怎样用换元法巧解数学题

朱成杰

江苏教育出版社

怎样用换元法巧解数学题

朱 成 杰

江 苏 教 育 出 版 社

怎样用换元法巧解数学题

朱 成 杰

江 苏 教 育 出 版 社 出 版
江 苏 省 新 华 书 店 发 行　　江苏新华印刷厂印刷
开本 787×1092 毫米 1/32　印张 7.25　字数 152,800
1987 年 8 月第 1 版　1987 年 8 月第 1 次印刷
印数 1—15,000 册
ISBN 7-5343-0204-8/G・190
统一书号：7351・587　　定价：1.20 元
责任编辑　王建军

目　　录

在数学学习中，如果能够在掌握基础知识、加强基本技能训练的同时，也能注意数学中一些基本思想方法的学习，对于提高自己的数学修养，增强分析问题、解决问题的能力，是大有裨益的。

换元法，是数学中一个非常重要而且应用十分广泛的思想方法。这本小册子力图对换元法及其在中学数学中的应用进行一个比较系统的介绍。首先，通过例题阐述换元法的基本思想、常用的换元技巧，然后讨论换元法在各方面的应用，最后简要地介绍换元法的推广——辅助函数法。读完全书，读者如能对换元法有比较深入的了解，并由此而激发起对数学思想方法进一步学习研究的兴趣，这也就是作者最大的愿望了。

一、什么是换元法

§1 什么是换元法

我们先来讲一个“曹冲称象”的故事。

三国时，孙权送了一只大象给曹操，曹操要大臣们称一称大象有多重。由于古代没有足够大的秤能够秤出大象的重量，大臣们感到很为难。不料，曹操的儿子曹冲想出了一个

办法。这就是把大象牵到船上，在船沿齐水面的地方划一道记号，然后把象牵上岸换成一堆石头装上，使船沿的记号仍旧与水面相齐，再把这堆石头分多次秤出的重量，加起来就得到大象的重量。

曹冲把不可分割的大象换成重量相等但可以分割的石堆，从而巧妙地秤出了大象的重量。实际上，就是利用了"换元法"的思想。

下面我们再来看两个数学例子。

例1 求方程

$$(2\sqrt{x+1}-1)^4+(2\sqrt{x+1}-3)^4=16$$

的实数根。

如果按照一般的方法，将方程的左边展开、合并同类项，方程将会变得相当复杂。我们如设 $y=2\sqrt{x+1}-2$，那么原方程可以变形为关于 y 的方程

$$y^4+6y^2-7=0.$$

再设 $y^2=u$，上面的方程可化为

$$u^2+6u-7=0.$$

解得 $u_1=1$，$u_2=-7$。

由 $y^2=1$，得 $y=\pm1$。

因此 $2\sqrt{x+1}-2=\pm1$，

解得 $x_1=\dfrac{5}{4}$，$x_2=-\dfrac{3}{4}$。

由 $y^2=-7$，无实数解。

所以，原方程的解是：$x_1=\dfrac{5}{4}$，$x_2=-\dfrac{3}{4}$。

例2 已知 $a\sqrt{1-b^2}+b\sqrt{1-a^2}=1$，求证 a^2+b^2

$=1$.

一个自然的想法是先求出 a 和 b 的值，然后代入a^2+b^2，来证明结论，但是已知条件只有一个等式，要解出两个未知数，一般是不可能的．如果我们注意到已知条件中 a、b 的允许取值范围是 $|a|\leqslant 1$，$|b|\leqslant 1$，并考虑到三角函数变换的灵活性，设 $a=\sin\alpha$，$b=\sin\beta$，这里 α、β 都在区间$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$内取值．那么，已知等式可化为，

$$\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha=1,\ \text{即}\ \sin(\alpha+\beta)=1.$$

$$\therefore\quad \alpha+\beta=\frac{\pi}{2}.$$

因此，可证得

$$a^2+b^2=\sin^2\alpha+\sin^2\beta=\sin^2\alpha+\sin^2\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$$

$$=\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1.$$

我们通常把未知数或变数称为元．上面两个例题中所用的方法就是换元法，又称为设辅助未知数法或变量代换法．所谓**换元法**，就是在一个比较复杂的数学式子中，把整个式子的一部分看作一个量，用一个字母（变量）去代替它，从而简化复杂式子的结构，使问题易于解决．

