稳定性理论与周期解和概周期解的存在性

WENDINGXING LILUN YU ZHOUQIJIE HE GAIZHOUQIJIE DE CUNZAIXING

广西人民出版社

稳定性理论与
周期解和概周期解的存在性

（日）T.Yoshizawa 著
郑祖庥 陈纪鹏 张书年 译
林 振 声 审

广西人民出版社

T. Yoshizawa

Stability Theory and the Existence of Periodic Solutions and Almost Periodic Solutions

Springer-Verlag 1975

稳定性理论与周期解和概周期解的存在性

（日）T·Yoshizawa 著

郑祖庥 陈纪鹏 张书年 译

林振声 审

☆

广西人民出版社出版

（南宁市河堤路14号）

广西新华书店发行 广西民族印刷厂印刷

*

开本 850×1168 1/32 7.625 印张 185 千字

1985年9月第1版 1985年9月第1次印刷

印 数 1—2,000 册

书号：7113·540 定价：1.90 元

译　序

本书内容大致可分为三个部分．第一部分是预备知识，作者把阅读本书必备的知识，诸如研究稳定性理论的李雅普诺夫函数，研究概周期微分方程的概周期函数、拟周期函数，以及微分方程的边值问题等都作了介绍，作者将这些散见于不同书籍的内容以简明的形式系统地写在一起，为读者提供了很大方便；第二部分扼要地叙述了一般的稳定性理论，旨在阐明概周期微分方程的稳定性问题，这部分内容包含在第二章里；第三部分是讨论概周期系统的概周期解的存在性．作者首先讨论周期系统的周期解及其与有界解的关系，然后通过类比，讨论了概周期系统的概周期解的存在性及其与有界解的关系．

概括地说，本书有以下两个特点：

一、总结了七十年代以前有关概周期系统的概周期解的存在性、稳定性的研究工作，同时发展了这方面的理论．内容丰富新颖，阐述精练严谨．

二、由浅入深，自成系统．所论述的问题很重要，却写得通俗有趣，步步深入，独具一格．因此本书既可以作为初学者的入门书，又可以作为有关专家、研究生、大学生的参考书．

目前，国内外出版的书籍中，尚未看到一本如此系统而又如此精练地论述概周期微分方程的著作，此书将以崭新的面貌标立于名著之林．陈纪鹏同志和张书年同志把它译成中文，无疑是一

件十分有益的工作，也是对我国数学界的一个贡献。

本书没有论及概周期泛函微分方程，这是唯一的不足之处。可喜的是郑祖庥同志用适当的篇幅，为此书写了这方面的补充内容并作为译本的附录，使得此书增色不少。

最后希望此书中译本的出版，能对我国从事概周期微分方程理论研究的同志有所启发，能引起广大数学爱好者对这一数学领域的兴趣，从而能为发展和繁荣我国科学事业发挥应有的作用。

林振声

1984年5月于福州大学

序　　言

鉴于稳定性理论已有一些不同方面的优秀著作，作者仅选择了其中与周期解和概周期解的存在性定理有关的一些最新课题．作者希望这本书也能够成为稳定性理论的入门书．本书包括运用李雅普诺夫第二方法的稳定性理论和对概周期系统稳定性性质的稍进一步的讨论，并且与解的有界性联系起来讨论周期系统的周期解的存在性，以及与有界解的某种稳定性性质联系起来考虑概周期系统的概周期解的存在性．在概周期系统的理论中，我们不得不考虑依赖于参数的概周期函数，而大多数关于概周期函数的教科书并不包含这一内容．因此，作为预备知识，第一章打算对带参数的概周期函数的一些性质，以及渐近概周期函数的一些性质提供指南．

本书发端于关于稳定性理论的一个讨论班，它是作者于1972—1973学年在密执安州立大学数学系举办的．作者十分感谢Pui-Kei Wong教授和该系同仁的热情款待和许多有益的交谈，作者对于Katherine MacDougall 夫人为本书作出的卓越的准备工作表示感谢．作者也对Junji Kato 教授对原稿的有益的批评，和Shui-Nee Chow教授对本书的仔细校阅表示感激．

