　号:ISBN 7-5087-0706-0/O・11
定　　价:19.80 元

前 言

人的素质是现代社会发展最宝贵的财富。

面对当前许多学生“有专业没思想”的现实，我们认为，数学应成为扭转这一现实的重要途径。这里，我们和大家谈谈数学学科。首先，数学是自然的。在内容上，数学的发展意味着适用范围的扩大，如由一元函数的微分到多元函数的微分到全微分；定积分到多重积分再到曲线、曲面积分等等。在运算律上，数学发展时考虑到是否满足朴素的性质。如$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\lim\limits_{n\to\infty}a_n+\lim\limits_{n\to\infty}b_n$, $[f(x)+g(x)]'=f'(x)+g'(x)$, $\int_a^b[f(x)+g(x)]dx=\int_a^b(f(x)dx+\int_a^b g(x)dx$中体现出的线性性，不就是小学学过的分配律$a\times(b+c)=a\times b+a\times c$的推广吗？其次，数学是非常有用的。有用的不局限于数学中的知识方法，更重要的是那种朴素、简单的思想。科学大师能给我们点燃思想的火花，但现实中接触大师的机会甚少，而学习数学就是和科学大师的对话和学习，让我们体会到数学家为了解决数学问题而统筹各种关系，创造更高超的技巧运用的朴素想法。再次，只要勤于思考、脚踏实地，数学是可以学好的。要认真演算每个习题（有过程，必有结果），偶遇不会的题时，请勿急于找答案，而要力图自己思考，独立解决问题，要反复研读课本，认真品味其所体现的思想和精髓。学习中，不要怕思维混乱。前吉尔吉斯斯坦总统、著名物理学家阿卡耶夫把他的政治、管理、科研、学习总结成一句话：只有混乱才能从一种状态进入另一种状态。数学学习更是如此，只有混乱，才能把新知识纳入旧的体系从而形成更广的系统。如极限概念，要不断琢磨。还有，数学是可靠的。现代数学认为：数学是逻辑加创造。每一个推理、每一次运算都有依据。难道有比数学更可靠的推理吗？爱因斯坦得出$E=mc^2$的伟大之处同时也在于，这个

公式并非靠实验，而是靠数学推理得出的。

介于此，我们认为同济大学的高等数学是一部佳作。因此我们选择同济五版习题，并在每章前总结了基本思想、重要方法、知识结构，力图使读者在精神、思想、方法、知识四个层次看待每个数学问题。只要对大家的学习有所帮助、思维有所启迪，我们就心满意足了。

现在，就让我们行动起来吧！

编　者

2005年7月1日

目录

CONTENTS

第一章 函数与极限

■ 一、基本思想归纳……1
■ 二、重要方法总结……1
■ 三、知识结构一览……3
■ 四、习题全解……3

习题1—1(3)　习题1—2(12)　习题1—3(14)
习题1—4(17)　习题1—5(21)　习题1—6(23)
习题1—7(26)　习题1—8(28)　习题1—9(31)
习题1—10(35)　总习题一(36)

第二章 导数与微分

■ 一、基本思想归纳……42
■ 二、重要方法总结……42
■ 三、知识结构一览……43
■ 四、习题全解……43

习题2—1(43)　习题2—2(48)　习题2—3(57)
习题2—4(61)　习题2—5(68)　总习题二(74)

第三章 微分中值定理与导数的应用

■ 一、基本思想归纳……80
■ 二、重要方法总结……80
■ 三、知识结构一览……81
■ 四、习题全解……81

习题3—1(81)　习题3—2(86)　习题3—3(90)
习题3—4(93)　习题3—5(104)　习题3—6(111)

习题3—7(117)　习题3—8(121)　总习题三(123)

第四章 不定积分

■一、基本思想归纳……130
■二、重要方法总结……130
■三、知识结构一览……131
■四、习题全解……132
习题4—1(132)　习题4—2(136)　习题4—3(144)
习题4—4(150)　习题4—5(157)　总习题四(158)

