中学数学极值问题解法

·毛其吉

·福建人民出版社

中学数学极值问题解法

毛 其 吉

福 建 人 民 出 版 社

1987年·福州

中学数学极值问题解法

毛其吉　编

*

福建人民出版社出版

（福州得贵巷27号）

福建省新华书店发行

福建新华印刷厂印刷

开本787×1092毫米　1/32　6.25印张　134千字

1987年9月第1版

1987年9月第1次印刷

印数：1—8 270

ISBN 7—211—00321—9　书号：7173·655

G·210　定价：0.93 元

前　言

在生产劳动和日常生活中，我们经常会遇到求最佳状态的问题。例如，初速一定的大炮，以怎样的角度发射，可使射程最远？灯泡应装在离桌面多高的地方，才能使桌面边沿的光照度最大？将一段圆柱形木料锯成截面为长方形的横梁，怎样的锯法能使梁的抗压强度最大？等等。概括地说，这类问题就是要在一定的条件下，求目标的最佳状态或最佳值。其中有些问题可归结为数学上求解极值的问题。

大致说来，中学数学范围内的极值问题可分为函数极值、条件极值与几何极值。运用中学数学的代数、几何和三角等方面的知识求解这些极值问题，人们积累了一些行之有效的方法。本书选取有代表性的题目，采用例题解答的方式，比较系统地介绍了求解极值问题的初等方法和某些解题思路。

本书主要是写给中学生阅读的，多数内容没有超过中学数学的范围，有些内容在中学知识的基础上有所拓宽和提高。例题解答前或后的文字一般是关于怎样解题的探讨性的说明，它们可能对提高读者的解题能力有所帮助。

本书的各章节都具有相当大的独立性。在阅读本书的时候，可根据需要选读其中的几节也未尝不可。中学数学教师根据教学需要，撷取其中一二节内容组织学生课外学习，相信能帮助他们进一步理解和掌握有关的极值知识。

限于笔者的业务水平，书中的错误和不妥之处，恳请读者批评指正。

编　者

一九八四年二月

目　　录

第一章　函数极值

§1. 配　方　法

我们从一个十分简单而典型的例子开始。

例 1　在周长为20米的一切矩形中，什么形状的矩形面积最大?

解　设矩形的长为x米，于是宽为$10-x$米。记矩形的面积为S（平方米），则

$$
\begin{aligned}
S &= x(10-x) \\
&= 10x - x^2 \\
&= -(x-5)^2 + 25.
\end{aligned}
$$

$\because \quad (x-5)^2 \geqslant 0,$

$\therefore \quad S = -(x-5)^2 + 25 \leqslant 25.$

其中等号当且仅当$x=5$时成立。这就是说，当矩形的长与宽均为5米时，即当矩形成为正方形时，其面积为最大，为25平方米。

——解毕。

在该例中，我们将矩形的面积表示为矩形边长的函数解析式$S(x)$，一般地，求函数$f(x)$在某个区间上的极值的问题，叫做函数极值问题。

在本例中，$S(x)$是x的一元二次函数。我们通过对二次三项式添加并减去相同的常数，而使二次三项式凑成完全平方式与常数的和的形式。因为在实数范围内，完全平方式总是非负的，由此得出一元二次函数的最大（或最小）值。这

种求解极值的方法称为**配方法**。

将配方法应用于一般形式的一元二次函数 $y=ax^2+bx+c$，得如下定理。

定理 1 二次函数 $y=ax^2+bx+c$ $(a\neq 0)$：

如果 $a>0$，则当 $x=-\dfrac{b}{2a}$ 时，有极小值

$$y=\frac{4ac-b^2}{4a};$$

如果 $a<0$，则当 $x=-\dfrac{b}{2a}$ 时，有极大值

$$y=\frac{4ac-b^2}{4a}.$$

证明 将 $y=ax^2+bx+c$ 配平方，即

$$\begin{aligned}y&=ax^2+bx+c\\&=a\left(x^2+\frac{b}{a}x\right)+c\\&=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+c-\frac{b^2}{4a}\\&=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a}.\end{aligned}$$