换元法有两种基本类型．

设 $F(x)$是一个比较复杂的表达式，如 $F(x)$可以表示为一个以 $\varphi(x)$为中间变量的复合函数，则可设 $\varphi(x)=u$，于是

$$F(x)=G(\varphi(x))=G(u).$$

如果 $G(u)$比 $F(x)$容易解决，这里的换元就起了化繁为简的作用，如例 1，这是第一种换元法．

有时，为了解题的需要，也可以设 $x=\psi(t)$，于是

$$F(x)=F(\psi(t))=Q(t).$$

只要 $Q(t)$ 比较容易解决，同样也能起到化难为易的作用，如例 2，这是第二种换元法。

§2 常用的换元技巧

用换元法解题，关键在于辅助未知数要选择得适当。一般地说，如何选择辅助未知数并没有一个通用法则，往往因题而异，因人而异，技巧性较强。但只要多练习，经常进行归纳小结，也还是有些规律可以依循的。下面介绍几种常用的换元技巧。

1. 取相同式子换元

如果一个式子可以表示为某一个含有未知数的表达式的代数式，那么，我们可以设这个含有未知数的表达式为辅助未知数，从而使问题简化。

例 1 解方程 $(x^2+2x)^2-14(x^2+2x)-15=0$.

分析 如将括号打开会得到一个四次方程，显然，解起来比较繁复。仔细观察，不难发现，表达式 x^2+2x 在已知方程中重复出现。因此，不妨将 x^2+2x 看作一个新的未知数。

解 设 $y=x^2+2x$，那么原方程可化为

$$y^2-14y-15=0.$$

解得 $y_1=-1$，$y_2=15$.

由 $x^2+2x=-1$，得 $x_1=x_2=-1$；

由 $x^2+2x=15$，得 $x_3=3$，$x_4=-5$.

所以，原方程的解是 $x_1=x_2=-1$，$x_3=3$，$x_4=-5$.

例 2 解方程$(2x^2-3x+1)^2=22x^2-33x+1$。

分析 原方程中虽然没有一个相同的式子，但是如果注意到这个方程具有特点：方程左边底数中的二次项系数、一次项系数与方程右边的二次项系数、一次项系数对应成比例．只要通过适当配置常数项就可以进行换元。

解 设 $2x^2-3x+1=y$，那么原方程可化为

$$y^2-11y+10=0.$$

解得 $y_1=10$，$y_2=1$。

由此可得原方程的解：

$$x_1=3,\quad x_2=-\frac{3}{2},\ x_3=0,x_4=\frac{3}{2}.$$

凡是形如 $af^2(x)+bf(x)+c=0$ 的方程，或者可以化为这种形式的方程，都可以用取相同式子换元的方法，把原方程化为一元二次方程来解。

例 3 在实数集内解方程

$$2x^2+3x+3=5\sqrt{2x^2+3x+9}.$$

分析 如果方程两边同时平方，根号虽然能去掉，但得到的是一个四次方程，解题会遇到困难．通过观察，可以发现方程右边的被开方式与方程左边整式的二次项、一次项都相同，只是常数项不相同．因此可设$\sqrt{2x^2+3x+9}=y$。

解 设$\sqrt{2x^2+3x+9}=y$，那么原方程可化为

$$y^2-5y-6=0.$$

解得 $y_1=6$，$y_2=-1$。

显然，$\sqrt{2x^2+3x+9}=-1$ 无实数解。

由$\sqrt{2x^2+3x+9}=6$，得

$$x_1=3,\ x_2=-\frac{9}{2}.$$

经检验，$x_1=3$，$x_2=-\frac{9}{2}$都是原方程的根。

凡是形如 $af(x)+b\sqrt{f(x)}+c=0$，或者可以化为这种形式的方程都可以通过设$\sqrt{f(x)}=y$，将原方程化为一元二次方程来解。

例 4 在实数集内解方程

$$2(x+1)=2\sqrt{x(x+8)}+\sqrt{x}-\sqrt{x+8}.$$

分析 已知方程中 $2\sqrt{x(x+8)}$项恰好是$\sqrt{x}$与$\sqrt{x+8}$乘积的两倍。因此，可以先设法配方得到$(\sqrt{x}-\sqrt{x+8})^2$，然后将$\sqrt{x}-\sqrt{x+8}$用 y 进行代换。

