初三

代数

数学辅导员

北京一六一中学
萧淑英 主编

数 学 辅 导 员

初 三 代 数

北京一六一中学 萧淑英 主编

科 学 普 及 出 版 社

数学辅导员
初三代数
北京一六一中学 萧淑英 主编
责任编辑：刘 渔
李 东
封面设计：赵一东

科学普及出版社出版（北京海淀区白石桥路32号）
新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售
北京燕山印刷厂印刷
*
开本：787×1092毫米1/32印张：6.375字数：142千字
1988年12月第1版 1988年12月第1次印刷
印数：1—19852册 定价：1.70元
ISBN 7-110-00825-8/O·35

出 版 说 明

《数学辅导员》是配合现行初中数学课本并参照1990年新教学大纲编写的课外辅导读物。我社特邀了北京市一六一中学、师大附属实验中学及师大二附中的优秀教师参加编写。

本套书既然为"辅导员"，故既不是习题集，也不同于一般的升学指导，更不是课本的简单重复。它以开发学生智力、启迪学生思维为目标，在辅导上下功夫，着重基础知识。对学生学习中经常出现的问题予以重点辅导；对课文重点详加分析；对例题抓住解题突破口阐明思路，并介绍多种解法；习题附有答案或提示。为了提高读者综合运用知识的能力，书末安排了"赛一赛"，供读者学完全书后练习。

这套书编排与课本呼应，初中分五册：代数三册，几何二册。本书为初三代数，由北京一六一中学萧淑英老师主编。参加本书编写的还有苏陈耀、傅以伟、金莉荣等老师。在编写过程中，北京教育学院门树慧老师提出了宝贵的意见，在此表示感谢。

本书适合中学生平时练习或升学复习，亦适合广大青年自学参考，对中学教师也有一定的参考价值。

带有*者为超范围的习题，供有余力的同学选做。

目　　录

第一章　常用对数……………………………………………… 1
一、对数………………………………………………………… 1
二、积、商、幂、方根的对数…………………………………11
三、常用对数……………………………………………………19
四、对数的首数和尾数…………………………………………26
五、利用对数进行计算…………………………………………33
第二章　函数……………………………………………………39
一、直角坐标系…………………………………………………39
二、函数及其图象………………………………………………45
三、正比例函数和反比例函数…………………………………53
四、一次函数……………………………………………………60
五、二次函数……………………………………………………67
六、不等式………………………………………………………96
第三章　解三角形……………………………………………… 116
一、三角函数…………………………………………………… 116
二、解直角三角形……………………………………………… 134
三、解斜三角形………………………………………………… 141
四、解三角形的应用举例……………………………………… 169
赛一赛（一）…………………………………………………… 181
赛一赛（二）…………………………………………………… 183
习题答案………………………………………………………… 185

第一章　常用对数

一、对　　数

1. 对数的历史和学习对数的意义

对数的创始人是苏格兰数学家纳皮尔，他在1614年第一次制定了对数和对数表，简化了计算方法，对当时世界贸易和天文学中的数字计算起了重要的作用。在没有对数以前，天文学家在计算方面要花费许多精力和时间，自有了对数以后，终于把他们从繁琐的计算中解放出来了。法国著名天文学家、数学家拉普拉斯（1749—1827年）说："对数的计算，不仅免除了大数计算时不易避免的错误，并且几个月的工作可以用几天做完，无疑延长了天文学家的生命。"意大利物理学家伽里略（1564—1642年）曾说："给我空间、时间和对数，我可以创造一个宇宙。"从科学家的这些话中，可见对数在当时计算中起了重要的作用。当然它与今日的电子计算机的作用是不能比拟的。我们今天学习对数的目的何在呢？

（1）为了解决在学习乘方和开方中尚未解决的问题，即如何求指数的问题。如已知$2^x=10000$，如何求x；

（2）为了计算的需要，掌握对数的运算性质后，可以简化计算、节约时间，提高学习和工作效率。

2. 对数的定义

如果$a^b=N$（$a>0$且$a\neq1$），那么b叫做以a为底N的对数，记作$\log_a N=b$。

深刻理解对数的定义是学好本章的关键，应从哪些方面

加深理解呢？

（1）搞清对数式与指数式的区别与联系

联系：$a^b=N(a>0且a\neq1)$与$\log_a N=b$都是用来表示a、b、N三个数之间的关系的。它们互为逆运算，因此二者可以互化。深刻理解这一点，并熟练掌握它们之间的互化，会加深对对数概念的理解，也会对进行指数、对数的运算起到有利的作用。