如果 $a>0$，则 $a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2\geqslant 0$，

$$y\geqslant\frac{4ac-b^2}{4a}.$$

上式中的等号当且仅当 $x=-\dfrac{b}{2a}$ 时成立。所以，当 $x=-\dfrac{b}{2a}$ 时，$y_{\min}=\dfrac{4ac-b^2}{4a}$。

如果 $a<0$，则 $a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2\leqslant 0$，

$$y \leqslant \frac{4ac-b^2}{4a}.$$

上式中的等号当且仅当 $x=-\frac{b}{2a}$ 时成立。所以，当 $x=-\frac{b}{2a}$ 时，$y_{max}=\frac{4ac-b^2}{4a}$。

在例1中，因为$S=10x-x^2$，直接应用定理1的结论，因$a=-1<0$，所以当 $x=-\frac{10}{2\times(-1)}=5$时，$S$取极大值

$$S=\frac{4\times(-1)\times0-10^2}{4\times(-1)}=25.$$

例 2 求函数$y=12\sin x-\cos 2x$的最大值和最小值。

解 因

$$\begin{aligned}y&=12\sin x-\cos 2x\\&=12\sin x-(1-2\sin^2x)\\&=2\sin^2x+12\sin x-1\\&=2(\sin^2x+6\sin x)-1\\&=2(\sin x+3)^2-19,\end{aligned}$$

由于 $-1\leqslant\sin x\leqslant1$,

故

$$\begin{aligned}&2\leqslant\sin x+3\leqslant4,\\&4\leqslant(\sin x+3)^2\leqslant16,\\&8\leqslant2(\sin x+3)^2\leqslant32,\\&-11\leqslant2(\sin x+3)^2-19\leqslant13.\end{aligned}$$

上式中左端的等号当$\sin x=-1$，亦即 $x=2k\pi-\frac{\pi}{2}$（其中k是整数）时成立。右端的等号当$\sin x=1$，亦即 $x=2k\pi+\frac{\pi}{2}$（其中k为整数）时成立。

所以，函数$y=12\sin x-\cos 2x$当

$x=2k\pi-\frac{\pi}{2}$(k为整数)时，取最小值-11；

$x=2k\pi+\frac{\pi}{2}$(k为整数)时，取最大值13。

——解毕。

本题的解题关键在于将已给函数化为关于$\sin x$的二次三项式，然后再凑成完全平方式来求得解答。

函数$y=f(x)=12\sin x-\cos 2x=2\sin^2 x+12\sin x-1$中最后关于$\sin x$的二次三项式，如以$x$替换$\sin x$，得

$$g(x)=2x^2+12x-1.$$

由定理1的结论，函数$g(x)$，当且仅当$x=-3$时有极小值

$$y=-19.$$

但无极大值。比较函数$f(x)$与$g(x)$，它们的极小值不相同，此外，函数$f(x)$有极大值，而$g(x)$没有极大值。

该例说明对于形状如 $af^2(x)+bf(x)+c$ 的函数极值，可以通过配方法来求解，但不能轻率地应用定理 1 的结论。必须注意函数$f(x)$的性质(定义域、值域、零点、单调性等等)对$af^2(x)+bf(x)+c$函数极值的影响。

下面一个例子是一个说明。

例 3 求函数

$$y=x^2-5x-2k\sqrt{5x-x^2}+3$$

的极大值和极小值，其中k是一个实常数。

解 函数

$$y=x^2-5x-2k\sqrt{5x-x^2}+3$$

的定义域为$5x-x^2\geqslant 0$，或$x(5-x)\geqslant 0$，故$0\leqslant x\leqslant 5$。函数的定义域为闭区间$[0,5]$。

令 $$u=\sqrt{5x-x^2}.$$

$$u^2=5x-x^2.$$

故 $$y=-u^2-2ku+3$$
$$=-(u+k)^2+k^2+3.$$

显然 $u\geqslant 0$，又

$$u=\sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2-\left(\frac{5}{2}-x\right)^2},$$

因而，当$x=0$或$x=5$时，$u_{\min}=0$；

当 $x=\frac{5}{2}$时，$u_{\max}=\frac{5}{2}$.