第五章 定积分

■一、基本思想归纳……166
■二、重要方法总结……166
■三、知识结构一览……167
■四、习题全解……167
习题5—1(167)　习题5—2(175)　习题5—3(180)
习题5—4(191)　习题5—5(195)　总习题五(198)

第六章 定积分的应用

■一、基本思想归纳……207
■二、重要方法总结……207
■三、知识结构一览……207
■四、习题全解……207
习题6—2(207)　习题6—3(224)　总习题六(229)

第七章 空间解析几何与向量代数

■一、基本思想归纳……233

■ 二、重要方法总结……233
■ 三、知识结构一览……234
■ 四、习题全解……234
习题7—1(234) 习题7—2(238) 习题7—3(242)
习题7—4(246) 习题7—5(249) 习题7—6(252)
总习题七(258)

(上册)附录Ⅰ 二阶和三阶行列式简介

■ 一、习题全解……265

第八章 多元函数微分法及其应用

■ 一、基本思想归纳……267
■ 二、重要方法总结……267
■ 三、知识结构一览……268
■ 四、习题全解……268
习题8—1(268) 习题8—2(272) 习题8—3(276)
习题8—4(279) 习题8—5(287) 习题8—6(292)
习题8—7(296) 习题8—8(300) 习题8—9(304)
习题8—10(307) 总习题八(308)

第九章 重积分

■ 一、基本思想归纳……316
■ 二、重要方法总结……316
■ 三、知识结构一览……317
■ 四、习题全解……317
习题9—1(317) 习题9—2(321) 习题9—3(342)
习题9—4(351) 习题9—5(362) 总习题九(366)

第十章 曲线积分与曲面积分

■一、基本思想归纳……375
■二、重要方法总结……375
■三、知识结构一览……375
■四、习题全解……376

习题10—1(376) 习题10—2(382) 习题10—3(388)
习题10—4(395) 习题10—5(401) 习题10—6(405)
习题10—7(409) 总习题十(416)

第十一章 无穷级数

■一、基本思想归纳……426
■二、重要方法总结……426
■三、知识结构一览……427
■四、习题全解……427

习题11—1(427) 习题11—2(432) 习题11—3(437)
习题11—4(441) 习题11—5(445) 习题11—6(449)
习题11—7(452) 习题11—8(459) 总习题十一(464)

第十二章 微分方程

■一、基本思想归纳……476
■二、重要方法总结……476
■三、知识结构一览……479
■四、习题全解……480

习题12—1(480) 习题12—2(482) 习题12—3(488)
习题12—4(494) 习题12—5(503) 习题12—6(508)
习题12—7(516) 习题12—8(521) 习题12—9(526)
习题12—10(536) 习题12—11(541) 习题12—12(547)
总习题十二(554)

第一章 函数与极限

一、基本思想归纳

1. 人们对客观事物(如自然现象、生产生活过程等)的认识中发现:某些数量在不断发生着变化,这种能取得不同数值的量称为变量。各变量之间相互依存的关系称为函数关系。这种关系在数学中称为函数,学习函数时,应把握几个层次:①熟悉基本函数,即理解各种数的构造及变化规律(如 $kx, ax^2+bx+c, a^x, x^a, \sin x, \cdots$ 或其复合)②明白复合函数的目的是为了创造函数。即 $x \xrightarrow{f} f(x) \xrightarrow{g} g[f(x)]$ ③认识事物时,运动中把握函数关系是令人振奋的。并研究函数更一般地"精细"的性质。如微分、积分等。

2. 极限是对事物趋向无限的准确精细认识。函数的极限概念是麻烦的,但其工具是有力的(是微分、积分的基础)、运算是线性的(如 $\lim f(x)+g(x)=\lim f(x)+\lim g(x)$)、结果是简单的(仅是一个数)

3. 自然界中的许多现象,如气温变化,植物生长等,都是连续地变化着。这些现象在函数上的反映,就是连续性。函数地连续性直观上看就是可以"一笔画",极限的分析上就是 $\lim\limits_{\Delta x\to\infty}[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)]=0$ 即 $\Delta x\to 0$ 时, $\Delta y\to 0$.

