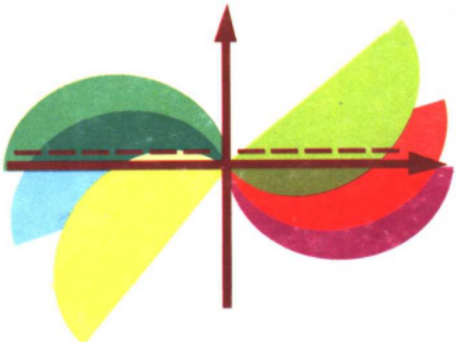
名师解惑丛书



反三角函数与三角方程

秦敬民　编著

山东教育出版社

名师解惑丛书

反三角函数与三角方程

秦敬民　编著

山 东 教 育 出 版 社
1999 年 · 济南

名师解惑丛书

反三角函数与三角方程

秦敬民　编著

出版发行：山东教育出版社
地　　址：济南市经八纬一路 321 号

出版日期：1998 年 9 月第 1 版
　　　　　1999 年 7 月第 2 次印刷
印　　数：5001—7000
用纸规格：787 毫米×1092 毫米 32 开
　　　　　4.75 印张　　　　99 千字

制版印刷：山东新华印刷厂临沂厂

书　　号：ISBN 7—5328—2702—X/G·2480
定　　价：3.50 元

出版说明

古之学者必有师．师者，所以传道受业解惑也．有感于此，组织部分长年在一线执教、经验丰富的著名教师，以专题讲座形式编辑出版一套限于中学理科知识框架内，源于教材但有些内容又略高于教材的，高级中学数学、物理学、化学“名师解惑丛书”是我们多年的想法和愿望．

两年多来，山东教育出版社理科编辑室经过广泛的调研，以及与部分学生和老师们的座谈，我们的初衷不断得到升华，并与作者就丛书的特色取得如下共识：

每册书即为一个专题讲座，其内容由若干教学过程中反映出的疑难知识点组成，通过对典型例题的分析，剖析疑难知识点，帮助学生理清思路，进而达到融会贯通的目的．

每册书通过对知识的综合，帮助学生将过去所学的知识按专题进行系统的归纳和总结；通过适当介绍一些学科知识自身发展的逻辑规律，给学生有关学科思想方法方面的启迪．

总之，这套丛书企盼达到启迪思维、拓宽知识、培养兴趣的目的，以提高学生分析问题和解决问题的能力．

前　言

反三角函数与三角方程，内容丰富，变化灵活，渗透了大量的数学思想和方法，是中学数学的难点．深入研究它，对丰富学生的数学思想和方法，更灵活、准确地解决有关问题很有好处．

本书注意抓重点和难点，对难以理解和掌握的内容，通过典型例题，进行重点剖析．对学生容易出错和忽略的问题，进行正、反面对比、剖析，分析错因，找出正确解法，树立正确的解题思路．

本书在问题的处理上，力求体现灵活多变的特点，注重一题多解和知识的综合应用．在“分析”中，融入数学思想方法，展现思路，揭示“怎样想”，“为什么这样想”的思维规律．在“说明”中，概括、归纳解题的一般步骤和注意事项．在“导评”中，进行方法对比，揭示解题规律，给出科学、合理的解题导向．在书写步骤上，力求严谨、规范，起到示范作用．

本书对学生学好反三角函数和简单三角方程，解决有关疑难问题，是很有帮助的．

编者

目　录

一　反三角函数的概念

在实际问题中，常常遇到两类相反的三角问题，一类是已知角求这个角的三角函数值，另一类是已知三角函数值求角．前一类问题是三角函数问题，后一类问题是反三角函数和三角方程问题．

反三角函数是在三角函数的特定区间内定义的，反三角函数的表达式是借助符号实现的，有别于一般反函数的解析表达式．由此带来了很多隐含条件，决定了反三角函数问题概念性强的特点，造成了学生处理反三角函数问题时感到困难和容易出错的局面．解决此困难的唯一办法就是真正理解反三角函数的概念．

（一）反三角函数的定义和图象

函数 $y=\sin x\left(x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\right)$ 的反函数叫做反正弦函数，记作 $y=\arcsin x$ 或 $y=\sin^{-1}x$. 它的定义域是 $[-1,1]$，值域是 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$.