T. Yoshizawa

于日本仙台

目　录

第一章　预备知识

本书始终考虑实的微分方程系统，并且将使用下述记号．实区间$a<t<b$，$a\leqslant t\leqslant b$，$a\leqslant t<b$和$a<t\leqslant b$分别用(a, b)，$[a, b]$，$[a, b)$和$(a, b]$来表示．R表示整条实数轴，即$R=(-\infty,\infty)$．I表示区间$0\leqslant t<\infty$，R^n表示n维欧氏空间．对于$x\in R^n$，$|x|$是x的任意一种范数．对于$n\times n$矩阵$A=(a_{ij})$，定义A的范数为$|A|=\sup\limits_{|x|=1}|A_x|$，这里$x\in R^n$．集合$S$的闭包用$\overline{S}$表示，$N(\varepsilon,S)$表示$S$的$\varepsilon$-邻域．我们用$C(J\times D,R^n)$表示所有定义在$J\times D$上并在$R^n$中取值的连续函数的集合，这里$J$是$R$的一个子集，$D$是$R^n$的一个子集．

§1．李雅普诺夫函数

设$f(t, x)\in C(I\times D, R^n)$，这里$D$是$R^n$中的开集．对于系统

$$x'=f(t,x)\qquad \left('=\frac{d}{dt}\right), \tag{1.1}$$

我们将考虑定义在$R\times D$中的开集S上的连续数量函数$V(t,x)$．我们假定$V(t,x)$关于x满足局部的李普希兹条件，也就是对于

S中的每一点，存在邻域U和正数$L(U)$，使得

$$|V(t,x)-V(t,y)|\leqslant L(U)|x-y|$$

对于任何$(t,x)\in U$，$(t,y)\in U$成立。

对应于函数$V(t,x)$，我们定义函数

$$\dot{V}_{(1.1)}(t,x)=\overline{\lim_{h\to 0+}}\frac{1}{h}\left\{V(t+h,\ x+hf(t,x))-V(t,\ x)\right\}. \quad (1.2)$$

设$x=x(t)$是(1.1)停留在S中的解，并用$V'(t,x(t))$表示$V(t,x(t))$的上右导数，即

$$V'(t,x(t))=\overline{\lim_{h\to 0+}}\frac{1}{h}\left\{V(t+h,x(t+h))-V(t,x)\right\}. \quad (1.3)$$

对于点$(t,x)\in S$和小的h，存在(t,x)的邻域U和$L>0$，使得$\overline{U}\subset S$，$(t+h,x+hf(t,x))\in U$，$(t+h,x(t+h))\in U$且对于$(\tau,\zeta)\in U$和$(\tau,\eta)\in U$

$$|V(\tau,\zeta)-V(\tau,\eta)|\leqslant L|\zeta-\eta|.$$

此时我们有

$$\begin{aligned}&V(t+h,x(t+h))-V(t,x)\\&=V(t+h,x+hf(t,x)+h\varepsilon)-V(t,x)\\&\leqslant V(t+h,x+hf(t,x))+Lh|\varepsilon|-V(t,x),\end{aligned} \quad (1.4)$$

这里ε随h而趋向于零。从(1.4)得出

$$\begin{aligned}&\overline{\lim_{h\to 0+}}\frac{1}{h}\left\{V(t+h,x(t+h))-V(t,x)\right\} \quad (1.5)\\&\leqslant\overline{\lim_{h\to 0+}}\frac{1}{h}\left\{V(t+h,x+hf(t,x))-V(t,x)\right\}.\end{aligned}$$

另一方面，我们有

$$\begin{aligned}&V(t+h,x(t+h))-V(t,x)\\&\geqslant V(t+h,x+hf(t,x))-Lh|\varepsilon|-V(t,x),\end{aligned}$$

由此推出$\dot{V}_{(1.1)}(t,x)\leqslant V'(t,x(t))$。于是由此式及(1.5)式得

$$\dot{V}_{(1.1)}(t,x)=V'(t,x(t)).^{*} \tag{1.6}$$

通过相同的计算，我们得到关系式

$$\varlimsup_{h\to 0+}\frac{1}{h}\left\{V(t+h,x(t+h))-V(t,x)\right\}$$

$$=\varlimsup_{h\to 0^+}\frac{1}{h}\left\{V(t+h,x+hf(t,x))-V(t,x)\right\}.^{**} \tag{1.7}$$

假若$V(t,x)$具有连续的一阶偏导数，则显然有

$$\dot{V}_{(1.1)}(t,x)=\frac{\partial V}{\partial t}+\frac{\partial V}{\partial x}\cdot f(t,x),$$

这里“·”表示数量积。

附注 在$v(t,x)$关于x不满足局部李普希兹条件的情况下，即使解$x(t)$是右方唯一的，我们也未必有关系式（1.6）.例如对于方程$x'=2t$，$x\geqslant 0$，考虑函数$V=\sqrt{x}$，$x\geqslant 0$.此时显然有$\dot{V}(0,0)=0$，但是对于经过（0，0）的解$x(t)=t^2$，我们有$V'(0,0)=1$.

