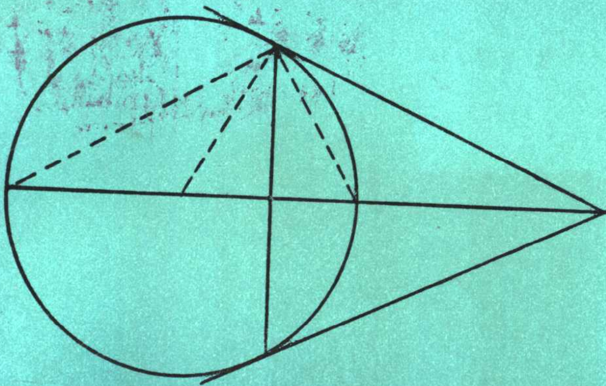
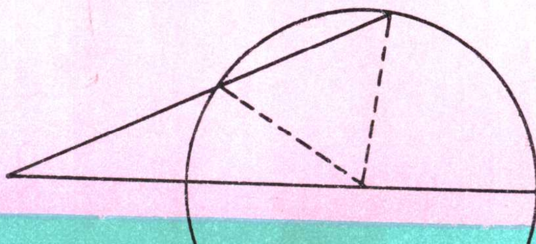


平面几何学习辅导



平面几何学习辅导

江苏省 盐城 连云港 淮阴 市教育局教研室编

广西人民出版社

平面几何学习辅导

江苏省盐城、连云港、淮阴市教育局教研室编

☆

广西人民出版社出版

（南宁市河堤路14号）

广西新华书店发行　　广西民族印刷厂印刷

*

开本787×1092　1　32　6.625印张　146千字

1984年5月第1版　　1984年5月第1次印刷

印　数　1—244,000册

书号：7113·471　　定价：0.50元

前　言

初中学生从学习有关数的知识转为学习有关形的知识，从算术和代数运算转为推理论证，在思维习惯和学习方法上都将发生很大的变化。实践告诉我们，在平面几何教学中，教师应有计划地从几何概念、几何语言、几何图形、几何推理等方面着手，不断地培养学生的学习兴趣，启发思维，发展智力，才能使学生适应这些变化。

在搞好课堂教学的同时，我们编写了一些与课本紧密结合的教学辅导资料，供学生学习、演练，使学生进一步理解几何概念，正确理解和运用定理，学会推理论证。这本《平面几何学习辅导》就是在实践中总结提高，几经修改编写而成的。它按照教学要求，依照课本的内容次序，采用“题组”的形式，一个概念、定理，配以若干条典型例题和练习题，每章末安排复习参考题，帮助学生打好基础，解决重点、难点，扩大知识，巩固和发展课堂教学的成果。本书可供学生作自学复习的辅导资料，也可供教师作教学参考。

参加本书编写的主要有连云港市王士模、陶为渡，盐城市丁景、张乃达，淮阴市俞仁继、李思文、许良桂等同志。

我们水平有限，错误之处请读者指正。

江苏省盐城、连云港、淮阴市教育局教研室

目　　录

第一章　直线、相交线和平行线……………………（ 1 ）
一　线段，射线、直线……………………………………（ 1 ）
二　角………………………………………………………（ 2 ）
三　相交线…………………………………………………（ 6 ）
四　平行线…………………………………………………（ 10 ）
五　定义、公理、定理……………………………………（ 17 ）
复习参考题一………………………………………………（ 23 ）
第二章　三角形……………………………………………（ 28 ）
一　关于三角形的概念……………………………………（ 28 ）
二　全等三角形……………………………………………（ 35 ）
三　等腰三角形……………………………………………（ 42 ）
四　直角三角形……………………………………………（ 49 ）
复习参考题二………………………………………………（ 58 ）
第三章　四边形……………………………………………（ 63 ）
一　平行四边形……………………………………………（ 63 ）
二　梯形……………………………………………………（ 81 ）
复习参考题三………………………………………………（ 86 ）
第四章　相似形……………………………………………（ 92 ）
一　成比例的线段…………………………………………（ 92 ）
二　相似形…………………………………………………（105）
三　位似图形………………………………………………（127）
复习参考题四………………………………………………（130）