区别：①从运算上看，指数式与对数式是两种不同的运算，一般来说，已知底数a和指数b，求幂是乘方运算，需要用指数式a^b；已知底数$a(a>0，且a\neq1)$和幂N，求指数b是对数运算，需要用对数式$\log_a N$来表示。

②同是a、b、N三个数，在两种运算中的名称不同，叫法不同，参见下表。

名称 字母 式	a	b	N
$a^b=N$	底数	指数	幂
$b=\log_a N$	底数	对数	真数

如象$a+b=c$与$c-a=b$中，同是c，在加法里叫和，在减法里叫被减数，a和b在加法里叫加数，在减法里叫减数或差。正因为名称不一样，叫法不一样，才能把这两种运算区别开来。

（2）搞清对数式$\log_a N=b$成立的条件及其原因

要弄清楚$\log_a N=b$成立的条件，首先要弄清楚$a^b=N$成立的条件，a^b不是在任何条件下都有意义的。若$b\leqslant0$时，则$a=0$就无意义，如0^0，0^{-2}无意义；若b是一个最简正分数，

分母是偶数，$a<0$ 在实数范围内无意义，如 $(-3)^{\frac{1}{2}}$ 无意义。因此能使 a^b 成立的条件是 $a>0$、b 为一切实数，又因为 $a>0$，则 $a^b>0$，即在 $a^b=N$ 中，N 也大于零。所以在 $\log_a N$ 中也应作相应的规定 $a>0$，$N>0$。在对数式中为什么又规定 $a\neq1$ 呢？这一点是和指数式不相同的，在指数式里 a 可以等于 1，因为 a 为 1 时，能得到唯一确定的值，如 $1^3=1$，$1^{\frac{1}{2}}=1$，$1^0=1$，$1^{-\frac{2}{3}}=1$；而在对数式里 $a=1$ 就完全不同了，请同学们想一想：若 $a=1$，$N=1$，$\log_1 1=$？，若 $a=1$，$N>0$，$N\neq1$，如 $N=2$，$\log_1 2=$？。你将会发现前者 b 可以为任何有理数，如 $b=2$，$b=-1$，$b=\frac{7}{8}$……等，均能使 $\log_1 1$ 成立，也就是说 $\log_1 1$ 没有唯一确定的值。对于 $\log_1 2$，又找不出这样的 b 值，使得 $1^b=2$，也就是说 $\log_1 2$ 的值不存在，根据以上情况在对数定义中，规定了 $a\neq1$，所以 $\log_a N=b$ 成立的条件是 $a>0$，且 $a\neq1$，$N>0$。

（3）一点说明

开方、对数都是乘方的逆运算，比如 $5^3=125$，用开方关系表示时就是 $\sqrt[3]{125}=5$；用对数关系表示时就是 $\log_5 125=3$，即在 $a^b=N$（$a>0$，$a\neq1$，$N>0$，$b\geqslant2$ 的自然数）。开方得 $\sqrt[b]{N}=a$，取对数 $\log_a N=b$，可见开方和对数都是乘方的逆运算。

加法和乘法都只有一种逆运算（减法和除法），为什么乘方有两种逆运算呢？这是因为加法、乘法适合交换律，即 $a+b=b+a$，$ab=ba$。比如在 $a+b=c$ 中求 a 与求 b 的方法是一样的，都是用 c 去减另一个加数，所以只规定一种逆运算就可以了，同样道理，乘法也只需要一种逆运算。而在乘方里

$a^b \neq b^a$，如$2^3 \neq 3^2$，乘方不适合交换律，已知N和a求b，已知N和b求a就不能用同一种方法，所以才产生了开方和对数两种逆运算，前者用来求底数a，后者用来求对数b。

3．对数恒等式

$a^{\log_a N} = N$（其中$a>0$，$a\neq 1$，$N>0$）。

此恒等式是根据对数的定义推导出来的．

设：$a^b = N(a>0$，$a\neq 1$，$N>0)$　　　(1)