解 原方程可化为

$$x-2\sqrt{x(x+8)}+(x+8)=\sqrt{x}-\sqrt{x+8}+6.$$

配方，得

$$(\sqrt{x}-\sqrt{x+8})^2-(\sqrt{x}-\sqrt{x+8})-6=0.$$

设$\sqrt{x}-\sqrt{x+8}=y$，那么原方程可化为

$$y^2-y-6=0.$$

解得 $y_1=3$，$y_2=-2$。

显然，$\sqrt{x}-\sqrt{x+8}=3$ 无实数解；

由$\sqrt{x}-\sqrt{x+8}=-2$，得 $x=1$。

经检验，$x=1$ 是原方程的根。

2. 取算术平均式换元

在解方程或因式分解时，如果题目中含有两个底的次数相同的齐次高次式或几个成等差数列的代数式，往往可以取它们的平均式进行换元，可达到降次或减少项数的目的。

例1 在实数集内解方程

$$(2x^2-x-6)^4+(2x^2-x-8)^4=16.$$

分析 解这种高次方程的关键是设法降次.由 $2x^2-x-6$ 与 $2x^2-x-8$ 的算术平均式是 $2x^2-x-7$,如果用y来代换 $2x^2-x-7$,原方程就可变形为一个双二次方程.

解 设 $y=2x^2-x-7$,那么原方程可化为

$$(y+1)^4+(y-1)^4=16.$$

展开化简,得 $\quad y^4+6y^2-7=0.$

再设 $y^2=z$,上面的方程可化为

$$z^2+6z-7=0,$$

解得 $\quad z_1=1,\ z_2=-7.$

显然 z_2 不合题意,舍去.

由 $y^2=1$,得 $\quad y=\pm1.$

代入 $y=2x^2-x-7$ 可得原方程的解为

$$x_1=2,\quad x_2=-\frac{3}{2},\quad x_3=\frac{1+\sqrt{65}}{4},\quad x_4=\frac{1-\sqrt{65}}{4}.$$

例2 在实数集内解方程

$$(6x+7)^2(3x+4)(x+1)=6.$$

解 为了便于利用算术平均式进行换元,将原方程化为

$$(6x+7)^2(6x+8)(6x+6)=6\times12.$$

因为 $6x+7$ 恰好是 $6x+6,6x+7,6x+8$ 的算术平均式,因此可设 $y=6x+7$,于是原方程可化为

$$y^2(y+1)(y-1)=72,$$

即 $\quad y^4-y^2-72=0.$

解得 $\quad y^2=-8$,无实数解;

$\quad y^2=9$, $\therefore\ y=\pm3.$

分别代入 $y=6x+7$ 得原方程的解：

$$x_1=-\frac{2}{3},\quad x_2=-\frac{5}{3}.$$

例3 解方程

$$(x+\sqrt{11})(x+2\sqrt{11})(x+3\sqrt{11})(x+4\sqrt{11})$$
$$=-40.$$

解 为了能用换元法解该方程，可对方程左边四个因式的顺序作如下调整：

$$[(x+\sqrt{11})(x+4\sqrt{11})]\times$$
$$[(x+2\sqrt{11})(x+3\sqrt{11})]=-40,$$

即 $(x^2+5\sqrt{11}x+44)\ (x^2+5\sqrt{11}x+66)=-40.$

设 $x^2+5\sqrt{11}x+55=y$，那么原方程可化为

$$(y-11)(y+11)=-40,$$

即 $y^2-121=-40.$

解得 $y_1=9$，$y_2=-9$。

由 $x^2+5\sqrt{11}x+55=9$，得

$$x_1=\frac{-5\sqrt{11}+\sqrt{91}}{2},\ x_2=\frac{-5\sqrt{11}-\sqrt{91}}{2};$$

由 $x^2+5\sqrt{11}x+55=-9$，得

$$x_3=\frac{-5\sqrt{11}+\sqrt{19}}{2},\ x_4=\frac{-5\sqrt{11}-\sqrt{19}}{2}.$$

所以，原方程的解是

$$x_{1,2}=\frac{-5\sqrt{11}\pm\sqrt{91}}{2};\ x_{3,4}=\frac{-5\sqrt{11}\pm\sqrt{19}}{2}.$$