第五章　圆……………………………………………(132)
一　圆的基本性质…………………………………………(132)
二　直线和圆的位置关系…………………………………(149)
三　圆和圆的位置关系……………………………………(168)
四　正多边形和圆…………………………………………(177)
五　点的轨迹………………………………………………(186)
复习参考题五………………………………………………(191)
复习参考题部分答案或提示………………………………(199)

第一章　直线、相交线和平行线

一　线段、射线、直线

几何图形

例1　用圆规、三角板画出下列几何图形。

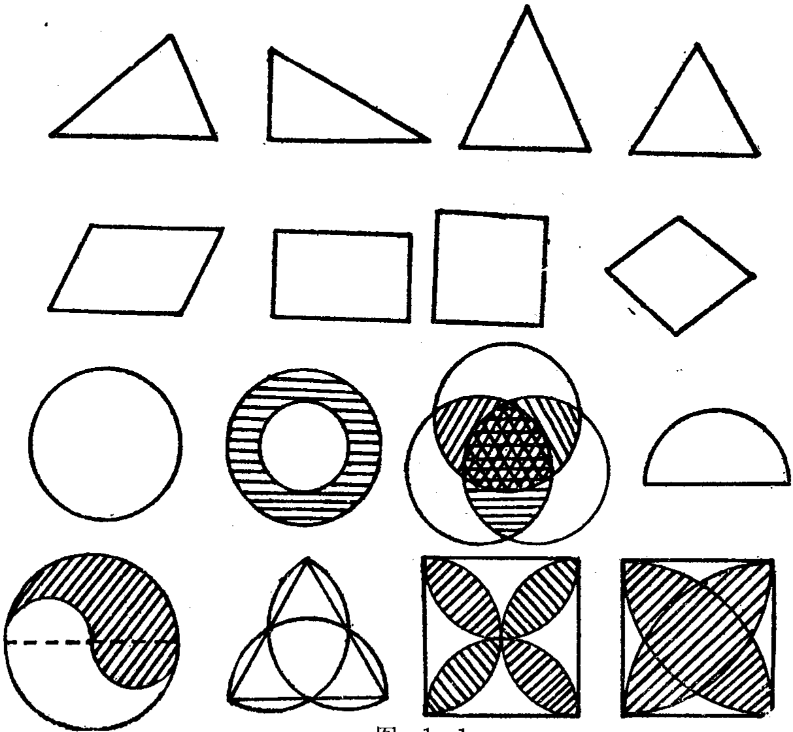


图　1—1

【练习】

1. 棱长20cm的正方体木块和棱长20cm的正方体铁块是不是相同的几何体？是不是相同的物体？

2. 用圆规和三角板画出下面的几何图形。

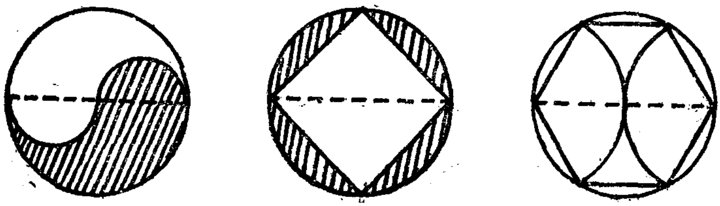


图 1—2

线段、射线、直线

例2 如果以直线L上的两点A、B分别作为射线的端点，那么直线L上共有几条不同的射线？

答：在直线L上，以A为端点，有两条不同的射线，它们的方向相反；同样的，以B为端点也有两条不同的射线，因而在直线L上分别以A、B为端点的不同射线共有四条。

【练习】

1. 直线L上有一个点，在直线L上以这个点为端点的不同射线共有多少条？二个点呢？三个点呢？n个点呢（n为自然数）？并简要地说明理由。

2. 经过一点能作多少条不同的直线？经过二点呢？经过不在同一条直线上的三点呢？

二　角

角、角的度量

例3 (1)用三个大写字母表示图1—3中的10个角；(2)若$\angle AOB=\angle BOC=\angle COD=\angle DOE$，哪一个角等于$\angle AOB$的4倍？哪些角等于$\angle AOE$的二分之一？

