张永德/主编

物理学大题典

力学

1 上册

A Grand Dictionary of Physics Problems And Solutions

强元棨　程稼夫/编著

科学出版社
www.sciencep.com
中国科学技术大学出版社

内 容 简 介

《物理学大题典》是一套大型工具性、综合性物理题解丛书。丛书内容涵盖综合性大学全部本科物理学内容：从普通物理的力学、热学、光学、电学、近代物理到“四大力学”，以及原子核物理、粒子物理、凝聚态物理、等离子体物理、天体物理、激光物理、量子光学、量子信息等。内容新颖、注重物理、注重学科交叉、注重与科研结合。

《力学》卷共计12章，分上、下册，上册包括质点运动学、质点与质点系动力学、振动和波、有心运动、刚体运动学和动力学、流体力学；下册包括力学的拉格朗日表述、有限多自由度系统的小振动、力学的哈密顿表述、狭义相对论力学等。

本丛书可作为物理类本科生的学习辅导用书、研究生的入学考试参考书和各类高校物理教师的教学参考书。

图书在版编目(CIP)数据

力学(上、下册)/强元棨、程稼夫编著.—北京：科学出版社；合肥：中国科学技术大学出版社，2005
(物理学大题典①/张永德主编)
ISBN 7-03-015494-0

Ⅰ.力… Ⅱ.①强…②程… Ⅲ.力学-解题 Ⅳ.O3-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2005)第044933号

策划编辑：胡升华 / 文案编辑：王昌泰 / 责任校对：钟 洋
责任印制：钱玉芬 / 封面设计：孙希前

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com
中国科学技术大学出版社
安徽省合肥市金寨路96号
邮政编码：230026
中国科学院印刷厂 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2005年9月第 一 版 开本：787×1092 1/16
2005年9月第一次印刷 印张：68 1/4
印数：1—5 000 字数：1 600 000

定价：98.00元(上、下册)

(如有印装质量问题，我社负责调换〈科印〉)

《物理学大题典》编委会

前　言

物理学，由于它在自然科学中所具有的主导作用，在人类文明史中，特别是在人类物质文明史中，占据着极其重要的地位. 经典物理学的诞生和发展曾经直接推动了欧洲物质文明的长期飞跃. 20 世纪初诞生并蓬勃发展起来的近代物理学，又造就了上个世纪物质文明的辉煌. 自 20 世纪末到 21 世纪初的当前时代，物理学正在以空前的活力，广阔深入地开创着向化学、生物学、生命科学、材料科学、信息科学和能源科学渗透和应用的新局面. 在本世纪里，物理学再一次直接推动新一轮物质文明飞跃的伟大进程已经开始.

但是，发展到目前的物理学宽广深厚，累积的知识浩瀚无垠. 教授和学习物理学都是一个相当艰苦而漫长的过程. 在这个漫长过程的许多环节中，做习题是其中必要而又重要的环节. 做习题是巩固所学知识的必要手段、是深化拓展所学知识的重要练习，是锻炼科学思维的体操. 习题对于教师和学生双方都是重要的.

然而，和习题有关的事都是很不起眼的事. 在有些人眼光中，求解和编纂练习题是全部教学活动中相当次要的环节. 习题集也确实是所有著作中“最低层”的，大约只有“傻子”们才肯做的事. “聪明人”常会找诸如习题集不应当出之类的理由，光明正大地规避掉.

但是，在教授和学习过程中，只要是需要的，都是合理的，也总得有人去做才行. 于是我们编委会的这些人，本着甘为孺子牛的精神，平时在科研和教学中一道题一道题地积累，现在又一道题一道题地编审，花费了大量时间做着这种不起眼的事. 大家觉得，这件事终究是教与学双方共同需要的，也就是有益的. 正如一个城市基础建设中，不能都去做地面上的摩天大楼和纪念碑等“抢眼球”的事，也还需要做诸如修建马路、下水道等基础设施的事.

这套《物理学大题典》的前身是中国科学技术大学出版社出版的《美国物理试题与解答》丛书(7 卷). 那套丛书于 20 世纪 80 年代后期由张永德发起并组织完成，内容包括普通物理的力、热、光、电、近代物理到四大力学的全部基础物理学. 出版时他选择了“中国科学技术大学物理辅导班主编”的署名方式. 自那套丛书出版之后，虽历经 10 余年，仍然有不断的需求，于是就有了现在的这套丛书——《物理学大题典》.