3．取倒数关系换元

在那些含有互为倒数关系的式子的问题中，常常可以设

其中一个式子为y，则另一个式子为$\frac{1}{y}$，从而使问题得到化简。

例1 解方程$\frac{2(x^2+1)}{x+1}+\frac{6(x+1)}{x^2+1}=7$。

分析 用通常去分母的方法解显然比较麻烦。但是，如果我们抓住分式$\frac{x^2+1}{x+1}$与$\frac{x+1}{x^2+1}$互为倒数这个特点，就会发现有较好的解法。

解 设$\frac{x^2+1}{x+1}=y$，则$\frac{x+1}{x^2+1}=\frac{1}{y}$，原方程可化为

$$2y+\frac{6}{y}=7，即\ 2y^2-7y+6=0。$$

解得 $y_1=2$，$y_2=\frac{3}{2}$。

由 $\frac{x^2+1}{x+1}=2$，得 $x_1=1+\sqrt{2}$，$x_2=1-\sqrt{2}$；

由 $\frac{x^2+1}{x+1}=\frac{3}{2}$，得 $x_3=\frac{3+\sqrt{17}}{4}$，$x_4=\frac{3-\sqrt{17}}{4}$。

经检验，以上四个解都是原方程的解。

例2 解方程$(\sqrt{2+\sqrt{3}})^x+(\sqrt{2-\sqrt{3}})^x=4$。

分析 注意到$\sqrt{2+\sqrt{3}}$与$\sqrt{2-\sqrt{3}}$这两个根式互为倒数的特点，用换元法将该指数方程化为一元二次方程。

解 设$(\sqrt{2+\sqrt{3}})^x=y$，那么

$$(\sqrt{2-\sqrt{3}})^x=\left(\frac{1}{\sqrt{2+\sqrt{3}}}\right)^x$$

$$=(\sqrt{2+\sqrt{3}})^{-x}=\frac{1}{y}。$$

因此，原方程可化为

$$y+\frac{1}{y}=4,\ 即\ y^2-4y+1=0。$$

解得 $y_1=2+\sqrt{3}$， $y_2=2-\sqrt{3}$。

由$(2+\sqrt{3})^{\frac{x}{2}}=2+\sqrt{3}$，得 $\frac{x}{2}=1$，即 $x=2$；

由$(2+\sqrt{3})^{\frac{x}{2}}=2-\sqrt{3}$，得 $\frac{x}{2}=-1$，即 $x=-2$。

所以，原方程的解是 $x_1=2$，$x_2=-2$。

4．取等比式换元

解一个只含有三项的方程，如果三项成等比数列，则取以等比中项为分母，另外任一项为分子的代数式进行变量代换，可将方程化为一元二次方程。

例1 解方程 $6^x+4^x=9^x$。

分析 $\because \frac{4^x}{6^x}=\frac{6^x}{9^x}$ $\therefore$ 4^x，6^x，9^x 成等比数列．于是可设 $y=\frac{9^x}{6^x}=\left(\frac{3}{2}\right)^x$。

解 方程两边同除以 6^x，得

$$1+\frac{4^x}{6^x}=\frac{9^x}{6^x}。$$

设 $y=\frac{9^x}{6^x}=\left(\frac{3}{2}\right)^x$， 那么$\frac{4^x}{6^x}=\left(\frac{2}{3}\right)^x=\frac{1}{y}$．于是原方程可化为

$$1+\frac{1}{y}=y,\quad 即\ y^2-y-1=0。$$

解得 $y_1=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$， $y_2=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$．

由 $\left(\dfrac{3}{2}\right)^x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$，得 $x=\log_{\frac{3}{2}}\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$；

$\left(\dfrac{3}{2}\right)^x=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ 无解．

∴ 原方程的解是 $x=\log_{\frac{3}{2}}\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$．