二、重要方法总结

1. 复合函数

①定义:已知 $f(x)$ 的定义域为 X,求复合函数 $f[\varphi(x)]$ 的定义域,意即求: $x \xrightarrow{\varphi} \varphi(x) \xrightarrow{f} f[\varphi(x)]$ 中 x 的范围。显然,这个 x 除了满足 $\varphi(x)$ 自身的条件外,还需使 $\varphi(x)$ 的值等于或包含于 X.

②分解 $y=f[g(x)]$. $y=f(u)$, $u=g(x)$ 即将其分解成 $f(u)$、$g(x)$ 两个函数。也可以:

$x \xrightarrow{g} g(x) \xrightarrow{f} f[g(x)]$

③已知 $\varphi(x)$ 及复合函数 $f[\varphi(x)]$ 的表达式为 $F(x)$,即 $f[\varphi(x)]=F(x)$ 求 $f(x)$ 的表达式。

法一:令 $u=\varphi(x)$,解得 $x=\varphi^{-1}(u)$

$\because f[\varphi(x)]=F(x)$

$\therefore$代入有 $f(u)=F[\varphi^{-1}(u)]$；

法二：把函数 $\varphi(x)$ 视为一个变元，函数 $F(x)$ 凑成以 $\varphi(x)$ 为变元的函数，则有 $F(x)=f[\varphi(x)]$

如 $f(\sin x)=\cos^2 x$ 求 $f(x)$.

$f(\sin x)=1-\sin^2 x$

$\therefore f(u)=1-u^2$ 即 $f(x)=1-x^2$

(但注意自变量范围的变化).

2. 求数列和函数的极限的方法.

①利用初等数学之基本公式.(数列求和公式、二项展开式等)或极限运算法则。

如：计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+3+\cdots+(2n-1)}{2n^2-n+1}$

②重要极限：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$，$\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{1}{x})^x=\mathrm{e}$

③两个准则：夹逼准则，单调有界准则

④等价无穷小的替换.

⑤函数连续性：依据：$\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=a$，而 $y=f(u)$ 在 a 点处连续，则 $\lim\limits_{x\to x_0}f[\varphi(x)]=f(a)=f[\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)]$

⑥其他：如洛比达法则等.

3. 连续性.

①初等函数的间断点并判断类型：注意定义域的边界点。判断间断点的类型就要考察函数在间断点处的极限。

②分段函数的连续性：判断分断函数在连接点处的连续性.

③由函数的连续性确定表达式中的参数：

利用 $f(x_0+0)=f(x_0-0)=f(x_0)$，列方程(方程组)，解得参数值。

④函数零点：用连续函数中间值定理，即 $f(x)$ 在$[a,b]$连续且 $f(a)\cdot f(b)<0$ 则 $\exists c\in(a,b)$ 有 $f(a)\cdot f(b)<0$；要证$[a,b]$上连续函数 $f(x)$ 在(a,b)存在零点，只让 $f(a)\cdot f(b)<0$.

事实上：也可推广为：$f(x)$ 在$(a,+\infty)$连续，

又 $\lim\limits_{x\to a+0}f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=B$，

若 A 与 B 异号，则 $\exists C\in(a,+\infty)$ 有 $f(c)=0$.

三、知识结构一览

- 函数与极限
  - 函数
    - 定义
    - 性质
      - 奇偶性
      - 单调性
      - 周期性
      - 有界性
    - 反函数
    - 复合函数(复合的目的是创造新函数)
  - 极限
    - 定义
      - $\varepsilon-N$
      - $\varepsilon-\delta$
    - 性质
      - 唯一性
      - 有界性(局部有界性)
      - 子序列收敛性(指数列)
      - 有序性
      - 保号性(局部保号性)
      - 四则运算
    - 无穷大(小)量
      - 定义
      - 阶的分类
        - 高阶
        - 同阶
        - 低阶
    - 函数的连续性
      - 概念
      - 运算
      - 性质