现在这套《物理学大题典》丛书的内容，除继续涵盖力、热、光、电、近代物理到四大力学全部基础物理学内容之外，还包括了原子核物理、粒子物理、凝聚态物理、等离子体物理、天体物理、激光物理、量子光学和量子信息物理等内容. 就是说，追踪不断发展的科学轨迹，现在这套丛书仍旧大体涵盖了综合性大学全部本科物理课程的内容.

这次重新编审中，大部分教师仍为原来的，但也增加了一些新的成员. 这次出版经大家着力重订和大量扩充，又耗时近两年而成. 总计起来，这套丛书前后历时近 20 年，耗费了 30 余位富有科研和教学经验的教授、近 150 位 20 世纪 80 年代和现在的研究生及高年级本科生的巨大辛劳. 丛书确实是大家长期共同劳动的结晶.

《物理学大题典》中包括了大量的美国物理试题. 一般说来,美国物理试题涉及的数学并不繁难,但却或多或少具有以下特色:内容新颖,富于“当代感”;思路灵活,涉及面宽广;方法和结论简单而实用,试题往往涉及新兴和边沿交叉学科;不少试题本身似乎显得粗糙但却抓住了物理本质,显得“物理味”很足. 纵观这些,我们深切感到,这些题目的集合在一定程度上体现了美国科学文化的个性及思维方式的特色. 惟鉴于此,我们不惮繁重,集众多人力而不怯,耗漫长岁月而不辍,还是值得的.

至于这次扩充修订所增添的大量题目,也是本着这种精神,摘自大家各自的科研工作成果,或是来自各人的教学心得,实是点滴聚成.

这里要强调指出,对于学生,确实有一个如何正确使用习题集的问题. 有的同学,有习题集也不参考,咬牙硬顶,一个晚上自习时间只做了两道题. 这种精神诚应嘉勉,但效率不高,也容易挫伤学习积极性,不利于培养学习兴趣;也有的同学,逮到合适解答提笔就抄,这样做是浮躁的、不踏实的. 这两种学习方法都不可取. 我们认为,正确使用习题集是一个“三步曲”过程:遇到一道题,先自己想一想,想出来了自己做最好;如果认真想了一些时间还想不出来,就不要老想了,不妨翻开习题集找答案,看懂之后,合上书自己把题目做出来;最后一步,要是参考习题集做出来的,就用一两分钟时间分析解剖一下,找找自己存在的不足,今后注意. 如此“三步曲”下来,就既有效率又踏实了. 本来,效率和踏实是一对矛盾,在这类“治学小道”之下,它俩就统一起来了. 总之,正确使用之下的习题集肯定能够成为学生们有用的“爬山”工具.

丛书这次重订扩充工作是在科学出版社胡升华博士的倡议和支持下进行的. 没有他的推动,这套丛书面世是不可能的. 同时,在这次重订扩充工作里,我们得到了中国科学技术大学的部分教学资助,以及编委会中郭光灿和周又元两位院士和刘万东教授的支持. 对于这些宝贵的支持,谨表示深切感谢.

丛书的力学卷共计 12 章,题目总数由原来 413 道增扩为 1070 道. 原《美国物理试题与解答 · 力学》由强元棨、顾恩普、程稼夫、李泽华、杨德田编,参加解题的人有马千乘、邓悠平、杨仲侠、季澍、杜英磊、杨德田、王平、李晓平、王琛、强元棨、陈伟、斯其苗、陈兵、李泽华、肖旭东、任勇、董志华、伍昌鸿、杨永安、何小东、黄剑辉、程稼夫、郭志椿. 原力学卷题目来自美国几所著名大学(包括普林斯顿大学、麻省理工学院、哥伦比亚大学、加州大学伯克利分校、威斯康星大学、芝加哥大学、纽约州立大学布法罗分校)的试题和 CUSPEA 试题. 本卷对原力学卷作了大幅度的改写. 增加的题目来自强元棨《经典力学》(科学出版社,2003)上、下册全部习题(其中不少选自 E. A. Desloge《Classical Mechanics》、周衍柏《理论力学教程》等,部分是自拟的). 此外,还选自 D. A. Wells《Theory and Problems of Lagrangian Dynamics》、B. B. 巴蒂金、И. И. 托普蒂金《电动力学习题集》、E. Г. 维克斯坦《电动力学习题汇编》和 R. 高特里奥、W. 萨文《近代物理学理论和习题》等.