变量u的取值范围为

$$0\leqslant u\leqslant\frac{5}{2}.$$

为了求得 y的极大值和极小值，我们区分下列几种情形：

(1) $k\geqslant 0$,

$\because$ $0\leqslant u\leqslant\frac{5}{2}$,

$\therefore$ $0\leqslant k\leqslant u+k\leqslant\frac{5}{2}+k$.

$\therefore$ $k^2\leqslant(u+k)^2\leqslant\left(\frac{5}{2}+k\right)^2$,

$$-k^2\geqslant-(u+k)^2\geqslant-\left(\frac{5}{2}+k\right)^2.$$

每一项均加上k^2+3，得

$$3\geqslant-(u+k)^2+k^2+3\geqslant-\left(\frac{5}{2}+k\right)^2+k^2+3.$$

即 $$3\geqslant y\geqslant-\left(\frac{5}{2}+k\right)^2+k^2+3.$$

所以，当$u=0$，即当$x=0$或$x=5$时，函数y 取极大值

$$y=3.$$

当$u=\frac{5}{2}$，即当$x=\frac{5}{2}$时，y取极小值

$$y=-\left(\frac{5}{2}+k\right)^2+k^2+3$$

$$=-5k-\frac{13}{4}$$

(2) $$-\frac{5}{2}<k<0.$$

∵ $$0\leqslant u\leqslant\frac{5}{2},$$

而 $$-\frac{5}{2}<k<0,$$

∴ $$0<-k<\frac{5}{2}.$$

所以，当$u=-k$时，y取极大值

$$y=k^2+3.$$

取极大值的自变量x的值，由方程$u=-k$，亦即

$$\sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2-\left(\frac{5}{2}-x\right)^2}=-k$$

解出，得 $x=\frac{5}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2-k^2}$.

因为，当变量u在$[0,-k]$中变化时，$u+k$单调上升，而其值不大于零，因此$(u+k)^2$在$[0,-k]$中是随u单调递减，故$-(u+k)^2$在$[0,-k]$中随u单调上升。所以函数$y=-(u+k)^2+k^2+3$在$[0,-k]$中随u单调上升，它在该区间的极小值在$u=0$时取到。

$$y_{\min}=3.$$

同理，u在$\left[-k,\frac{5}{2}\right]$中变化时，函数$y$在该区间中随$u$单

调下降，它在该区间的极小值在$u=\frac{5}{2}$时取到，为

$$y_{\min}=-\left(\frac{5}{2}+k\right)^2+3+k^2=-5k-\frac{13}{4}.$$

为了求得函数y在定义域[0,5]中的极小值，我们需比较函数y在$u=0$与$u=\frac{5}{2}$时的值。

(i) $k<-\frac{5}{4}$,

由$k<-\frac{5}{4}$ 得$-\frac{13}{4}-5k>3$。

此时函数y的极小值当$u=0$时，即当$x=0$或$x=5$时取到。

$$y_{\min}=3.$$

(ii) $k>-\frac{5}{4}$,

由$k>-\frac{5}{4}$，得$-\frac{13}{4}-5k<3$。

此时函数y的极小值当$u=\frac{5}{2}$时，即当$x=\frac{5}{2}$时取到。

$$y_{\min}=-5k-\frac{13}{4}.$$

(iii) $k=-\frac{5}{4}$,

这时 $-5k-\frac{13}{4}=3$。

函数y当$u=0$和$u=\frac{5}{2}$时，亦即当自变量$x=0$，$x=\frac{5}{2}$，$x=5$时取极小值

$$y=3.$$

(3) $k\leqslant-\frac{5}{2}$,

$\because \quad 0 \leqslant u \leqslant \frac{5}{2}$,

$\therefore \quad k \leqslant u+k \leqslant \frac{5}{2}+k \leqslant 0$.

