

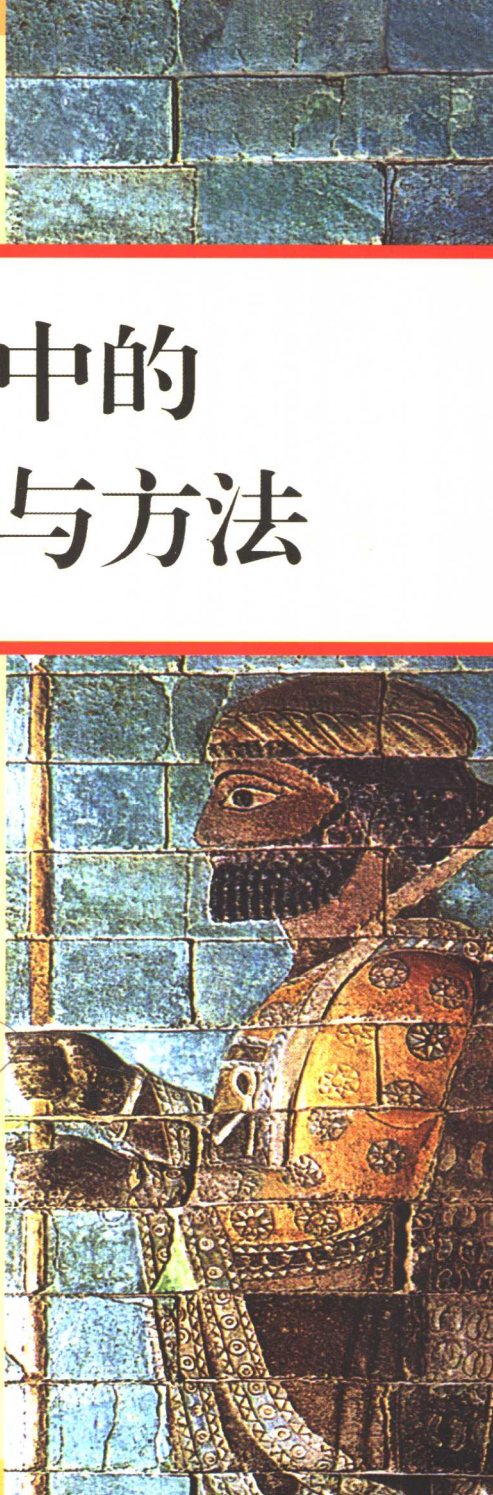
数学分析中的 典型问题与方法

第2版

裴礼文



高等教育出版社



数学分析中的 典型问题与方法

第 2 版

裴礼文

高等教育出版社

图书在版编目(CIP)数据

数学分析中的典型问题与方法/裴礼文. -2 版.

北京:高等教育出版社,2006.4

ISBN 7-04-018454-0

I. 数... II. 裴... III. 数学分析-研究生-
入学考试-自学参考资料 IV. O17

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 007945 号

策划编辑 李蕊 责任编辑 张耀明 封面设计 张申申
责任绘图 尹莉 版式设计 张岚 责任校对 朱惠芳
责任印制 陈伟光

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-58581118
社 址	北京市西城区德外大街 4 号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100011	网 址	http://www.hep.edu.cn
总 机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landaco.com
经 销	蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landaco.com.cn
印 刷	北京市白帆印务有限公司	畅想教育	http://www.widedu.com
		版 次	1993 年 5 月第 1 版
开 本	850×1168 1/32		2006 年 4 月第 2 版
印 张	33.125	印 次	2006 年 4 月第 1 次印刷
字 数	850 000	定 价	44.60 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换。

版权所有 侵权必究

物料号 18454-00

内 容 提 要

本书是为正在学习数学分析(微积分)的读者、正在复习数学分析(微积分)准备报考研究生的读者以及从事这方面教学工作的年轻教师编写的。

遵循现行教材的顺序,本书全面、系统地总结和归纳了数学分析问题的基本类型,每种类型的基本方法,对每种方法先概括要点,再选取典型而有相当难度的例题,逐层剖析,分类讲解。然后分别配备相应的一套练习。旨在拓宽基础,启发思路,培养学生分析问题和解决问题的能力,作为教材的补充和延伸。此外,对现行教材中比较薄弱的部分,如半连续、凸函数、不等式、等度连续等内容,作了适当扩充。