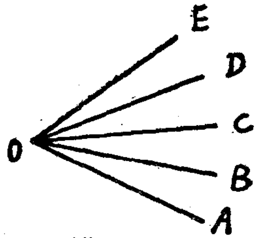


图 1—3

解： (1) 它们是$\angle AOB$、$\angle BOC$、$\angle COD$、$\angle DOE$、$\angle AOC$、$\angle BOD$、$\angle COE$、$\angle AOD$、$\angle BOE$、$\angle AOE$。

(2) $\because \angle AOB=\angle BOC=\angle COD=\angle DOE$,

$\therefore \angle AOE=4\angle AOB$。$\angle AOC$、$\angle BOD$、$\angle COE$等于$\angle AOE$的二分之一。

例4 已知$\angle\alpha$和$\angle\beta$的和等于$73°24'$，它们的差等于$23°$，求$\angle\alpha$和$\angle\beta$的度数。

解： 根据题意，得

$$\begin{cases}\angle\alpha+\angle\beta=73°24' & (1)\\ \angle\alpha-\angle\beta=23° & (2)\end{cases}$$

$[(1)+(2)]\div 2$，得$\angle\alpha=48°12'$；

$[(1)-(2)]\div 2$，得$\angle\beta=25°12'$。

例5 从直角的顶点在直角内引两条射线，把这个直角分成度数之比为1：2：3的三个角，求这三个角的度数。

解： 设三个角的度数分别为x、$2x$、$3x$，那么

$x+2x+3x=90$，$6x=90$，$x=15$，$2x=30$，

$3x=45$。

答： 这三个角分别为15°、30°、45°。

【练习】

1． 两个相等的钝角，有一个公共的顶点和一条公共边，其

它两边组成一个直角，则每一个钝角是__度。

2. 时钟的时针和分针在下列时刻各成多少度的角？(1)1时；(2)3时；(3)6时；(4)6时30分；(5)12时。

3. 从点O引四条射线OA、OB、OC、OD(图1—4)。如果$\angle 1$、$\angle 2$、$\angle 3$、$\angle 4$的度数之比是1∶2∶3∶4，求这四个角的度数。