例 2 解方程 $\sqrt[n]{(x+1)^2}+\sqrt[n]{(x-1)^2}=4\sqrt[n]{x^2-1}$．

解 原方程两边同除以 $\sqrt[n]{x^2-1}$，得

$$\sqrt[n]{\frac{x+1}{x-1}}+\sqrt[n]{\frac{x-1}{x+1}}=4.$$

设 $\sqrt[n]{\dfrac{x+1}{x-1}}=y$，则 $\sqrt[n]{\dfrac{x-1}{x+1}}=\dfrac{1}{y}$．于是原方程可化为

$$y+\frac{1}{y}=4,\quad 即\ y^2-4y+1=0.$$

解得 $y_1=2+\sqrt{3}$， $y_2=2-\sqrt{3}$．

由 $\sqrt[n]{\dfrac{x+1}{x-1}}=2+\sqrt{3}$，得 $x_1=\dfrac{(2+\sqrt{3})^n+1}{(2+\sqrt{3})^n-1}$；

由 $\sqrt[n]{\dfrac{x+1}{x-1}}=2-\sqrt{3}$，得 $x_2=\dfrac{(2-\sqrt{3})^n+1}{(2-\sqrt{3})^n-1}$．

经检验，原方程的解是

$$x_1=\frac{(2+\sqrt{3})^n+1}{(2+\sqrt{3})^n-1},\quad x_2=\frac{(2-\sqrt{3})^n+1}{(2-\sqrt{3})^n-1}.$$

5. 取比值换元

在那些含有若干个等比式的问题中，往往可以先设一个辅助未知量表示这个比值，然后求解。

例 1 如果 $\frac{a-b}{w}=\frac{b-c}{x}=\frac{c-d}{y}=\frac{d-a}{z}$，并且 a、b、c、d 互不相等，求证：$w+x+y+z=0$。

证明 设 $\frac{a-b}{w}=\frac{b-c}{x}=\frac{c-d}{y}=\frac{d-a}{z}=k$，

则 $kw=a-b, kx=b-c, ky=c-d, kz=d-a$。

把以上四式相加，得

$$k(w+x+y+z)=0。$$

$\because$ a、b、c、d 互不相等，$\therefore$ $k\neq 0$。

因此证得 $w+x+y+z=0$。

例 2 已知 $x-1=\frac{y+1}{2}=\frac{z-2}{3}$，求证 $x^2+y^2+z^2\geqslant 4\frac{3}{14}$。

证明 设 $x-1=\frac{y+1}{2}=\frac{z-2}{3}=k$，

于是 $x=k+1, y=2k-1, z=3k+2$。

把以上各式代入 $x^2+y^2+z^2$，得

$$x^2+y^2+z^2=(k+1)^2+(2k-1)^2+(3k+2)^2$$

$$=14\left(k+\frac{5}{14}\right)^2+4\frac{3}{14}\geqslant 4\frac{3}{14}。$$

6. 取对称式换元

当题目本身为对称式，或可表示为形如 $x+y$，xy 等对称式的运算结果时，常可设对称式为变量替换式。

例 1 解方程组 $\begin{cases} x^2+y^2=200, \\ xy=-28. \end{cases}$

分析 若交换 x 和 y，方程组不变，属于对称方程组，因此可取对称式换元。

解 原方程组可化为

$$\begin{cases} (x+y)^2-2xy=200 \\ xy=-28. \end{cases}$$

设 $x+y=u, xy=v$，则方程组可简化为

$$\begin{cases} u^2-2v=200 \\ v=-28. \end{cases}$$

解这个方程组，得

$$\begin{cases} u=\pm 12 \\ v=-28, \end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{cases} x+y=\pm 12 \\ xy=-28. \end{cases}$$

解得 $\begin{cases} x_1=14 \\ y_1=-2, \end{cases} \begin{cases} x_2=-2 \\ y_2=14, \end{cases} \begin{cases} x_3=-14 \\ y_3=2, \end{cases} \begin{cases} x_4=2 \\ y_4=-14. \end{cases}$

这就是原方程组的解。

例 2 如果实数 p、q、r 满足 $(p+2q)(p+2r)=(q+2r)(q+2p)=(r+2p)(r+2q)$，试证明 $p=q=r$。

证明 已知条件中的等式关于字母 p、q、r 轮换对称，因此可设对称式 $p+q+r=s$，代入已知式，得

$$\begin{aligned}[s+(q-r)][s-(q-r)] &= [s+(r-p)][s-(r-p)] \\ &= [s+(p-q)][s-(p-q)]\end{aligned}$$

即 $s^2-(q-r)^2=s^2-(r-p)^2=s^2-(p-q)^2$。

于是，有 $(p-q)^2=(q-r)^2=(r-p)^2$。 (1)