全书共分7章、36节、246个条目、1382个问题,包括一元函数极限、连续、微分、积分、级数;多元函数极限、连续、微分、积分。

本书大量采用全国部分高校历届硕士研究生数学分析入学试题和部分国外赛题,并参阅了70余种教材、文献及参考书,经过反复推敲、修改和筛选,在几代人长期教学实践的基础上编写而成。选题具有很强的典型性、灵活性、启发性、趣味性和综合性,对培养学生的能力极为有益,可供数学院(系)各专业师生及有关读者参考,书中基本内容(不标*、※符号)也可供参加研究生入学考试数学一的考生选择阅读。

此次改版,补充、更新了大量有代表性的新试题、基础性题。增设了“导读”栏目。习题给了提示、再提示或解答。

题目按难易,分为五个档次,☆部分是重点推荐内容。

代 序

《数学分析》是高等院校数学类各专业的主干课之一，它对于许多后续课程的学习乃至作为科研工作基本功的训练都起着非凡的作用。如何掌握好该课的基本内容并能熟练地运用其中的基本技巧对每个学生来说都是至关重要的。就解题而言，许多习题的解答学生是能够看懂的，但他们的主要问题在于：这些方法是怎样想出来的？也就是说，学生所需要的：除想知道这些题怎样去求解或证明外，更希望了解解题的思想过程，学会思想方法。

裴礼文同志所编写的《数学分析中的典型问题与方法》，系统地汇集了《数学分析》各个部分的一些典型例题和习题，并着重于分析解题的思路和方法，因此是较好地针对学生的需要而编写的。目前我国已出版有类似的书籍（其中不乏很好的著作），但或者标准过高、题目过深，远远超出大学基础课的要求，或者解答十分详细，而对解题思想叙述得不够。本书编写中力图兼顾学生对这两方面的实际要求。这里大量选用了按《数学分析》教学大纲要求的题目（例如，许多高等院校硕士研究生的入学试题、国外高校竞赛试题等），并进行分析讲解。因此，本书的出版，对广大青年学生是非常有益的；对从事《数学分析》教学工作的教师来说，也是极有参考价值的。

路见可
于武汉大学

笔者的话

《数学分析》课是数学系各专业的一门重要基础课。它对许多后续课程有直接影响,关系到整个数学系教学的成败,关系到学生素质培养。数学院系的师生历来十分重视数学分析课的教学,投入了巨大的劳动。在教学实践中,我们深深体会到,学生们学习和掌握教材的基本知识困难并不大,但要灵活运用所学的知识去分析问题和解决问题就感到困难,甚至不知如何着手。为培养学生分析问题和解决问题能力,以前也出版了大量的好书,但仍不能满足学生的要求。分析其原因,有些书主要讲一般难度的问题,有些又跟平时教学内容距离较远。在同学们掌握了教材的基本知识后,若能有一本帮助学生巩固、加深、提高、扩大所学知识的书,用难度更高的问题(最好用研究生入学试题)对学生进行训练,对数学分析中的问题与方法进行全面系统的总结和分类指导,告诉读者应该如何去分析和解决问题,这对培养学生的思维能力与独立工作的能力,从根本上强化已学知识,提高学生的素质十分必要。

基于这种需要,我们集中了好几年的时间,将全国各高校历届硕士研究生数学分析入学试题进行了一次全面整理,逐题分析研究,比较分类。这些题目多数具有相当的难度,但仍在教学大纲要求范围之内。其中不少题目出自名家之手。经过我们反复推敲后修改和筛选出的题目有着很强的典型性、灵活性、启发性、趣味性和综合性。它们理当看成是数学分析教学发展提高的一个组成部分。用这些题目来训练学生,对培养学生的能力极为有益。但这些题目毕竟十分零散,还不足以全面概括数学分析中的基本类型和方法。因此,我们又参阅了国内外 70 余种教材、文献和参考书,分析比较了上万道题目,包括我们教学过程中积累的题目。加上此次修订共

精选了约 1 382 题作为讲解和剖析各类型的例题和练习. 其中多半是研究生入学试题及国外高校竞赛题. 另外, 本书还对现行教材中比较薄弱的部分进行适当扩充讲解, 如函数上、下极限, 上、下半连续, 凸函数, 不等式, 等度连续等等. 本书希望对学有余力, 特别是优秀学生, 以及对任课老师的教学工作有所帮助和裨益.