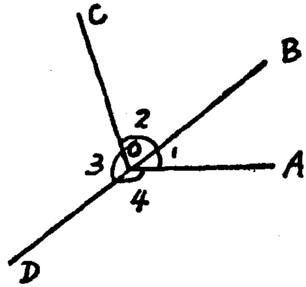


图 1—4

例6 一个角与它的补角以及它的余角之和是一个直角的$2\frac{1}{3}$倍，求这个角。

解：设这个角的度数为x，那么

$$x+(180-x)+(90-x)=90\times 2\frac{1}{3},$$
$$270-x=210,\quad x=60.$$

答：这个角为60°。

例7 某角的余角与其补角的和比该角的4倍少24°。求这个角，再求它的余角、补角各是几度？

解：设该角的度数为x，则它的余角的度数为$(90-x)$，补角的度数为$(180-x)$。于是

$$(90-x)+(180-x)=4x-24,$$

解得 $x=49$，$90-x=41$，$180-x=131$。

答：这个角为49°，它的余角为41°，补角为131°。

【练习】

1. 互补的两个角，能不能都是锐角？钝角？直角？为什么？

2. 一个锐角的补角与这个锐角的余角的差是多少度？

3. 一个角的余角是这个角的一半，求这个角的度数。

4. 图1—5 中，AOB 是一条直线，OC、OD、OE都是射线，指出图中哪些角互为补角？

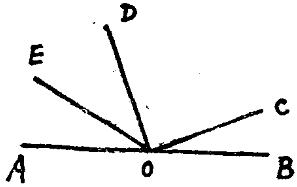


图 1—5

5. 图1—6中，$\angle AOC=\angle BOD=90^\circ$，

(1) 如果$\angle BOC=m^\circ$，求$\angle AOD$；

(2) $\angle BOC$和 $\angle AOD$ 有什么关系？

(3) 如果 $\angle AOD=3\angle BOC$，求$\angle BOC$。

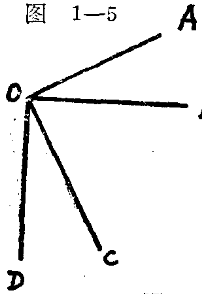


图 1—6

例8 用圆规和直尺作一个角使它等于90°。

作法：1.作平角 $\angle AOB$（图1—7）；

2. 作$\angle AOB$的平分线OC。

则 $\angle AOC$（或$\angle BOC$）就是所求作的直角。

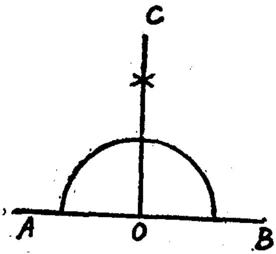


图 1—7

【练习】

1. 用直尺和量角器把一个周角分成5等分。
2. 用直尺任画一个三角形，再用直尺和圆规作这三角形三个角的三条角平分线。
3. 已知锐角α和β（$\angle\alpha>\angle\beta$），用直尺和圆规作一个角使它等于$2\angle\alpha-\frac{1}{2}\beta$。

4. 用直尺和圆规作一个角，使它等于：

(1) $22°30'$；(2) $67°30'$；(3) $112.5°$；(4) $157.5°$。

三　相交线

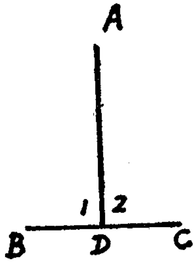


图　1—8

垂线、线段的垂直平分线

例9　填空：图1—8中，已知$AD\perp BC$于D，则AD是$\underline{BC}$的垂线；BC是$\underline{AD}$的垂线；$\angle 1=\angle 2=\underline{90°}$；$A$到$BC$的距离是$\underline{AD}$；射线$DA$平分$\underline{\angle BDC}$。

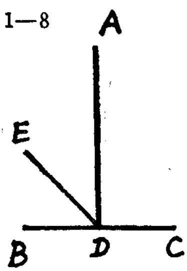


图　1—9

【练习】

1. 在图1—9中，$AD\perp BC$于D，$\angle ADE=45°$。

填空：____、____是直角；____、____是锐角；$\angle EDC$是____角；____和____、____和____互补；____和____互余；____是平角；射线DE是$\angle ADB$的____；AD是BC的____。

2. 画图：（图1—10）过P点作直线AB的垂线（用三角板）。

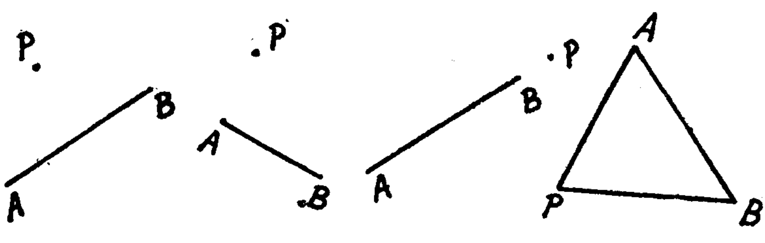


图　1—10

例10 图1—11中，$OA\perp OC$，$OB\perp OD$，$\angle 3=40°$，求$\angle AOD$的度数。

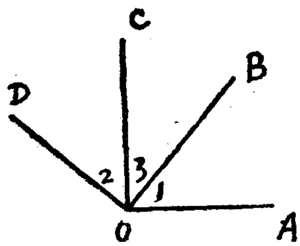


图 1—11

解：$\because$ $OA\perp OC$，

$\therefore$ $\angle 1+\angle 3=90°$.