编审者谨识

2005 年 5 月

目　录

前言

上　册

第一章　质点运动学…………………………………………………… 1
1.1　速度、加速度、运动学方程和轨道 ……………………………… 1
1.2　自然坐标、切向加速度和法向加速度 …………………………… 16
1.3　质点的相对运动………………………………………………… 23
第二章　质点动力学 …………………………………………………… 37
2.1　牛顿运动定律…………………………………………………… 37
2.2　质点的动能定理和机械能守恒定律 …………………………… 108
2.3　质点的角动量定理和角动量守恒定律 ………………………… 134
2.4　碰撞 ……………………………………………………………… 146
第三章　振动和波……………………………………………………… 156
3.1　简谐振动 ………………………………………………………… 156
3.2　阻尼振动和受迫振动 …………………………………………… 178
3.3　简谐波 …………………………………………………………… 199
3.4　边界效应和干涉 ………………………………………………… 211
3.5　声波 ……………………………………………………………… 256
第四章　有心运动……………………………………………………… 277
4.1　一般有心力作用下的运动 ……………………………………… 277
4.2　平方反比律的有心力作用下的运动 …………………………… 298
4.3　有心力场中的散射 ……………………………………………… 317
第五章　刚体运动学…………………………………………………… 332
5.1　刚体上各点的速度和加速度 …………………………………… 332
5.2　刚体的相对运动 ………………………………………………… 349
第六章　质点系动力学………………………………………………… 363
6.1　质点系的动量定理和动量守恒定律 …………………………… 363
6.2　质点系的角动量定理和角动量守恒定律 ……………………… 377
6.3　质点系的动能定理和机械能守恒定律 ………………………… 383
6.4　两体问题 ………………………………………………………… 395
6.5　变质量质点的运动 ……………………………………………… 406
6.6　位力定理 ………………………………………………………… 418

第七章 刚体动力学 …… 421
7.1 刚体的平衡和平动 …… 421
7.2 转动惯量和惯量张量 …… 435
7.3 刚体的定轴转动 …… 454
7.4 刚体的平面平行运动 …… 488
7.5 刚体的定点转动、一般运动及其他 …… 533
第八章 流体力学基础 …… 578
8.1 流体运动学 …… 578
8.2 流体静力学 …… 588
8.3 流体动力学 …… 611

下 册

第九章 力学的拉格朗日表述 …… 635
9.1 广义力、虚功原理 …… 635
9.2 达朗贝尔原理、达朗贝尔——拉格朗日方程 …… 667
9.3 拉格朗日方程 …… 674
9.4 冲击运动 机电模拟 …… 732
第十章 有限多自由度系统的小振动 …… 757
10.1 自由的小振动 …… 757
10.2 有阻尼和(或)有周期性外力作用下的小振动 …… 830
第十一章 力学的哈密顿表述 …… 845
11.1 哈密顿正则方程 …… 845
11.2 泊松括号和泊松定理 …… 867
11.3 哈密顿原理 …… 880
11.4 正则变换 …… 893
11.5 哈密顿-雅可比方程 …… 907
11.6 作用变量、角变量及其应用 …… 926
第十二章 狭义相对论力学 …… 955
12.1 洛伦兹变换 …… 955
12.2 狭义相对论的运动学 …… 976
12.3 狭义相对论的动力学 …… 1006
12.4 四维矢量 …… 1048

第一章　质点运动学

1.1　速度、加速度、运动学方程和轨道

1.1.1　一物体做直线运动，它的运动学方程为

$$x = at + bt^2 + ct^3$$

其中 a、b、c 均为常量. 求：

(1) $t=1\sim2$ 期间的位移，平均速度和平均加速度；

(2) $t=2$ 时的速度和加速度.