全书共分 7 章 36 节, 约 246 个小条目, **中心问题是向读者回答: 数学分析的每个单元到底有哪些基本问题? 每类问题各有哪些基本方法? 每种方法又有哪些富有代表性、典型性, 又有相当难度, 值得向大家推荐的好例题和练习?** 这些题目在一般教科书中难以找到, 有相当难度, 但又能被大学生所接受和掌握. 其难度相当于研究生入学考试中的难题与次难题.

为了方便阅读, 特别为了一、二年级学生在学完一个单元之后可以立即转入到本书的学习, 本书内容的编排基本上与现行教材平行, 甚至一一对应. 可以作为课堂教学的补充和延续.

基于编写本书的上述宗旨, 我们在对例题进行分类讲解时, 特别注意了系统地讲述解题思想与解题方法, 而不是题目的堆砌或单纯的题解. 全书以解题方法为中心, 每段先对所解问题的方法以“要点”的形式进行概括性的阐述, 然后由浅入深地安排一套一套的例题, 对具体方法和精神实质, 进行一层一层地剖析和讲解; 并不断深化发展, 逐步形成概念, 让读者从变化中领会其不变的东西; 顺藤开花, 让题题有它自己的位置、作用和品尝价值.

优秀学生非常关心“题目是怎么想出来的”? 据此, 在讲解问题时, 我们特别着重于问题的分析, 阐明解题的思路, 使读起来感到亲切自然, 学了能用.

总之, 为了紧密地配合教材和教学, 结合同学们的实际, 联系研究生入学考试, 我们在总结数学分析中的基本问题与方法、选材、编排以及问题的解法、写法上下了很大工夫.

本书是笔者在武汉大学数学系为高年级学生讲授《数学分析(Ⅲ)》, 《数学分析方法》所写讲义的基础上编写的. 原讲义讲授过

三届.全国各地来的十几名进修教师听过这门课,他们和一些借阅了本书手稿的同学一致认为,这些材料非常精彩,解法很有启发性,读后印象极深,可以收到事半功倍的效果.我系教师黄象鼎同志,在教学中广泛采用了本书的内容,他认为,书中的材料对学习数学分析的学生,对学过数学分析的高年级学生,乃至对研究生以及担任分析习题课的老师都很有参考价值.内容耐读,余味甚强,有些问题点到为止,恰到好处.

本书吸收了我系几代人的教学经验,尤其在编写过程中得到我的老师,全国数学教材编审委员会委员路见可教授亲切指导,他不仅逐字逐句的批阅了全书,还为本书撰写了代序.

自1985年以来,本书多次得到高等教育出版社文小西同志的指教,他的许多宝贵意见,成为本书的指导思想和修改依据.另外在编审加工过程中,又幸得他极为精细、“浩瀚”的工作,使本书大为增色.

本书还得到辽宁师范大学数学系王长庆先生,我系前辈吴厚心教授的指教和帮助.在编写过程中得到系领导的亲切关怀和支持.

在此谨向以上各位老师、同志和朋友表示衷心的感谢,对所参考的书籍(见参考书目)的作者,对所选题目的作者,表示深切的谢意.

最后对审阅本书的徐森林教授为本书所作的热忱肯定及宝贵意见,表示衷心感谢!对高等教育出版社的同志们为本书出版付出的辛勤劳动表示感谢.没有他们的支持,本书是不可能与读者见面的.

阅读本书时,建议把例题当成有解答的习题来做,坚持**先做再看**的学习方法.笔者认为这是成功使用本书的关键.