如所周知，若$\dot{V}_{(1.1)}(t,x)\leqslant 0$从而$V'(t,x(t))\leqslant 0$，则函数$V(t,x(t))$是$t$的非增函数，也就是$V(t,x)$沿着（1.1）的解是非增的。反之，若$V(t,x)$沿着（1.1）的解为非增，则我们有

$$\dot{V}_{(1.1)}(t,x)\leqslant 0.$$

函数$V(t,x)$的下述性质是重要的，特别是在研究扰动系统解的性态时更是这样。设$x(s)$和$y(s)$是对于$s\geqslant t$有定义的连续可微函数，且$x(t)=y(t)=x$，则由定义

---

* （1.3）应为$V'(t,x(t))=\varlimsup_{h\to 0^+}\frac{1}{h}\{V(t+h,x(t+h))-V(t,x(t))\}$，

而(1.6)应为$\dot{V}_{(1.1)}(t,x)|_{x=x(t)}=V'(t,x(t))$.

并因此对有关推导应作相应修改.——译注

** （1.7）应为$\varlimsup_{h\to 0^+}\frac{1}{h}\{V(t+h,x(t+h))-V(t,x(t))\}$

$=\{\varlimsup_{h\to 0^+}\frac{1}{h}\{V(t+h,x+hf(t,x))-V(t,x)\}\}_{x=x(t)}$.

——译注

$$V'(t,x(t)) = \overline{\lim_{h\to 0+}}\frac{1}{h}\Big\{V(t+h,x(t+h)) - V(t,x(t))\Big\},$$

$$v'(t,y(t)) = \overline{\lim_{h\to 0+}}\frac{1}{h}\Big\{V(t+h,y(t+h)) - V(t,y(t))\Big\}.$$

设L是$V(t,x)$在点(t,x)某邻域中的李普希兹常数.此时对于充分小的h,

$$\begin{aligned}V'(t,y(t)) &\leqslant \overline{\lim_{h\to 0+}}\frac{1}{h}\Big\{V(t+h,x(t+h)) - V(t,y(x))\Big\} \\ &\quad + \overline{\lim_{h\to 0+}}\frac{1}{h}\Big\{V(t+h,y(t+h)) - V(t+h,x(t+h))\Big\} \\ &\leqslant \overline{\lim_{h\to 0+}}\frac{1}{h}\Big\{V(t+h,x(t+h)) - V(t,x(t))\Big\} \\ &\quad + \overline{\lim_{h\to 0+}}\frac{1}{h}L\,|y(t+h) - x(t+h)|.\end{aligned}$$

于是我们有

$$V'(t,y(t)) \leqslant V'(t,x(t)) + L\,|y'(t) - x'(t)|.$$

当我们说函数$V(t,x)$是一个**李雅普诺夫函数**时,总假定$V(t,x)$是关于x满足局部李普希兹条件的连续数量函数。考虑系统(1.1),并设$V(t,x)$是一个李雅普诺夫函数。假设存在一个定义在$0\leqslant t<\infty$,$|u|<\infty$上的实值连续函数$\omega(t,u)$,使得对于所有$(t,x)\in I\times D$有