函数 $y=\cos x(x\in[0,\pi])$ 的反函数叫做反余弦函数，记作 $y=\arccos x$ 或 $y=\cos^{-1}x$，它的定义域是 $[-1,1]$，值域是 $[0,\pi]$.

函数 $y=\mathrm{tg}x\left(x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\right)$ 的反函数叫做反正切函数，记作 $y=\mathrm{arctg}x$ 或 $y=\mathrm{tg}^{-1}x$. 它的定义域是 $(-\infty,+\infty)$，值

域是$(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$.

函数 $y=\mathrm{ctg}x(x\in(0,\pi))$的反函数叫做反余切函数，记作 $y=\mathrm{arcctg}x$ 或 $y=\mathrm{ctg}^{-1}x$，它的定义域是$(-\infty,+\infty)$，值域是$(0,\pi)$.

反三角函数还包括反正割函数和反余割函数，它们的定义与前面四种反三角函数类似，本书对这两种反三角函数不作研究.

关于反三角函数的图象及性质，教材中作了充分的介绍，建议读者联系反三角函数的定义域和值域进行理解和掌握.

（二）正确理解反三角函数的概念

准确掌握反三角函数的概念，是学好反三角函数的基础.为此，必须加深对反三角函数的认识.

1. 将反三角函数纳入到反函数中去认识和理解

三角函数是函数的一种，反三角函数是三角函数的反函数，是一种特殊函数的反函数.因此，可以在反函数的大范围内去认识和理解反三角函数.

当确定函数 $y=f(x)$的映射 $f:A\to B$ 是一一映射时，由它的逆映射所确定的函数，就是函数 $y=f(x)$的反函数.由此可知，函数 $y=f(x)$存在反函数的充要条件是确定函数关系的映射是一一映射.

三角函数是否有反函数，要看确定三角函数关系的映射是否是一一映射.先看正弦函数 $y=\sin x(x\in(-\infty,+\infty))$，如图 1－1 所示.

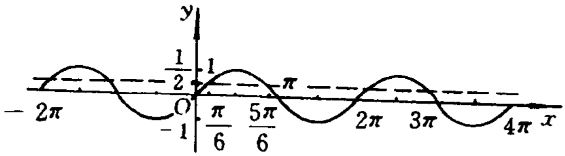


图 1—1

在定义域$(-\infty,+\infty)$上任取一个x值，在值域$[-1,1]$上都有唯一的一个y值与之对应．如对于$x=\frac{5\pi}{6}$，只有$y=\frac{1}{2}$与之对应．但在值域$[-1,1]$上每取一个y值，在定义域$(-\infty,+\infty)$上却有无数个x值和它对应．如对于$y=\frac{1}{2}$，就有$x=\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\cdots$与之对应．因此，确定正弦函数关系的映射并非一一映射．在定义区间$(-\infty,+\infty)$上，正弦函数$y=\sin x$不存在反函数．同理，余弦函数$y=\cos x$在定义区间$(-\infty,+\infty)$上不存在反函数；正切函数$y=\mathrm{tg}x$在定义区间$\{x|x\in R$ 且 $x\neq k\pi+\frac{\pi}{2},k\in Z\}$上不存在反函数；余切函数$y=\mathrm{ctg}x$在定义区间$\{x|x\in R$ 且 $x\neq k\pi,k\in Z\}$上不存在反函数．但若限定三角函数的定义区间，使其在限定区间内的映射是一一映射，则使无反函数的原三角函数在该区间内有了反函数．这也就是把正弦函数、余弦函数、正切函数、余切函数确定反函数时的定义区间分别缩小为$[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$、$[0,\pi]$、$(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$、$(0、\pi)$的原因．这四个区间满足三个条件：(1)它们分别是正弦函数、余弦函数、正切函数和余切函数的单调区间；(2)四种三角函