又 $\angle 3=40°$，

$\therefore$ $\angle 1=50°$.

而 $OB\perp OD$，

$\therefore$ $\angle BOD=90°$.

$\therefore$ $\angle AOD=\angle 1+\angle BOD=50°+90°=140°$.

【练习】

1. 设$AB\perp BC$，$BC\perp CD$，那么$\angle ABC$和$\angle BCD$都是__；$\angle ABC=$____；$\angle BCD=$____（自己画图）.
2. 从钝角$\angle AOB$的顶点O引射线$OP\perp OA$（图1—12）.设$\angle\beta:\angle\alpha=2:3$，求$\angle AOB$.
3. 已知：$AB\perp BC$，$DC\perp BC$，$\angle 1=\angle 4=30°$（图1—13），求$\angle 2$和$\angle 3$的度数.

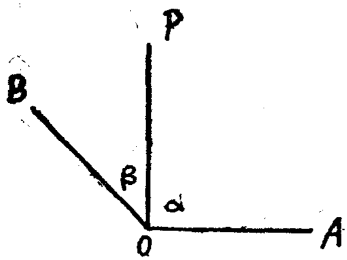


图 1—12

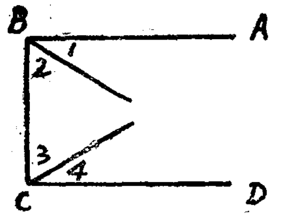


图 1—13

解：$\because AB\perp BC$，$DC\perp BC$，

$\therefore \angle 2+\angle 1=$____，$\angle 3+\angle 4=$____，

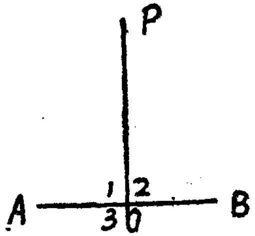


图 1—14

又$\angle 1=\angle 4=30°$，

$\therefore \angle 2=$____，$\angle 3=$____。

4. 作三角形三边的垂直平分线（用直尺和圆规），观察这三条垂直平分线有何关系？

5. 直线PO是线段AB的垂直平分线（图1—14），那么AO____BO，PO____AB；$\angle 1$、$\angle 2$、$\angle 3$是____。