$$\dot{V}_{(1.1)}(t,x) \leqslant \omega(t,V(t,x)) \tag{1.8}$$

设$u(t,t_0,u_0)$是

$$u' = \omega(t,u),\ u_0 = V(t_0,x_0) \tag{1.9}$$

的最大解,则作为(1.8)的推论,(1.1)的解$x(t,t_0,x_0)$与$u(t,t_0,x_0)$之间有不等式

$$V(t,x(t,t_0,x_0)) \leqslant u(t,t_0,x_0) \tag{1.10}$$

它对于所有使$x(t,t_0,x_0)$和$u(t,t_0,x_0)$有定义的$t\geqslant t_0$均成立。

这是非常普遍的**比较原理**的最简单的形式。比较原理被广泛地应用于处理各种定性问题。在实际应用中它是非常重要的工

具，因为它将确定（1.1）的解的性态问题归结为研究数量方程（1.9）的解，以及李雅普诺夫函数V的性质问题。

比较原理可以由下述定理确证（见〔55〕,〔80〕）。考虑数量微分方程

$$u' = \omega(t,u), \tag{1.11}$$

这里$\omega(t,u)$在开的连通集$\Omega \subset R^2$上连续。

定理1.1 设$u(t)$是（1.11）在区间〔a，b〕上的右方最大解。若$x(t)$在〔a，b〕上连续，$x(a) \leqslant u(a)$，且在（a，b）上满足

$$D^+x(t) \leqslant \omega(t,x(t)),^*$$

则对于$a \leqslant t \leqslant b$成立$x(t) \leqslant u(t)$，这里

$$D^+x(t) = \overline{\lim_{h\to 0+}}\frac{x(t+h)-x(t)}{h}.$$

类似地，设$u(t)$是（1.1）在区间〔a，b〕上的右方最小解。若$x(t)$在〔a，b〕上连续，$x(a) \geqslant u(a)$，且在（a，b）上有

$$D_+x(t) \geqslant \omega(t,x(t)),$$

则对于$a \leqslant t \leqslant b$成立$x(t) \geqslant u(t)$，这里

$$D_+x(t) = \underline{\lim_{h\to 0+}}\frac{x(t+h)-x(t)}{h}.^*$$

附注 在定理1.1中，$h\to 0^+$可以用$h\to 0^-$代替，结果仍真。

§2. 概周期函数

概周期性是纯周期性的推广。根据我们的意图，我们将考虑含有一个参数的概周期函数。

---

* 原书定理1.1中恰好将D_+与D^+对换，译文中已作改正.——译注

定义2.1 设$f(t,x)\in C(R\times D,R^n)$，这里$D$是$R^n$（或更一般地，是一可分的Banach空间）中的开集。如果对于任意的$\varepsilon>0$和D中的任意紧集S，存在正数$l(\varepsilon,S)$，使得任一长度为$l(\varepsilon,S)$的区间至少含有一个τ而有

$$|f(t+\tau,x)-f(t,x)|\leqslant\varepsilon \tag{2.1}$$

对于所有$t\in R$和所有$x\in S$成立，则称$f(t,x)$是**关于t对$x\in D$一致概周期的**。

（2.1）中的数τ称为**f（t,x）的ε-平移数**。我们用$E\{\varepsilon,f,S\}$表示f的对$x\in S$的所有ε-平移数的集合。平移数的下述性质是不难验证的。对于一个确定的紧集S，

（i）若$\varepsilon'>\varepsilon$，则ε-平移数也是ε'-平移数，从而$E\{\varepsilon,f,S\}\subset E\{\varepsilon',f,S\}$；

（ii）若τ是ε-平移数，则$-\tau$也是ε-平移数；

（iii）若τ_1,τ_2分别是ε_1-平移数和ε_2-平移数，则$\tau_1\pm\tau_2$是$(\varepsilon_1+\varepsilon_2)$-平移数。

定义2.2 设$f(t,x)\in C(R\times D,R^n)$是关于$t$对$x\in D$一致概周期的。设$\Lambda$是实数$\lambda$的集合，使得

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T f(t,x)e^{-i\lambda t}dt,\quad i=\sqrt{-1}, \tag{2.2}$$

对于$x\in D$不恒等于零。由于D是可分的，故集合Λ是可列集，比如记作$\{\lambda_j\}$。由集合Λ的元素的整系数线性组合得到的所有实数所组成的集合，称为**f(t,x)的模**。就是说，f的模数$=\left\{\sum_{j=1}^{N}n_j\lambda_j;\ n_j,N\geqslant1\text{ 均为整数}\right\}$。若$\{\gamma_j\}$是任一实数序列，$\{\alpha_j\}$是线性无关的，且$\{\gamma_j\}$中的每个$\gamma$是$\{\alpha_j\}$的元素具整系数的有限线性组合，则我们说$\{\alpha_j\}$是$\{\gamma_j\}$的一个**整数基**。

我们现在来证明一些定理，它们在今后将被用到。

定理2.1 设$f\in C(R\times D,R^n)$是关于t对$x\in D$一致概周期

的，则$f(t,x)$在$R\times S$上是有界和一致连续的，这里S是D中的任一紧集.