由于水平和时间限制,书中一定还有不少缺点和错误,恳请广大读者批评指正.

裴礼文

1988.4.于武汉大学

再 版 前 言

作为一名长期从事数学分析教学工作的教师,能为广大读者做点事,得到读者关爱,是本人的极大欣慰.应当特别感谢高等教育出版社,十二年来为本书连续印刷出版了十一次,还推荐到台湾凡异出版社出版了中文繁体版(上、下册).

此次修订,除对文字进行了部分修改之外,主要增加了大量新近考研试题.对部分热点内容的练习,进行了重新编排和改写,大幅度地增加了提示、再提示,部分还给了解答,以适应不同读者的需要.根据考研情况适当增加了基础性、中档次的题目和内容,更好跟当前的考情接轨.同原版比较,内容更完整、更充实、更便于阅读,也更贴近于考研的实际.

此次修订还对内容作了标示,以便选用:

“无标记” 为基础性内容,适合各类读者.

“*” 在例题习题之前加“*”号,表示该题难度较大或理论性较强.在章节段落标题前加“*”号,表示该部分内容主要适合于数学院系的学生,非数学院系学生可从略.“**”号表示难度更大或理论性更强.

“☆”表示“重点推荐”.在带*的章节中出现的“☆”号,表示主要针对数学院系学生的重点推荐.标“☆”号的题目控制在总数的 $\frac{1}{3}$ 左右,供读者选读.

“※” 为扩展性内容,供有兴趣的读者选阅.

应该说,本书的最大特点是全面、系统地总结“方法”,不是单纯追逐考题.事实证明,该书不少不是考题的题目,陆续成了部分院校的考题.可见探讨和总结“方法”并带动基本概念和原理的学

习、掌握和深化,才是最好的备考方法.

事实上,数学分析中的基本概念、原理和方法是不可分割的,在系统总结方法的过程中自然会带动基本概念和原理的复习.本书每一部分,正是围绕一个中心概念开展讨论的.例如像一致连续,它原本是一个十分抽象的数学概念,初学者非常难以理解和掌握,本书通过大量的例题和练习,从不同的角度、不同层面进行深入透彻的分析,使之变得十分清晰、生动、具体,易于理解和掌握,这一点对于初学者来说的确是十分有益的,这也是读者喜爱本书的又一重要原因.

许多同行老师、朋友,还有不少正在担任数学分析教学工作的老师为本书修订提出了许多宝贵意见和建议,或以不同方式为本书修订给予关怀、支持和帮助,在此特致以衷心的感谢!对高等教育出版社的各位领导、各位编辑为本书修订所做大量工作表示感谢!

· 由于时间和水平的限制,书中一定还有不少缺点和问题,敬请读者批评指正.

裴礼文

2006.2

符 号

集合符号

N 全体自然数组成的集合 $N = \{1, 2, \dots, n, \dots\}$.

Z 全体整数的集合.

Q 全体有理数的集合.

R 全体实数的集合.

∂E 集合 E 的边界点组成的集合.

$U(x_0, \delta)$ 点 x_0 的 δ 邻域 $U(x_0, \delta) = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

$U_0(x_0, \delta)$ 点 x_0 的空心 δ 邻域 $U_0(x_0, \delta) = (x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta)$

$\overline{M_1 M_2}$ 点 M_1, M_2 所联之线段.

$N(M_0)$ 点 M_0 全体邻域组成之集合.

逻辑符号

\forall 对于任意给定的 (当用在符号“ \exists ”之前时).

对于所有的 (当用在命题最后时).

\exists 至少存在一个.

$A \Rightarrow B$ A 的必要条件为 B .

$A \Leftarrow B$ A 的充分条件为 B .

$A \Leftrightarrow B$ A 的充分必要条件为 B .

分析符号

\nearrow 单调增加(不一定严格).

\searrow 单调减小(不一定严格).

严 \nearrow 严格增加.

严 \searrow 严格减小.

\rightarrow 趋向于.

\nrightarrow 不趋向于.

→ 一致收敛于.

⇏ 不一致收敛于.