$\therefore \quad k^2 \geqslant (u+k)^2 \geqslant \left(\frac{5}{2}+k\right)^2$,

$$-k^2 \leqslant -(u+k)^2 \leqslant -\left(\frac{5}{2}+k\right)^2.$$

每一项加上k^2+3　得

$$3 \leqslant -(u+k)^2+k^2+3 \leqslant -\left(\frac{5}{2}+k\right)^2+k^2+3.$$

即　$3 \leqslant y \leqslant -5k-\frac{13}{4}$.

所以，当$u=0$，即当$x=0$或$x=5$时，函数y取极小值

$$y=3.$$

当$u=\frac{5}{2}$，即当$x=\frac{5}{2}$时，y取极大值

$$y=-5k-\frac{13}{4}.$$

将以上讨论列表如下：

k	$k \leqslant -\frac{5}{2}$	$-\frac{5}{2}<k<0$		$k \geqslant 0$
		$-\frac{5}{2}<k \leqslant -\frac{5}{4}$	$-\frac{5}{4} \leqslant k<0$	
自变量	$x=0$或$x=5$	$x=0$或$x=5$	$x=\frac{5}{2}$	$x=\frac{5}{2}$
极小值	$y=3$	$y=3$	$y=-5k-\frac{13}{4}$	$y=-5k-\frac{13}{4}$

自变量	$x=\frac{5}{2}$	$x=\frac{5}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2-k^2}$	$x=\frac{5}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2-k^2}$	$x=0$或$x=5$
极大值	$y=-5k-\frac{13}{4}$	$y=k^2+3$	$y=k^2+3$	$y=3$

——解毕。

从这个例题的讨论中，我们看到随着实常数k的取值的不同，函数y的极小值和极大值呈现四种不同的情况。函数y通过“中间变量”u，表达为u的二次函数。u的平方为x的二次函数。在配平方以后，这四种情况下的表达形式是完全相同的。至于四种不同情况下极大值和极小值的差异，则完全取决于函数在定义域中的性质。该例说明在求函数极值时，对函数的性质应该给予足够的重视。

有一些二元或多元函数的极值也可以通过配方法求解。

例4 试求函数

$$f(x,y)=x^2+4xy+5y^2-2x+2y-1$$

的极值。

解 因

$$\begin{aligned}f(x,y)&=x^2+4xy+5y^2-2x+2y-1\\&=(x+2y-1)^2+y^2+6y-2\\&=(x+2y-1)^2+(y+3)^2-11,\end{aligned}$$

由于 $(x+2y-1)^2+(y+3)^2\geqslant0$,

其中等号当且仅当

$$\begin{cases}x+2y-1=0,\\y+3=0\end{cases}$$

时成立。

所以函数$f(x,y)$当$x=7$，$y=-3$时取极小值-11。

容易看出函数$f(x,y)$无极大值。

——解毕。

一般说来，二元函数

$F(x,y)=ax^2+2hxy+by^2+2dx+2ey+f$，

当　$a>0,\Delta=ab-h^2>0$时有极小值，而无极大值；

当　$a<0,\Delta=ab-h^2>0$时有极大值，而无极小值。

它们的极值可以通过配方法来求。例如在$a>0,\Delta>0$时，有

$$\begin{aligned}F(x,y)&=ax^2+2hxy+by^2+2dx+2ey+f\\&=\frac{1}{a}(ax+hy+d)^2+\frac{ab-h^2}{a}y^2\\&\quad+2\left(e-\frac{hd}{a}\right)y+f-\frac{d^2}{a}\\&=\frac{1}{a}(ax+hy+d)^2+\frac{ab-h^2}{a}\left(y+\frac{ae-hd}{ab-h^2}\right)^2\\&\quad+f-\frac{d^2}{a}-\frac{(ae-hd)^2}{a(ab-h^2)}.\end{aligned}$$