化指数式为对数式 $b=\log_a N$　　　(2)

把(2)代入(1)，消去指数b，得$a^{\log_a N} = N$。

利用对数恒等式，可以简化某些计算过程．

4．对数的性质

在理解对数的定义的基础上，要掌握以下几个性质：

（1）零和负数没有对数。如$\log_4 0$，$\log_3(-7)$无意义。

（2）1的对数是零，即$\log_a 1=0$（$a>0$且$a\neq 1$）。

（3）底数的对数等于1。即$\log_a a=1$（$a>0$，且$a\neq 1$）。

〔例1〕把下列指数式写成对数式：

（1）$3^2=9$；（2）$4^{-2}=\frac{1}{16}$；（3）$27^{\frac{2}{3}}=9$；

（4）$(3\frac{1}{2})^0=1$；（5）$(\sqrt{3})^1=\sqrt{3}$；（6）$10^4=10000$；

(7) $10^{-3}=0.001$。

〔解〕（1）$3^2=9$，$\log_3 9=2$；（2）$4^{-2}=\frac{1}{16}$，$\log_4\frac{1}{16}=-2$；（3）$27^{\frac{2}{3}}=9$，$\log_{27}9=\frac{2}{3}$；（4）$(3\frac{1}{2})^0=1$，

$\log_{3^{-\frac{1}{2}}}1=0$；(5) $(\sqrt{3})^1=\sqrt{3}$，$\log_{\sqrt{3}}\sqrt{3}=1$；
(6) $10^4=10000$，$\log_{10}10000=4$；(7) $10^{-3}=0.001$，
$\log_{10}0.001=-3$。

说明 通过以上练习，真正搞清指数式与对数式的关系，熟练掌握它们之间的互化，并通过互化记住一些特殊的对数值.

〔**例2**〕求下列各对数的值：

(1) $\log_3 27$；(2) $\log_2\frac{1}{4}$；(3) $\log_5 1$；(4) $\log_{12}12$。

分析 上述题目较简单。(1)、(2)可根据对数的定义求值.(3)、(4)可利用对数性质求值.

〔**解**〕(1) $\because\ 3^3=27$，$\therefore\ \log_3 27=3$；

(2) $\because\ 2^{-2}=\frac{1}{4}$，$\therefore\ \log_2\frac{1}{4}=-2$；

(3) $\log_5 1=0$；(4) $\log_{12}12=1$。

〔**例3**〕求下列各式的值：

(1) $\log_{\frac{1}{9}}\sqrt[5]{27}$；(2) $\log_{2\sqrt{3}}144$；

(3) $\log_{0.001}0.0001$；(4) $\log_{14}(\sqrt{4+\sqrt{7}}+\sqrt{4-\sqrt{7}})$。

分析 例3与例2一样，也是求对数值，但难度要大一些，不可能象例2那样心算，因此设它们的值为x，可把对数式转化成指数式，将新的问题转化成已学过的指数式来解决.

〔**解**〕设各对数值分别为x。

(1) $\log_{\frac{1}{9}}\sqrt[5]{27}=x$，则 $(\frac{1}{9})^x=\sqrt[5]{27}$　$(\frac{1}{3})^{2x}=(3^3)^{\frac{1}{5}}$.

$\because\ (\frac{1}{3})^{2x}=(\frac{1}{3})^{-\frac{3}{5}}$，$\therefore\ 2x=-\frac{3}{5}$，$x=-\frac{3}{10}$.

(2) $\log_{2\sqrt{3}}144 = x$，则$(2\sqrt{3})^x = 144$.

∵ $(2\sqrt{3})^x = 12^2 = (2\sqrt{3})^4$，∴ $x = 4$.

(3) $\log_{0.001}0.0001 = x$，则$(0.001)^x = 0.0001$.

即 $10^{-3x} = 10^{-4}$，∴ $3x = 4$，$x = 1\frac{1}{3}$.

(4) $\log_{14}(\sqrt{4+\sqrt{7}} + \sqrt{4-\sqrt{7}}) = x$，

则 $14^x = \sqrt{4+\sqrt{7}} + \sqrt{4-\sqrt{7}}$，根据右式的特点，可将两边平方，化简为

$14^{2x} = 4+\sqrt{7}+2\sqrt{(4+\sqrt{7})(4-\sqrt{7})}+4-\sqrt{7}$，

$14^{2x} = 14$，∴ $2x = 1$，$x = \frac{1}{2}$.