四、习题全解

习题1-1

1 设$A=(-\infty,-5)\cup(5,+\infty)$,$B=[-10,3)$,写出$A\cup B$,$A\cap B$,$A\backslash B$及$A\backslash(A\backslash B)$的表达式。

解　易知$A\cup B=(-\infty,3)\cup(5,+\infty)$,$A\cap B=[-10,-5)$

$A\backslash B=(-\infty,-10)\cup(5,+\infty)$,$A\backslash(A\backslash B)=[-10,-5)$

2 设A、B、C是任意三个集合,证明对偶律:$(A\cap B)^C=A^C\cup B^C$。

证明　(1)先证　$(A\cap B)^C\subset A^C\cup B^C$

$\forall x\in(A\cap B)^C\Rightarrow x\notin A\cap B\Rightarrow x\in A^C$ 或 $x\in B^C\Rightarrow x\in A^C\cup B^C$

(2)再证 $A^C\cup B^C\subset(A\cap B)^C$

$\forall x\in A^C\cup B^C\Rightarrow x\in A^C$ 或 $x\in B^C\Rightarrow x\notin A$ 或 $x\notin B\Rightarrow x\notin(A\cap B)\Rightarrow x\in(A\cap B)^C$ 证毕

3 设映射 $f:X\to Y,A\subset X,B\subset X$,证明:

(1)$f(A\cup B)=f(A)\cup f(B)$

(2)$f(A\cap B)\subset f(A)\cap f(B)$

证明 (1)$\forall y\in f(A\cup B)=\{y|y=f(x),x\in A\cup B\}$

$=\{y|y=f(x),x\in A$ 或 $x\in B\}$

$\Leftrightarrow y\in\{y|y=f(x),x\in A\}$ 或 $y\in\{y|y=f(x),x\in B\}$

$\Leftrightarrow y\in f(A)\cup f(B)$ 证毕。

(2)$\forall y\in f(A\cap B)=\{y|y=f(x),x\in A\cap B\}=\{y|y=f(x),x\in A$ 且 $x\in B\}\subset\{y|y=f(x),x\in A\}\cap\{y|y=f(x),x\in B\}$

$\Rightarrow y\in\{y|y=f(x),x\in A\}=f(A)$ 且 $y\in\{y|y=f(x),x\in B\}=f(B)$

$\Rightarrow y\in f(A)\cap f(B)$ 证毕.

4 设映射 $f:X\to Y$,若存在一个映射 $g:Y\to X$,使 $g\circ f=I_X,f\circ g=I_Y$,其中 I_X、I_Y 分别是 X、Y 上的恒等映射,即对每一个 $x\in X$,有 $I_Xx=x$;对每一个 $y\in Y$,有 $I_Yy=y$。证明:f 是双射,且 g 是 f 的逆映射:$g=f^{-1}$。

证明 (一)若证 f 为双射,须证 f 既为满射又为单射。

(1)$\forall y\in Y$,则 $I_Yy=y$。而 $I_Y=f\circ g$,于是$(f\circ g)(y)=y$,即 $f[g(y)]=y$,令 $x=g(y)$,则 $f(x)=f[g(y)]=y$,因为 $g:Y\to X$,所以 $x=g(y)\in X$

故 $\forall y\in Y,\exists x\in X$,使 $f(x)=y$。依定义知 f 为满射。

(2)$\forall x_1,x_2\in X$,且 $x_1\neq x_2$,则 $I_Xx_1\neq I_Xx_2$

$I_X=g\circ f\Rightarrow g[f(x_1)]\neq g[f(x_2)]$

$\Rightarrow f[x_1]\neq f(x_2)$

(否则,若 $f(x_1)=f(x_2)$,则 $g[f(x_1)]=g[f(x_2)]$矛盾。)

$\therefore$由(1)、(2)知:f 为双射

(二)若证 g 为 f 的逆映射,已知:f 为单射,$R_f=Y$,由定义,须证:

$g:Y\to X$,对 $\forall y\in Y$,设 $g(y)=x$,则 x 满足 $f(x)=y$.