代数符号

$$(a_{ij})_{n \times m} \text{ 矩阵: } (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

$\det(a_{ij})$ 矩阵 (a_{ij}) 的行列式.

$\frac{\partial(y_1, \dots, y_m)}{\partial(x_1, \dots, x_n)}$ 有时表示雅可比矩阵 $\left(\frac{\partial y_i}{\partial x_j}\right)_{\substack{i=1, \dots, m \\ j=1, \dots, n}}$, 有时表示雅可比行列式

$\det\left(\frac{\partial y_i}{\partial x_j}\right)$, 以上下文定.

$A = (A_x, A_y, A_z)$ 以 A_x, A_y, A_z 为分量的三维向量.

特殊标记

“无特殊标记” 表示为基础内容, 适合各类读者.

“*” 在例题、习题之前, 表示该题难度较大, 或理论性较强. 标在章节段落标题之前, 表示该部分内容主要适合于数学院系的学生, 非数学院系学生可以从略.

“***” 表示难度更大或理论性更强.

“☆” 表示“重点推荐”. 在带“*”号的章节中出现的“☆”号, 表示主要针对数学院系的学生. 标“☆”号的题目约占总数的 $\frac{1}{3}$, 可作阅读重点.

“※” 为扩展性内容, 供有兴趣的读者选阅.

目 录

代序	I
笔者的话	I
再版前言	I
符号	I
第一章 一元函数极限	1
§ 1.1 函数	1
* 一、关于反函数	1
二、奇函数、偶函数	2
三、周期函数	4
☆ 四、几个常用的不等式	5
* 五、求递推数列的通项	9
* § 1.2 用定义证明极限的存在性	14
一、用定义证明极限	14
二、用 Cauchy 准则证明极限	21
三、否定形式	22
四、利用单调有界原理证明极限存在	25
五、数列与子列, 函数与数列的极限关系	26
六、极限的运算性质	28
☆ § 1.3 求极限值的若干方法	32
一、利用等价代换和初等变形求极限	33
a. 等价代换(33) b. 利用初等变形求极限(34)	
二、利用已知极限	36
三、利用变量替换求极限	39
四、两边夹法则	40
五、两边夹法则的推广形式	43

☆ 六、求极限其他常用方法	44
a. L' Hospital (常被译为洛必达) 法则 (44)	
☆ b. 利用 Taylor 公式求极限 (45)	
☆ c. 利用积分定义求极限 (46)	
☆ d. 利用级数求解极限问题 (48)	
e. 利用连续性求极限 (50)	
☆ f. 综合性例题 (50)	
§ 1.4 O. Stolz 公式	57
一、数列的情况	57
※ 二、函数极限的情况	63
☆ § 1.5 递推形式的极限	69
☆ 一、利用存在性求极限	69
二、写出通项求极限	79
三、替换与变形	84
※ 四、图解法	86
※ 五、不动点方法的推广	89
六、Stolz 公式的应用	91
* * § 1.6 序列的上、下极限	97
一、利用 $\epsilon - N$ 语言描述上、下极限	97
二、利用子序列的极限描述上、下极限	101
三、利用确界的极限描述上、下极限	103
四、利用上、下极限研究序列的极限	104
五、上、下极限的运算性质	106
* * § 1.7 函数的上、下极限	109
一、函数上、下极限的定义及等价描述	110
二、单侧上、下极限	115
三、函数上、下极限的不等式	115
* § 1.8 实数及其基本定理	116
一、实数的引入	117
二、实数基本定理	120
第二章 一元函数的连续性	127
* § 2.1 连续性的证明与应用	127
* 一、连续性的证明	127