说明 通过例3我们知道了求对数的一种方法，就是设对数值为x，化成指数式来求．但使用这种方法是有条件的，这个条件就是化成指数式后，等式的两边必须能化成同底数的幂．根据幂等，底数等，那么它们的指数也相等，而求出x．若不具备这个条件，如求$\log_{10}216$、$\log_5 2$的值，化成指数式也不能解决．对于这类问题，现在不予讨论．

〔例4〕 x、y为何值时，下列各式有意义？

(1) $\log_3(2x-1)$；(2) $\log_5(x+2)^2y$；

(3) $\log_{y-1}\sqrt{x+3}$；(4) $\dfrac{1}{\log_2(4-x)}$.

分析 (1)、(2)、(3)题都是$\log_a N$的形式，必须满足$a>0$，$a\neq1$，$N>0$才有意义；(4)题，$\log_2(4-x)$是分母，除满足上述条件外．根据分母不能为零，即对数值不能为零才有意义，进一步确定x、y的取值范围．

〔解〕 (1) $N = 2x-1$，∴ $2x-1>0$时有意义。

即当$x>\frac{1}{2}$时有意义。

(2) $N = (x+2)^2y$，∴$(x+2)^2y>0$时有意义，即当

$x \neq -2$，$y>0$时有意义。

（3）$a=y-1$，$\therefore\ y-1>0$，$y>1$，且$y-1\neq1$，

即$y\neq2$。

$N=\sqrt{x+3}$，$\therefore\ \sqrt{x+3}>0$，即$x>-3$。

$\therefore$ 当$x>-3$，$y>1$且$y\neq2$时有意义；

（4）$N=4-x$，$\therefore\ 4-x>0$，$x<4$。

$\log_2(4-x)\neq0$，$4-x\neq1$，即$x\neq3$。

$\therefore$ 当$x<4$且$x\neq3$时有意义。

〔例5〕求下列各式中的x：

（1）$\log_{3\sqrt{2}}x=4$；（2）$\log_{\frac{3}{2}}x=-5$；

（3）$\log_x 64=-2$；（4）$\log_x 2\sqrt{2}=\frac{3}{4}$。

分析 以上题目的形式均为$\log_a N=b$，其中x有的是真数，有的是底数，可根据不同条件转化为指数式或根式求x的值，但必须满足$a>0$且$a\neq1$，$N>0$的条件，因此一般都应检验．

〔解〕（1）$\log_{3\sqrt{2}}x=4$，$\therefore\ x=(3\sqrt{2})^4=81\times4$

$=324$。

（2）$\log_{\frac{3}{2}}x=-5$，$\therefore\ x=(\frac{3}{2})^{-5}=(\frac{2}{3})^5=\frac{32}{243}$。

（3）$\log_x 64=-2$，$\therefore\ x^{-2}=64$，$x^{-2}=8^2$，

$(\frac{1}{x})^2=8^2$。即$\frac{1}{x}=8$，$x=\frac{1}{8}$。

（4）$\log_x 2\sqrt{2}=\frac{3}{4}$，$x^{\frac{3}{4}}=2\sqrt{2}$，

$x^{\frac{3}{4}}=2\times2^{\frac{1}{2}}$，$x^{\frac{3}{4}}=2^{\frac{3}{2}}$。

说明 这题如仍化成指数式，因不能化成同指数的幂，故无法求出x. 可用开方的方法求底数x.

$$x=\sqrt[3]{\left(2^{\frac{3}{2}}\right)^{4}}=\sqrt[3]{2^{6}}=4.$$

〔例6〕 求下列各式中的x：

(1) $\log_2(3x-1)=0$； (2) $\log_3(6-x^2)=0$；

(3) $\log_4(x+2)^2=1$； (4) $\log_{x+2}x^2=1$.

分析 以上题目的对数值均为0或1，所以可根据对数的性质(2)、性质(3)转化成方程求x，但要注意验根，所求x必须满足$a>0$且$a\neq1$，$N>0$的条件.