6. 观察下列各图（图1—15），说明角平分线的画法，过直线上一点作垂线的画法和线段的垂直平分线的画法之间的内在联系。

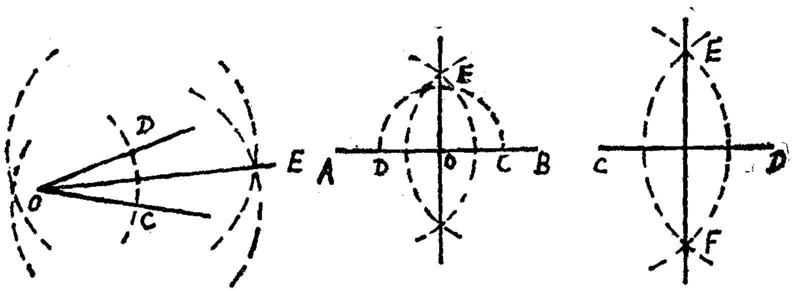


图 1—15

对顶角

例11 证明：对顶角相等。

已知：直线AB、CD交于O点。

求证：$\angle 1=\angle 2$（图1—16）。

证明：$\because AB$、CD都是直线，

$\therefore \quad \angle 1+\angle 3=180°$，

$\angle 2+\angle 3=180°$。

两式相减，得

$\angle 1-\angle 2=0$。

$\therefore \quad \angle 1=\angle 2$。

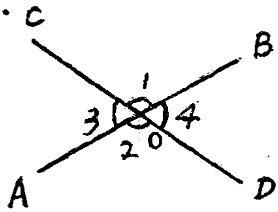


图 1—16

例12 直线L_1、L_2、L_3相交于O（图1—17）。

已知：$\angle 5=30°$，$\angle 6=50°$。求：$\angle 1$、$\angle 2$、$\angle 3$、$\angle 4$。

解：$\because \angle 4$和$\angle 6$，$\angle 2$和$\angle 5$分别是对顶角，

$\therefore \quad \angle 4=\angle 6=50°$

（对顶角相等），

$\angle 2=\angle 5=30°$

（对顶角相等）。

又 $\angle 1+\angle 6+\angle 5=180°$，

$\therefore \quad \angle 1=180°-30°-50°$

$=100°$。

$\therefore \quad \angle 3=\angle 1=100°$

（对顶角相等）。

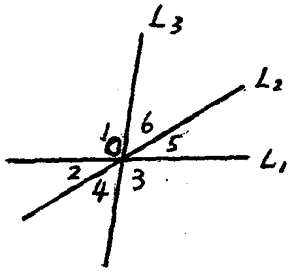


图 1—17

例13 已知直线AB和CD相交于O点，并且$\angle AOD=5\angle AOC$。求$\angle BOD$和$\angle BOC$的度数（图1—18）。

解：设$\angle AOC=x$，

则 $\angle AOD=5x$，

根据题意，得

$x+5x=180°$，

即 $x=30°$，$5x=150°$。

$\therefore \quad \angle BOD=\angle AOC=30°$

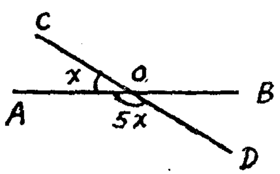


图 1—18

（对顶角相等），

$\angle BOC=\angle AOD=150°$（对顶角相等）。

【练习】

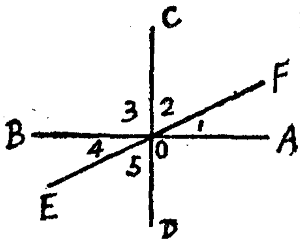


图 1—19

1. 如图 1—19，已知：$CD\perp AB$，则$\angle 1$和____、$\angle 3$和____、$\angle AOC$和______是对顶角；$\angle 5$和$\angle 2$是______；$\angle 1$和$\angle 2$是______；$\angle 1$和$\angle 5$是______；$\angle 2$和$\angle 4$是____；$\angle AOC$和$\angle 3$是__；$\angle AOE$是____角；$\angle 1$是____角；$\angle AOD$是____角。

2. 已知：AB、CD相交于O点，$\angle AOD+\angle BOC=225°$（图1—20），求$\angle AOD$和$\angle BOD$的度数。

3. 如图1—21，直线AB和CD相交于O，$\angle 1:\angle 3=2:3$，求$\angle 1$、$\angle 2$、$\angle 3$、$\angle 4$。

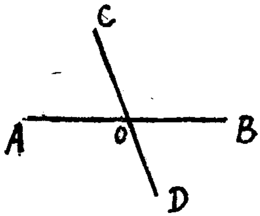


图 1—20

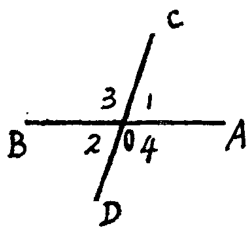


图 1—21

四 平行线

同位角、内错角、同旁内角

例14 指出图1—22用数字表示的角中，哪些是内错角？同位角？同旁内角？

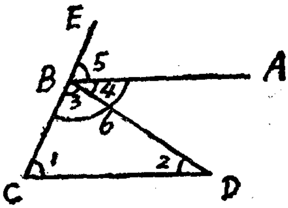
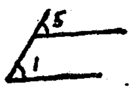
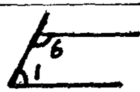


图 1—22

解：这类问题可以通过拆图，以排除干扰而得到解答．下面以∠1和各角的关系为例，列表如下：

角	拆 图	关 系
∠1和∠2		同旁内角
∠1和∠3		同旁内角
∠1和∠4		无 关
∠1和∠5		同 位 角
∠1和∠6		同旁内角

用上面的方法还可以看出，∠2和∠3是同旁内角，∠2和∠4是内错角。

【练习】