数在四个区间内的函数值集合分别是这四种三角函数的值域;(3)这四个区间都包含了所有锐角．虽然正、余弦函数和正、余切函数在无限多个特定区间上都有反函数,但对于这四种三角函数,只有这四个区间($[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$、$[0,\pi]$、$(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$和$(0,\pi)$)包含了所有锐角(最常用的角),且应用简单方便,故选择这四个区间作为定义正、余弦函数和正、余切函数的反函数的定义区间,并选定符号 $\arcsin x$、$\arccos x$、$\mathrm{arctg}x$、$\mathrm{arcctg}x$ 表示这四个区间内的三角函数的反函数,分别简称为反正弦函数、反余弦函数、反正切函数、反余切函数．四种三角函数在其它单调区间内的反函数,均可用求反函数的一般方法求得．

例 1　函数 $y=\sin x,x\in[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}]$的反函数是(　　).

(A)$y=\arcsin x,x\in[-1,1]$

(B)$y=-\arcsin x,x\in[-1,1]$

(C)$y=\pi+\arcsin x,x\in[-1,1]$

(D)$y=\pi-\arcsin x,x\in[-1,1]$

分析:由单位圆或函数图象可知,当自变量 x 由$\frac{\pi}{2}$增到$\frac{3\pi}{2}$时,$y=\sin x$ 由 1 减少到 -1,即在区间$[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}]$上函数$y=\sin x$单调递减．这就说明了确定函数关系 $y=\sin x$ 的映射是一一映射．因此,函数 $y=\sin x$ 存在反函数,而且其反函数在区间$[-1,1]$上也单调递减,且 $y\in[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}]$. 现在逐一考查各个选项:

对于(A),当 $x\in[-1,1]$时,$y\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$,它是增函

数．因此，(A)应被排除．

对于(B)，当 $x\in[-1,1]$时，$y\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$，它的值域不是$[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}]$. 因此，(B)应被排除．

对于(C)，当 $x\in[-1,1]$时，$\arcsin x\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$，所以，$\frac{\pi}{2}\leqslant\pi+\arcsin x\leqslant\frac{3\pi}{2}$，即 $y\in[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}]$. 但它是增函数，因此，(C)应被排除．

既然(A)、(B)、(C)三个选项均不正确，根据数学选择题的约定：四个选项中，有且只有一个正确答案，所以正确答案只可能为(D). 事实上，对于(D)，当 $x\in[-1,1]$时，$\arcsin x\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$，所以$\frac{\pi}{2}\leqslant\pi-\arcsin x\leqslant\frac{3\pi}{2}$，即 $y\in[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}]$. 而函数 $y=\pi-\arcsin x$，$x\in[-1,1]$又是减函数，完全符合题目的要求．

【导评】此题是用解选择题的常用方法——淘汰法来解答的．此题也可用求反函数的方法来确定选项．

$\because x\in[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}]$，

$\therefore (x-\pi)\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$.

又 $\sin(x-\pi)=-\sin x=-y$，依反正弦函数的定义及奇偶性，得

$$x-\pi=\arcsin(-y)=-\arcsin y,$$

即 $x=\pi-\arcsin y$.

因此，所求反函数是 $y=\pi-\arcsin x$，$x\in[-1,1]$，故正确答案为(D).

2. 理解反三角函数的真正含义

$y=\arcsin x$ 的真正含义是：

(1)一个角(这个角是用弧度数表示的)；

(2)这个角在$[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$内；

(3)这个角的正弦值为 x.

$y=\arccos x$ 的真正含义是：

(1)一个角(这个角是用弧度数表示的)；

(2)这个角在$[0,\pi]$内；

(3)这个角的余弦值为 x.

$y=\mathrm{arctg}\,x$ 的真正含义是：

(1)一个角(这个角是用弧度数表示的)；

(2)这个角在$(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$内；

(3)这个角的正切值为 x.