〔**解**〕(1) $\log_2(3x-1)=0$，$3x-1=1$，$x=\dfrac{2}{3}$；

(2) $\log_3(6-x^2)=0$，$6-x^2=1$，$x^2=5$，

$x_1=\sqrt{5}$，$x_2=-\sqrt{5}$；

(3) $\log_4(x+2)^2=1$，$(x+2)^2=4$，$x+2=\pm2$.

$\therefore\ x_1=0$，$x_2=-4$；

(4) $\log_{x+2}x^2=1$，$x^2=x+2$，$x^2-x-2=0$，

$(x-2)(x+1)=0$.

$\therefore\ x_1=2$，$x_2=-1$.

经检验 $x_1=2$是本题的解； 当$x_2=-1$时，$a=x+2=1$（舍）.

〔例7〕 求下列各式的值：

(1) $5^{\log_5 7}$； (2) $2^{3+\log_2 5}$；

*(3) $8^{\log_2 3}$； *(4) $6^{\log_{36}4}+5^{\log_5 9}$.

说明 这几个题都与对数恒等式$a^{\log_a N}=N$有联系，需要通过这个恒等式来计算，在应用时要注意恒等式中的指数$\log_a N$中的底数a与$a^{\log_a N}$中的底数a必须是相同的，其值才等于N. 如果不同，必须变换成相同的底数，才能用这个恒等式求值，否则不能应用其恒等式求值.

〔解〕(1) $5^{\log_5 7}=7$。

(2) $2^{3+\log_2 5}=2^3\times 2^{\log_2 5}=8\times 5=40$

($\because\ a^{m+n}=a^m\cdot a^n$)。

(3) $8^{\log_2 3}=(2^3)^{\log_2 3}=2^{3\log_2 3}=(2^{\log_2 3})^3$

$=3^3=27$ 〔$\because\ a^{m\cdot n}=(a^m)^n$〕。

说明 (4)是两个数的和的形式，第一个数要先化成同底数；第二个数的指数可根据对数的定义得$\log_3 9=2$。

(4) $6^{\log_{36}4}+5^{\log_3 9}=[(36)^{\frac{1}{2}}]^{\log_{36}4}+5^2$

$=(36^{\log_{36}4})^{\frac{1}{2}}+25=4^{\frac{1}{2}}+25=27$。

练习一

1．求下列各式中的x：

(1) $\log_{64}x=\dfrac{1}{3}$；(2) $\log_x\dfrac{1}{27}=\dfrac{1}{2}$；(3) $\log_{\frac{1}{2}}32=x$；

(4) $\log_6 x=-3$。

2．求下列各式中的x，并用对数形式把x表示出来：

(1) $25^x=\dfrac{1}{5}$；(2) $6^x=1$；(3) $(\dfrac{1}{3})^x=81$；(4) $256^x=4$。

3．求下列各式的值：

(1) $\log_3 243$；(2) $\log_5\dfrac{1}{625}$；(3) $\log_{\frac{1}{5}}125$；

(4) $\log_{2\sqrt{2}}8$；(5) $\log_{\sqrt{3}}(3\sqrt{3})$；

(6) $\log_{(\sqrt{3}-\sqrt{2})}(\sqrt{3}+\sqrt{2})$;

*(7) $\log_{(2+\sqrt{3})}\sqrt{7+4\sqrt{3}}$;

(8) $\log_{10}(\sqrt{3+\sqrt{5}}+\sqrt{3-\sqrt{5}})$.

4. x为何值时下列各式有意义？

(1) $\log_2(2x+5)-\log_2(x-4)$; (2) $\log_{x-3}(x^2+1)$;

(3) $\log_4(5-x)+\log_3(3x+1)$; (4) $\dfrac{x}{\log_2(x-2)}$.

5. 求下列各式的值：

(1) $2^{\log_2 5}-5^{\log_5 2}$; (2) $4^{\log_4 7-1}$; (3) $27^{\log_3 4}$;

*(4) $\left(\frac{1}{49}\right)^{1+\log_7 2}+5^{-\log_{\frac{1}{5}}7}$.