证明 对于$\varepsilon=1$，存在$l(S)>0$，使得任一长度为$l(S)$的区间含有τ，且有

$$|f(t+\tau,x)-f(t,x)|\leqslant 1, t\in R, x\in S.$$

设M是$|f(t,x)|$在$[0,l(s)]\times S$上的最大值. 不难看出，对于任一$t\in(-\infty,\infty)$，我们可找到数$\tau\in E\{1,f,S\}$，使得$t+\tau$属于$[0,l(S)]$.因此对于$x\in S$有$|f(t+\tau,x)|\leqslant M$. 然而

$$|f(t+\tau,x)-f(t,x)|\leqslant 1,\quad x\in S,$$

故对于所有$t\in R$和$x\in S$有$|f(t,x)|\leqslant M+1$.

其次证明一致连续性.对于给定的$\varepsilon>0$,考虑$l=l\left(\frac{\varepsilon}{3},S\right)$并设$\delta(0<\delta<1)$是一个这样的数，它使得如果$|t_1-t_2|<\delta$，则对于任意$t_1$，$t_2\in[0,l+1]$和$x\in S$

$$|f(t_1,x)-f(t_2,x)|<\frac{\varepsilon}{3}$$

此δ依赖于ε和S，而δ是存在的，因为f在$[0,l+1]\times S$上一致连续的.设t和t'是满足$|t-t'|<\delta$的任意两个数. 此时存在某个$\tau\in E\left\{\frac{\varepsilon}{3},f,S\right\}$,使得$t+\tau\in[0,l+1]$和$t'+\tau\in[0,l+1]$.因此对于任意的$t\in R$和$x\in S$，我们有

$$|f(t+\tau,x)-f(t'+\tau,x)|<\frac{\varepsilon}{3}.\ x\in S$$

以及

$$|f(t+\tau,x)-f(t,x)|<\frac{\varepsilon}{3},\ |f(t'+\tau,x)-f(t',x)|<\frac{\varepsilon}{3}.$$

于是对于所有满足$|t-t'|<\delta$的t,t'和对所有$x\in S$，有$|f(t,x)-f(t',x)|<\varepsilon$. 这就完成了证明.*

---

* 必须指出这里的证明是对定理的结论而言,应该证明的是,对于任给的$\varepsilon>0$,存在$\delta(\varepsilon)>0$,使得当(t,x),$(t',x')\in R\times S$且$|t-t'|<\delta$,$|x-x'|<\delta$时,有$|f(t,x)-f(t',x')|<\varepsilon$.这可以证明.——译注

我们现在来讨论**概周期函数的正规性**。首先来证明下述引理。

引理2.1 设 $f(t,x)\in C(R\times D,R^n)$ 是关于 t 对 $x\in D$ 一致概周期的，这里 D 是 R^n 中的开集，并设 $\{h_k\}$ 是一实数序列，则对任一 $\varepsilon>0$ 和 D 中的任一紧集 S，有一对应的子序列 $\{h_{k_j}\}$ 使得任意一对函数 $f(t+h_{k_j},x)$ 之差的范数小于 ε，其中 $x\in S$。

证明 对于给定的 $\varepsilon>0$，有对应的 $l=l\left(\frac{\varepsilon}{4},S\right)$，使得每一个长度为 l 的区间含有一个 $\frac{\varepsilon}{4}$-平移数。对于每个 h_k，存在 τ_k 和 γ_k，使得 $h_k=\tau_k+\gamma_k$，这里 $\tau_k\in E\left\{\frac{\varepsilon}{4},f,S\right\}$ 而 $0\leqslant\gamma_k\leqslant l$。根据定理2.1，$f(t,x)$ 在 $R\times S$ 上是一致连续的，故存在 $\delta(\varepsilon,S)>0$，使得若 $|t'-t''|<2\delta$ 和 $x\in S$ 时有 $|f(t',x)-f(t'',x)|<\frac{\varepsilon}{2}$。因 $0\leqslant\gamma_k\leqslant l$，故存在 $\{\gamma_k\}$ 的子序列 $\{\gamma_{k_j}\}$，使得当 $j\to\infty$ 时 $\gamma_{k_j}\to\gamma$，这里 γ 是所有 γ_k 的集合的极限点，因而 $0\leqslant\gamma\leqslant l$。考虑使 $\gamma-\delta<\gamma_{k_j}<\gamma+\delta$ 成立的那些 h_{k_j}，设 h_{k_p} 和 h_{k_m} 是这样的两个值，则我们便有