$y=\mathrm{arcctg}\,x$ 的真正含义是：

(1)一个角(这个角是用弧度数表示的)；

(2)这个角在$(0,\pi)$内；

(3)这个角的余切值为 x.

以上就是反三角函数概念的实质，它们是解决反三角函数问题的基础，只有牢固掌握，在解题中才能少犯错误.

例 2 解答下列各题：

(1)$\arcsin\frac{1}{2}+\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}$；

(2)$\mathrm{tg}[\mathrm{arctg}(-1)]$；

(3)$\cos(\arcsin x)$；

(4)$\mathrm{tg}(\arcsin x),x\in[-1,1]$.

分析：(1)$\arcsin\frac{1}{2}$是区间$[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$上的一个角，这个角的正弦值是$\frac{1}{2}$，所以$\arcsin\frac{1}{2}=\frac{\pi}{6}$. $\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}$是区间$[0,\pi]$上的一个角，这个角的余弦值是$\frac{\sqrt{2}}{2}$，所以$\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\pi}{4}$.

(2)$\mathrm{arctg}(-1)$是区间$(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$上的一个角，这个角的正切值等于$-1$，所以，$\mathrm{tg}[\mathrm{arctg}(-1)]=-1$.

也可先求$\mathrm{arctg}(-1)$，再求$\mathrm{tg}[\mathrm{arctg}(-1)]$.

(3)$\arcsin x$是正弦值为x的一个角，所以，$|x|\leqslant 1$. 当$|x|>1$时，$\arcsin x$无意义．此题是已知角的正弦值，求这个角的余弦值，用平方关系式即可求得．

(4)$\arcsin x$是区间$[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$上的一个角，这个角的正弦值是$x$，因此，可求得这个角的余弦值．

解：(1)$\arcsin\frac{1}{2}+\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}=\frac{5\pi}{12}$.

(2)令$\alpha=\mathrm{arctg}(-1)$，

则$\mathrm{tg}\alpha=-1$，

即$\mathrm{tg}[\mathrm{arctg}(-1)]=-1$.

(3)当$|x|>1$时，$\arcsin x$无意义，因而此题无解．

当$|x|\leqslant 1$时，令$\alpha=\arcsin x$，

则$\sin\alpha=x$，$\alpha\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$.

$\therefore\cos\alpha=\sqrt{1-x^2}$，

即$\cos(\arcsin x)=\sqrt{1-x^2}$.

(4)令$\alpha=\arcsin x$，

则 $\sin\alpha=x,\alpha\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$.

$\therefore\cos\alpha=\sqrt{1-x^2}$.

$\therefore \mathrm{tg}\alpha=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{x\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}}$,

即 $\mathrm{tg}(\arcsin x)=\frac{x\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}}$.

例 3 将下列各角用相应的反三角函数表示：

(1)$x\in[\frac{\pi}{2},\pi]$, $\sin x=\frac{1}{3}$;

(2)复数 $z=a+bi(a>0,b<0)$的辐角主值 $\arg z$.

分析(1):根据反三角函数意义的实质,可知 $\arcsin\frac{1}{3}$表示$[0,\frac{\pi}{2}]$上的一个角,这个角的正弦值等于$\frac{1}{3}$. 以这个角为基础,根据诱导公式可求出正弦值等于$\frac{1}{3}$的区间$[\frac{\pi}{2},\pi]$上的角.

解:令 $\sin x_1=\frac{1}{3}$,且 $x_1\in[0,\frac{\pi}{2}]$,

则 $x_1=\arcsin\frac{1}{3}$, $\pi-x_1\in[\frac{\pi}{2},\pi]$.

$\because\sin(\pi-x_1)=\sin x_1=\frac{1}{3}$,

又 $x\in[\frac{\pi}{2},\pi]$, $\sin x=\frac{1}{3}$,

$\therefore x=\pi-x_1=\pi-\arcsin\frac{1}{3}$.