由于:$y=I_Yy=f\circ g(y)=f[g(y)]=f(x)$即 $f(x)=y$

5 设映射 $f:X\to Y,A\subset X$,证明:

(1)$f^{-1}(f(A))\supset A$;

(2)当 f 是单射时,有 $f^{-1}(f(A))=A$

证明 (1)令 $B=f(A)=\{y\mid y=f(x),x\in A\}$

$\therefore f^{-1}(f(A))=f^{-1}(B)=\{x\mid f(x)\in B\}$

$\therefore \forall x\in A\Rightarrow f(x)\in f(A)=B\Rightarrow x\in f^{-1}(B)=f^{-1}(f(A))$,故 $A\subset f^{-1}(f(A))$

(2) $\forall x\in f^{-1}(f(A))$,$\exists y_0\in f(A)$,使得 $f^{-1}(y_0)=x$,即 $f(x)=y_0$

设 $x'\in A$,$f(x')=y_0$,由于 f 是单射,则 $x=x'\in A$

故而 $f^{-1}(f(A))\subset A$,又由(1)之结论知:$f'(f(A))\supset A$,故 $f^{-1}(f(A))=A$

6 求下列函数的自然定义域:

(1) $y=\sqrt{3x+2}$　　(2) $y=\dfrac{1}{1-x^2}$

(3) $y=\dfrac{1}{x}-\sqrt{1-x^2}$　　(4) $y=\dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}$

(5) $y=\sin\sqrt{x}$　　(6) $y=\tan(x+1)$

(7) $y=\arcsin(x-3)$　　(8) $y=\sqrt{3-x}+\arctan\dfrac{1}{x}$

(9) $y=\ln(x+1)$　　(10) $y=e^{\frac{1}{x}}$

解 (1) $3x+2\geqslant 0$ 得 $x\geqslant -\dfrac{2}{3}$ 故定义域为 $[-\dfrac{2}{3},+\infty)$

(2) $1-x^2\neq 0$ 得 $x\neq\pm 1$　故定义域为 $(-\infty,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty)$

(3) $x\neq 0$ 且 $1-x^2\geqslant 0$ 即 $x\neq 0$ 得 $|x|\leqslant 1$　故定义域为 $[-1,0)\cup(0,1]$

(4) $4-x^2>$ 即定义域为 $(-2,2)$

(5) $[0,+\infty)$

(6) $x+1\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2}$ 得 $x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2}-1$　　$(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$

(7) $-1\leqslant x-3\leqslant 1$ 得 $2\leqslant x\leqslant 4$,即 $[2.4]$

(8) $3-x\geqslant 0$ 且 $x\neq 0$ 得定义域 $(-\infty,0)\cup(0,3]$

(9) $(-1,+\infty)$

(10) $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$

7 下列各题中,函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是否相同?为什么?

(1) $f(x)=\lg x^2$,$g(x)=2\lg x$

(2) $f(x)=x$,$g(x)=\sqrt{x^2}$

(3) $f(x)=\sqrt[3]{x^4-x^3}$,$g(x)=x\sqrt[3]{x-1}$

(4) $f(x)=1$,$g(x)=\sec^2 x-\tan^2 x$

解 (1)不同。因为两者之定义域不同。

(2)不同。因为两者之对应法则不同，$x<0$ 时，$g(x)=-x$

(3)相同。因为两者之定义域、对应法则均相同

(4)不同。因为 $g(x)=\sec^2 x-\tan^2 x$ 中 $x\neq k\pi+\frac{1}{2}\pi$，故 $f(x)$ 与 $g(x)$ 之定义域不相同。

8 设 $y=\varphi(x)=\begin{cases}|\sin x|, & |x|<\frac{\pi}{3}\\ 0, & |x|\geqslant\frac{\pi}{3}\end{cases}$ 求 $\varphi(\frac{\pi}{6})$，$\varphi(\frac{\pi}{4})$，$\varphi(-\frac{\pi}{4})$，$\varphi(-2)$，并作出函数 $y=\varphi(x)$ 的图形。