二、连续性的应用	135
* § 2.2 一致连续性	146
一、利用一致连续的定义及其否定形式证题	147
二、一致连续与连续的关系	150
三、用连续模数描述一致连续性	155
※ 四、集上的连续函数及一致连续函数的延拓问题	157
※ § 2.3 上、下半连续	164
一、上、下半连续的定义与等价描述	165
二、上(下)半连续的性质	167
a. 运算性质(167) b. 保号性(168) c. 无介值性(168)	
d. 关于 $f(x)$ 的界(168)	
※ § 2.4 函数方程	174
一、问题的提出	174
二、求解函数方程	175
a. 推归法(175) b. 转化法(178) c. 利用微分方程(181)	
第三章 一元微分学	184
§ 3.1 导数	184
* 一、关于导数的定义与可微性	184
☆ 二、高阶导数与 Leibniz 公式	190
a. 先拆项再求导(190) b. 直接使用 Leibniz 公式(191)	
c. 用数学归纳法求高阶导数(193) d. 用递推公式求导	
(195) e. 用 Taylor 展式求导数(196)	
☆ § 3.2 微分中值定理	206
一、Rolle 定理	206
a. 函数零(值)点问题(206) b. 证明中值公式(209)	
二、Lagrange 定理	211
a. 利用几何意义(弦线法)(211) b. 利用有限增量公式导	
出新的中值公式(217) c. 作为函数的变形(219) d. 用导	
数法证明恒等式(221)	
三、导数的两大特性	222
a. 导数无第一类间断(222) b. 导数的介值性(224)	

四、Cauchy 中值定理	225
a. 推导中值公式(225) b. 作为函数与导数的关系(228)	
☆ § 3.3 Taylor 公式	240
一、证明中值公式	241
二、用 Taylor 公式证明不等式	243
三、用 Taylor 公式作导数的中值估计	244
四、关于界的估计	246
五、求无穷远处的极限	249
六、中值点的极限	251
七、函数方程中的应用	252
八、Taylor 展开的唯一性问题	254
§ 3.4 不等式与凸函数	261
☆一、不等式	261
a. 利用单调性证明不等式(261) b. 利用微分中值定理证明不等式(261) c. 利用 Taylor 公式证明不等式(263)	
d. 用求极值的方法证明不等式(264) e. 利用单调极限证明不等式(265)	
二、凸函数	267
a. 凸函数的几种定义以及它们的关系(268) b. 凸函数的等价描述(272) c. 凸函数的性质及应用(278)	
☆ § 3.5 导数的综合应用	288
一、极值问题	288
二、导数在几何中的应用	294
三、导数的实际应用	296
四、导数在求极限中的应用	298
第四章 一元函数积分学	304
§ 4.1 积分与极限	304
一、利用积分求极限	304
二、积分的极限	306
* * § 4.2 定积分的可积性	321
一、直接用定义证明可积性	323
• IV •	

二、利用定理证明可积性	324
a. 利用定理 2 证明可积性(324) b. 利用定理 1 与定理 1' (例 4.2.3)证明可积性(325) c. 利用定理 3(例 4.2.8)证 明可积性(330)	
§ 4.3 积分值估计 积分不等式及综合性问题	334
一、积分值估计	334
* a. 利用 Darboux 和估计积分值(334) b. 利用变形求估 计及积分估计的应用(336)	
☆二、积分不等式	345
a. 用微分学的方法证明积分不等式(345) b. 利用被积函 数的不等式证明积分不等式(346) c. 在不等式两端取变 限积分证明新的不等式(349)	
三、综合性问题	349
§ 4.4 几个著名的不等式	370
一、Cauchy 不等式及 Schwarz 不等式	371
a. Cauchy 不等式(371) b. Schwarz 不等式(373) ☆c. Schwarz不等式的应用(374)	
☆二、平均值不等式	379
a. 基本形式(379) ※ b. 平均值不等式的推广形式(380) ※c. 平均值不等式的积分形式(382)	
* 三、Hölder 不等式	385
a. 基本形式(385) b. Hölder 不等式的积分形式(386)	
* 四、H. Minkowski 不等式	387
a. 基本形式(387) b. H. Minkowski 不等式的积分形式(388) c. n 元 Minkowski 不等式(388)	
* 五、W. H. Young 不等式	389
§ 4.5 反常积分	394
☆一、反常积分的计算	394
a. 三大基本方法(394) b. 其他方法(398)	
☆二、反常积分敛散性的判定(十二法)	401
三、无穷限的反常积分的收敛性与无穷远处的极限	413