分析(2):根据复数的辐角主值的意义,由 $a>0,b<0$,可知 $\arg z\in(\frac{3\pi}{2},2\pi)$. 若设 $\theta=\arg z$,则 $\mathrm{tg}\theta=\frac{b}{a}<0$. 根据反三

角函数的定义，令 $\theta_1=\mathrm{arctg}\,\dfrac{b}{a}$，则 $\theta_1\in(-\dfrac{\pi}{2},0)$，$\mathrm{tg}\theta_1=\dfrac{b}{a}$.
由诱导公式，与(1)同法，可得 $\arg z=2\pi+\theta_1$.

解：$\because a>0,b<0$，

$\therefore \arg z\in(\dfrac{3\pi}{2},2\pi)$.

设 $\theta=\arg z$，则 $\mathrm{tg}\theta=\dfrac{b}{a}<0$.

令 $\theta_1=\mathrm{arctg}\,\dfrac{b}{a}$，则 $\theta_1\in(-\dfrac{\pi}{2},0)$，$\mathrm{tg}\theta_1=\dfrac{b}{a}$.

由诱导公式，可得 $\theta=2\pi+\theta_1=2\pi+\mathrm{arctg}\,\dfrac{b}{a}$，

即 $\arg z=2\pi+\mathrm{arctg}\,\dfrac{b}{a}$.

说明：此题说明，可以用反三角函数表示某个范围内的角．根据反三角函数的定义，当所求的角不在反三角函数的值域内时，我们无法用一个简单的反三角函数式表示，往往先用反三角函数表示相应的锐角(如(1))或值域范围内的角(如(2))，再由诱导公式根据所求的角的范围，用相应的反三角函数式表示．

例 4　用反正弦函数表示 $\arcsin\dfrac{4}{5}+\arcsin\dfrac{12}{13}$.

错解：$\because 0<\arcsin\dfrac{4}{5}<\dfrac{\pi}{2}$，

$0<\arcsin\dfrac{12}{13}<\dfrac{\pi}{2}$，

$\therefore 0<\arcsin\dfrac{4}{5}+\arcsin\dfrac{12}{13}<\pi$.

又 $\sin(\arcsin\dfrac{4}{5}+\arcsin\dfrac{12}{13})$

$=\sin(\arcsin\dfrac{4}{5})\cos(\arcsin\dfrac{12}{13})$

$$+\cos\left(\arcsin\frac{4}{5}\right)\sin\left(\arcsin\frac{12}{13}\right)$$

$$=\left(\frac{4}{5}\right)\times\left(\frac{5}{13}\right)+\left(\frac{3}{5}\right)\times\left(\frac{12}{13}\right)$$

$$=\frac{56}{65},$$

根据反正弦函数的定义，得

$$\arcsin\frac{4}{5}+\arcsin\frac{12}{13}=\arcsin\frac{56}{65}.$$

辨析：以上解答是错误的，错误在于由

$$\left(\arcsin\frac{4}{5}+\arcsin\frac{12}{13}\right)\in(0,\pi),$$

$$\sin\left(\arcsin\frac{4}{5}+\arcsin\frac{12}{13}\right)=\frac{56}{65},$$

就得到 $\arcsin\frac{4}{5}+\arcsin\frac{12}{13}=\arcsin\frac{56}{65}$.

根据反正弦函数的定义，只有断定 $\arcsin\frac{4}{5}+\arcsin\frac{12}{13}\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 时，才可以得出 $\arcsin\frac{4}{5}+\arcsin\frac{12}{13}=\arcsin\frac{56}{65}$.

事实上，$\arcsin\frac{4}{5}+\arcsin\frac{12}{13}$ 并不在区间 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 内，这就导致了解题结果的错误．利用上面思路要想给出正确解法，就必须缩小角的范围，使其符合反正弦函数的定义要求．

$\because \frac{\sqrt{2}}{2}<\frac{4}{5}<\frac{12}{13}$, $\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\pi}{4}$,

而反正弦函数是增函数，

$\therefore \arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}<\arcsin\frac{4}{5}<\arcsin\frac{12}{13}$.

由反正弦函数的定义，得