解 $\because |x|=\frac{\pi}{6}<\frac{\pi}{3}$，$\therefore \varphi(\frac{\pi}{6})=|\sin\frac{\pi}{6}|=\frac{1}{2}$，

同理可知 $\varphi(\frac{\pi}{4})=|\sin\frac{\pi}{4}|=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\varphi(-\frac{\pi}{4})=|\sin(-\frac{\pi}{4})|=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$\varphi(-2)=0$

由已知：$y=\varphi(x)=\begin{cases}\sin x, & 0\leqslant x<\frac{\pi}{3}\\ -\sin x, & -\frac{\pi}{3}<x<0\\ 0, & |x|\geqslant\frac{\pi}{3}\end{cases}$

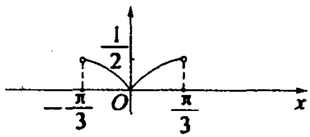

图 1—1

故 $y=\varphi(x)$ 的图象为：图 1—1.

9 试证下列函数在指定区间内的单调性：

(1) $y=\frac{x}{1-x}$，$x\in(-\infty,1)$　　(2) $y=x+\ln x$，$x\in(0,+\infty)$

解 (1)设 $x_1<x_2<1$

$\therefore f(x_1)-f(x_2)=\frac{x_1}{1-x_1}-\frac{x_2}{1-x_2}=\frac{x_1-x_1x_2-x_2+x_1x_2}{(1-x_1)(1-x_2)}$

$=\frac{x_1-x_2}{(1-x_1)(1-x_2)}<0$

$\therefore f(x_1)<f(x_2)$，故而 $y=\frac{x}{1-x}$ 在 $(-\infty,1)$ 单调增加。

(2)设 $0<x_1<x_2$

$f(x_1)-f(x_2)=(x_1+\ln x_1)-(x_2+\ln x_2)=(x_1-x_2)+(\ln x_1-\ln x_2)$

因为 $y=\ln x$ 为单调增加函数，所以 $(\ln x_1-\ln x_2)<0$

又因为 $(x_1-x_2)<0$，所以 $(x_1-x_2)+(\ln x_1-\ln x_2)<0$

$\therefore f(x_1)-f(x_2)<0$，即 $f(x_1)<f(x_2)$，故 $y=x+\ln x, x\in(0,+\infty)$ 上是增函数

10 设 $f(x)$ 为定义在 $(-l,l)$ 内的奇函数，若 $f(x)$ 在 $(0,l)$ 内单调增加，证明 $f(x)$ 在 $(-l,0)$ 内也单调增加。

证明 令 $x_1,x_2\in(-l,0)$ 且 $x_1<x_2$，则有

$$-x_1,-x_2\in(0,l)\text{，且}-x_2<-x_1$$

又 $\because f(x)$ 在 $(0,l)$ 内单调增加，可得 $f(-x_2)<f(-x_1)$

由已知 $f(x)$ 在 $(-l,l)$ 内是奇函数，所以

$-f(x_2)<-f(x_1)$，亦即 $f(x_1)<f(x_2)$。

$\therefore f(x)$ 在 $(-l,0)$ 内也单调增加。

11 设下面所考虑的函数都是定义域在区间 $(-l,l)$ 上的，证明：

(1)两个偶函数的和是偶函数，两个奇函数的和是奇函数；

(2)两个偶函数的积是偶函数，两个奇函数的乘积是偶函数，偶数与奇函数的乘积是奇函数；

证明 (1)设 $f_1(x),f_2(x)$ 均为偶函数，则 $f_1(-x)=f_1(x), f_2(-x)=f_2(x)$，设 $F(x)=f_1(x)+f_2(x)$

故而 $\quad F(-x)=f_1(-x)+f_2(-x)=f_1(x)+f_2(x)=F(x)$

$\therefore F(x)$ 为偶函数。

设 $g_1(x),g_2(x)$ 均为奇函数，$\therefore g_1(-x)=-g_1(x), g_2(-x)=-g_2(x)$，设 $G(x)=g_1(x)+g_2(x)$