因　$a>0$，$\Delta=ab-h^2>0$，故

$$\frac{1}{a}(ax+hy+d)^2+\frac{ab-h^2}{a}\left(y+\frac{ae-hd}{ab-h^2}\right)^2\geqslant 0,$$

其中等号当且仅当

$$\begin{cases}ax+hy+d=0,\\ y+\dfrac{ae-hd}{ab-h^2}=0\end{cases}$$

时成立。故函数$F(x,y)$有极小值

$$f-\frac{d^2}{a}-\frac{(ae-hd)^2}{a(ab-h^2)}.$$

例5　已知平面上三点，求到这三个已知点的距离平方

和为最小的点。

解 在已知平面上建立笛卡尔直角坐标系。设三个已知点的坐标为$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，$C(x_3,y_3)$。又$P(x,y)$是该平面上的一般点，则

$$
\begin{aligned}
&PA^2+PB^2+PC^2\\
&=(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(x-x_2)^2+(y-y_2)^2\\
&\quad+(x-x_3)^2+(y-y_3)^2\\
&=[3x^2-2(x_1+x_2+x_3)x+x_1{}^2+x_2{}^2+x_3{}^2]\\
&\quad+[3y^2-2(y_1+y_2+y_3)y+y_1{}^2+y_2{}^2+y_3{}^2]\\
&=3\left(x-\frac{x_1+x_2+x_3}{3}\right)^2+3\left(y-\frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)^2\\
&\quad+x_1{}^2+x_2{}^2+x_3{}^2+y_1{}^2+y_2{}^2+y_3{}^2\\
&\quad-\frac{1}{3}(x_1+x_2+x_3)^2-\frac{1}{3}(y_1+y_2+y_3)^2.
\end{aligned}
$$

所以，当

$$x=\frac{x_1+x_2+x_3}{3},\quad y=\frac{y_1+y_2+y_3}{3}$$

时，即当点P成为已知三点的几何重心时，它到三个已知点的距离平方和为最小。

——解毕。

某些几何中出现的极值问题，通过建立坐标系，可以将其化为代数中的极值问题求解。这也是应用坐标法解几何题的一个方面。

与例 5 相类似，我们容易得到：

到平面上n个点$P_1(x_1,y_1)$、$P_2(x_2,y_2)$、…、$P_n(x_n,y_n)$的距离平方和为最小的点是这 n 个点构成的质点系的几何重心

$$G\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n},\ \frac{y_1+y_2+\cdots+y_n}{n}\right).$$

到空间中不共面的四点$A(x_1,y_1,z_1)$，$B(x_2,y_2,z_2)$、$C(x_3,y_3,z_3)$，$D(x_4,y_4,z_4)$的距离平方和为最小的点是以这四个点为顶点的空间四面体的几何重心G，即

$$G\left(\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4},\ \frac{y_1+y_2+y_3+y_4}{4},\ \frac{z_1+z_2+z_3+z_4}{4}\right).$$

上述结论还可以推广到带"权"的情形。例如，在平面上，到三个已知点$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，$C(x_3,y_3)$的带"权"距离平方和

$$p\,\overline{PA}^2+q\,\overline{PB}^2+r\,\overline{PC}^2$$

为最小的点为

$$\left(\frac{px_1+qx_2+rx_3}{p+q+r},\quad \frac{py_1+qy_2+ry_3}{p+q+r}\right),$$

其中p，q，r是正数。

§2. 求函数极值的几种基本方法

用初等方法求解极值问题，往往要求综合地运用初等数学中的基本知识、基本技能和基本方法。本节通过若干例题介绍这些基础知识。

一、函数变形

例6 求函数

$$\sin^8 x+3\sin^2 x\cos^2 x+\cos^8 x$$

的最大值和最小值。