6. 判断题：

(1) 若$4x-4=0$，则$\log_{\sqrt{2}}x\cdot\log_{\sqrt{2}}3=0$; ( )

(2) 若a、b互为相反数，则$\log_5(a+b)=0$; ( )

(3) 若a、b互为倒数，则$\log_2 ab=0$; ( )

(4) $a^{-\log_a N}(a>0$且$a\neq1)=-N$. ( )

7. 填空题：

(1) 若$\log_{\sqrt{3}}3=x$，则$x=$____;

(2) 若$\log_8\sqrt{2}=x$，则$x=$____;

(3) 若$\log_3 x^2=1$，则$x=$____;

(4) 若$(\log_3 x)^2=1$，则$x=$____;

(5) 若$\log_{12}3=m$，则$\log_{12}4=$____;

(6) 若$\log_x 25=4$，则$x=$____;

(7) $4^{\log_2 5}=y$，则$y=$____;

（8）若$\sqrt{2}=1.414$，则$\log_2 1.414=$____；

（9）若$\log_5 3=x$，$5^{y-1}=\frac{1}{3}$，则$x+y=$____；

（10）若$\frac{\log_5\sqrt{2-x}}{x+3}$有意义，$x$的取值范围是____。

二、积、商、幂、方根的对数

1. 对数运算法则的发现

对数的思想，可以说是在十五世纪数学家们在计算a^n的过程中，从指数和幂之间的关系发现的。例如n是大于或等于0的整数，写出n与2^n之间的关系：

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
2^n	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	2048	4096

要求第二行任意两个数的积，只要计算这两个数对应的第一行的数的和就可以。例如求16×128，16对应的第一行的数是4，128对应的第一行的数是7。因为$4+7=11$，那么在11的下面对应的2048就是所求的积。

$\therefore\quad 16\times128=2^4\times2^7=2^{11}=2048$。

又如求$4096\div32$。4096对应的第一行的数是12，32对应的第一行的数是5。因为$12-5=7$，那么在7的下面对应的128就是所求的商。

$\therefore\quad 4096\div32=2^{12}\div2^5=2^{12-5}=2^7=128$。

通过这种将乘、除的运算变为幂的运算关系，联想到如能将任意两个数的乘、除问题都转化为幂的运算，那么就可以简化计算方法，同时把第一行的每个数都叫做下面它所对应的那个数以2为底的对数。如3的下面对应的数是8，那么3是以2为底的8的对数；8的下面对应的数是256，那么8是以2

为底的256的对数。在这种对数思想的基础上，发现了积、商、幂、方根的对数。

2. 对数的运算法则

对数的运算法则共有四个：

(1) $\log_a MN=\log_a M+\log_a N$。

(2) $\log_a \frac{M}{N}=\log_a M-\log_a N$。

(3) $\log_a M^n=n\log_a M$。

(4) $\log_a \sqrt[n]{M}=\frac{1}{n}\log_a M$。

以上各式中$a>0$且$a\neq1$，$M>0$、$N>0$。

对数的运算法则的发现，是建立在对数思想的基础上，因此运算法则的证明也联系着对数的概念，下面以证明积的对数的法则为例，谈谈证明的方法。

已知：$a>0$且$a\neq1$，$M>0$，$N>0$。求证：$\log_a MN=\log_a M+\log_a N$。

分析 若$\log_a MN=\log_a M+\log_a N$成立，将此式可变为指数式

$$MN=a^{\log_a M+\log_a N}.$$

$\because a^m\cdot a^n=a^{m+n}$，则$a^{\log_a M+\log_a N}=a^{\log_a M}\cdot a^{\log_a N}$

$\because a^{\log_a M}=M$，$a^{\log_a N}=N$.

$\therefore MN=a^{\log_a M}\cdot a^{\log_a N}$ 这个式子成立.

证明1： $\because$ $a>0$且$a\neq1$，$M>0$，$N>0$。

设 $M=a^{\log_a M}$，$N=a^{\log_a N}$。

则 $MN=a^{\log_a M}\cdot a^{\log_a N}=a^{\log_a M+\log_a N}$

变此式为对数式，得$\log_a MN=\log_a M+\log_a N$

$\therefore$ $\log_a MN=\log_a M+\log_a N$。

分析 由于对数思想的发现，如能将两个正因数用同底数的幂的形式表示，那么通过对数可以将乘积的运算转化为和的运算.