$\therefore G(-x)=g_1(-x)+g_2(-x)=-g_1(x)-g_2(x)=-G(x)$

$\therefore G(x)$ 为奇函数

(2)设 $f_1(x),f_2(x)$ 均为偶函数，$\therefore f_1(-x)=f_1(x), f_2(-x)=f_2(x)$，设

$$F(x)=f_1(x)\cdot f_2(x)$$

$\therefore F(-x)=f_1(-x)\cdot f_2(-x)=f_1(x)\cdot f_2(x)=F(x)$

$\therefore F(x)$ 为偶函数。

设 $g_1(x),g_2(x)$ 为奇函数，则 $g_1(-x)=-g_1(x), g_2(-x)=-g_2(x)$

设 $\quad G(x)=g_1(x)g_2(x)$

$\therefore G(-x)=g_1(-x)g_2(-x)=[-g_1(x)][-g_2(x)]=g_1(x)g_2(x)=G(x)$，故而 $G(x)$ 为偶函数。

设 $f(x)$ 为偶函数，$g(x)$ 为奇函数，则 $f(-x)=f(x), g(-x)=-g(x)$，

设 $\quad H(x)=f(x)g(x)$

$\therefore H(-x)=f(-x)g(-x)=f(x)[-g(x)]=-f(x)g(x)=-H(x)$

故 $H(x)$ 为奇函数。

12 下列函数中哪些是偶函数，哪些是奇函数，哪些既非奇函数又非偶函数？

(1) $y=x^2(1-x^2)$　(2) $y=3x^2-x^3$　(3) $y=\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$

(4) $y=x(x-1)(x+1)$　(5) $y=\sin x-\cos x+1$　(6) $y=\dfrac{a^x+a^{-x}}{2}$

以上各题定义域均关于原点对称，需判断 $f(x)$、$f(-x)$ 之关系

解 (1) $f(-x)=(-x)^2[1-(-x)^2]=x^2(1-x^2)=f(x)$

故 $f(x)$ 为偶函数；

(2) $f(-x)=3(-x)^2-(-x)^3=3x^2+x^3\neq f(x)$ 且 $f(-x)\neq -f(x)$

故 $f(x)$ 非奇非偶函数；

(3) $f(-x)=\dfrac{1-(-x)^2}{1+(-x)^2}=\dfrac{1-x^2}{1+x^2}=f(x)$

故 $f(x)$ 为偶函数；

(4) $f(-x)=(-x)[(-x)-1][(-x)+1]=-x(x-1)(x+1)=-f(x)$

故 $f(x)$ 为奇函数；

(5) $f(-x)=\sin(-x)-\cos(-x)+1=-\sin x-\cos x+1\neq f(x)$ 且 $f(-x)\neq -f(x)$

故 $f(x)$ 为非奇非偶函数；

(6) $f(-x)=\dfrac{a^{(-x)}+a^{-(-x)}}{2}=\dfrac{a^x+a^{-x}}{2}=f(x)$

故 $f(x)$ 为偶函数。

13 下列各函数中哪些是周期函数？对于周期函数，指出其周期。

(1) $y=\cos(x-2)$　(2) $y=\cos 4x$　(3) $y=1+\sin \pi x$

(4) $y=x\cos x$　(5) $y=\sin^2 x$

解 (1)周期 $l=2\pi$；(2)周期 $l=\dfrac{\pi}{2}$；

(3)周期 $l=2$；(4) $y=x\cos x$ 不是周期函数；

(5)周期 $l=\pi$。(由于 $y=\sin^2 x=\dfrac{1-\cos 2x}{2}$)

14 求下列函数的反函数：

(1) $y=\sqrt[3]{x+1}$　(2) $y=\dfrac{1-x}{1+x}$

(3) $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}(ad-bc\neq 0)$

(4) $y=2\sin 3x\left(-\dfrac{\pi}{6}\leqslant x\leqslant\dfrac{\pi}{6}\right)$　(5) $y=1+\ln(x+2)$　(6) $y=\dfrac{2^x}{2^x+1}$