$$
\begin{aligned}
&\sup_{t\in R}|f(t+h_{k_p},x)-f(t+h_{k_m},x)|\\
&=\sup|f(t+\tau_{k_p}-\tau_{k_m}+\gamma_{k_p}-\gamma_{k_m},x)-f(t,x)|\\
&\leqslant\sup|f(t+\tau_{k_p}-\tau_{k_m}+\gamma_{k_p}-\gamma_{k_m},x)-f(t+\gamma_{k_p}-\gamma_{k_m},x)|\\
&\quad+\sup|f(t+\gamma_{k_p}-\gamma_{k_m},x)-f(t,x)|.
\end{aligned}
$$

由于 $\tau_{k_p}-\tau_{k_m}\in E\left\{\frac{\varepsilon}{2},f,S\right\}$ 且 $|\gamma_{k_p}-\gamma_{k_m}|<2\delta$，故对于所有 $t\in R$ 和 $x\in S$ 我们有

$$|f(t+h_{k_p},x)-f(t+h_{k_m},x)|<\varepsilon.$$

这就证明了引理。

引理2.2 设 $f(t,x)\in C(R\times D,R^n)$ 是关于 t 对 $x\in D$ 一致概周期的，并设 S 是 D 中的紧集，则对任一实数序列 $\{h_k\}$，存在子序列

$\{h_{k_j}\}$,使得函数序列$\{f(t+h_{k_j},x)\}$在$R\times S$上一致收敛.

证明 由引理2.1，我们可选取子序列$\{h^{(1)}_{k_j}\}$，使得对于任意两个正整数p，m，对所有$t\in R$和$x\in S$有

$$|f(t+h^{(1)}_{k_p},\ x)-f(t+h^{(1)}_{k_m},x)|<1.$$

类似地我们可选取序列$\{h^{(1)}_{k_j}\}$的子序列$\{h^{(2)}_{k_j}\}$，使得对于任意两个正整数p，m，对所有$t\in R$和$x\in S$有

$$|f(t+h^{(2)}_{k_p},\ x)-f(t+h^{(2)}_{k_m},\ x)|<\frac{1}{2}.$$

然后我们再取$\{h^{(2)}_{k_j}\}$的子序列$\{h^{(3)}_{k_j}\}$，使得

$$|f(t+h^{(3)}_{k_p},x)-f(t+h^{(3)}_{k_m},x,|<\frac{1}{3}$$

等等．现取函数序列

$$f(t+h^{(1)}_{k_1},x),f(t+h^{(2)}_{k_2},x),f(t+h^{(3)}_{k_3},x),\cdots\cdots$$

此时对于$p,m(p<m)$及对所有$t\in R$和$x\in S$,我们有

$$|f(t+h^{(p)}_{k_p},x)-f(t+h^{(m)}_{k_m},x)|<\frac{1}{p}.$$

这表明序列$\{f(t+h^{(i)}_{k_i},x)\}$在$R\times S$上一致收敛.

定理2.2 设$f(t,x)\in C(R\times D,R^n)$是关于$t$对$x\in D$一致概周期的，则对于任一实数序列$\{h'_k\}$,存在$\{h'_k\}$的子序列$\{h_k\}$以及连续函数$g(t,x)$,使得当$k\to\infty$时在$R\times S$上一致地有

$$f(t+h_k,x)\to g(t,x), \tag{2.3}$$

这里S是D中的任一紧集．并且，$g(t,x)$也是关于t对$x\in D$一致概周期的．

证明 由于D是R^n中的子集，故我们可无困难地证明此定理．然而，我们现在将给出一种证明，它可应用于当D是可分空间中的集合时的更一般的情形．

由于D是可分的，故存在$\{x_l\}$,$x_l\in D$,并且对每一$x\in D$,存在$\{x_{l_j}\}$,使得当$j\to\infty$时有$x_{l_j}\to x$．设$X=\{x_l\}$．由于X是可列集，而单个点是紧集，故存在子序列$\{h_k\}$,使得$f(t+h_k,x_l)$对于