解　(1) $\Delta x = x(2) - x(1)$

$$= (2a+4b+8c)-(a+b+c)$$

$$= a+3b+7c$$

$$\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = a + 3b + 7c$$

$$\bar{a} = \frac{v(2)-v(1)}{\Delta t} = \frac{(a+4b+12c)-(a+2b+3c)}{1} = 2b+9c$$

(2) $v(2) = (a+2bt+3ct^2)|_{t=2} = a+4b+12c$

$a(2) = (2b+6ct)|_{t=2} = 2b+12c$

1.1.2　一质点沿 x 方向做直线运动，t 时刻的坐标为 $x=5t^2-t^3$，式中 x 以米计，t 以秒计. 求：

(1) 第 4 秒内的位移和平均速度；

(2) 第 4 秒内质点所走过的路程.

解　(1) $\Delta x = x(4)-x(3) = (80-64)-(45-27) = -2\text{m}$

$$\bar{v} = \frac{x(4)-x(3)}{4-3} = -2\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$$

(2) 先求出速度变号的时刻.

$$v = 10t - 3t^2$$

速度变号的时刻 $v=0$，此时 $t=\dfrac{10}{3}\text{s}$.

第 4 秒内走过的路程

$$s = \left|x\left(\frac{10}{3}\right)-x(3)\right| + \left|x(4)-x\left(\frac{10}{3}\right)\right|$$

$$= |18.52-18| + |16-18.52| = 3.04\text{m}$$

1.1.3　一质点 $t=0$ 时从原点出发，以恒定速率向 x 正方向沿轨道 $x^2+(y-r)^2=r^2$ 运动，其中 r 为常量. T 时又回到原点. 求：

(1) $t=\frac{1}{3}T$ 时的位矢、速度和加速度；

(2) 在 $t=0$ 至 $t=\frac{1}{3}T$ 期间，质点的位移、平均速度和平均加速度.

解　(1) 由轨道方程可知，质点做圆周运动. 再由 $t=0$ 时从原点出发，以恒定速率向 x 正方向运动. 可直接写出质点的运动学方程为

$$x = r\sin\omega t$$
$$y = r(1-\cos\omega t)$$

其中 ω 为常量.

运动学方程也可用解微分方程得到，方法如下：

$$y = r - \sqrt{r^2 - x^2}$$

(考虑到 $t=0$ 时，$x=0$，$y=0$，开方时取负号)

$$\dot{y} = +\frac{x}{\sqrt{r^2-x^2}}\dot{x}$$

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \dot{x}^2 + \frac{x^2\dot{x}^2}{r^2-x^2} = \frac{r^2\dot{x}^2}{r^2-x^2} = v^2$$

这里 v 为速率，是常量.

由于 $t=0$ 时 $x=0$，且 $\dot{x}>0$，所以

$$r\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = v\sqrt{r^2-x^2}$$

(开方时取正号)

$$\int_0^x \frac{r\mathrm{d}x}{\sqrt{r^2-x^2}} = \int_0^t v\mathrm{d}t$$

$$x = r\sin\left(\frac{v}{r}t\right)$$

$$y = r - r\cos\left(\frac{v}{r}t\right) = r\left[1-\cos\left(\frac{v}{r}t\right)\right]$$

由 $t=T$ 时 $x=0$、$y=0$，可得

$$x = r\sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$$

$$y = r\left[1-\cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right)\right]$$

$t=\frac{1}{3}T$ 时，

$$x = r\sin\frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}r$$

$$y = r\left[1-\cos\frac{2\pi}{3}\right] = \frac{3}{2}r$$

$$\boldsymbol{r}\left(\frac{T}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}r\boldsymbol{i} + \frac{3}{2}r\boldsymbol{j}$$

$$\boldsymbol{r}(t) = r\sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right)\boldsymbol{i} + r\left[1-\cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right)\right]\boldsymbol{j}$$

$$v(t)=\frac{2\pi r}{T}\cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right)\boldsymbol{i}+\frac{2\pi r}{T}\sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right)\boldsymbol{j}$$

$$\boldsymbol{a}(t)=-\frac{4\pi^2 r}{T^2}\sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right)\boldsymbol{i}+\frac{4\pi^2 r}{T^2}\cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right)\boldsymbol{j}$$

$$\boldsymbol{v}\left(\frac{T}{3}\right)=-\frac{\pi r}{T}\boldsymbol{i}+\frac{\sqrt{3}\,\pi r}{T}\boldsymbol{j}$$

$$\boldsymbol{a}\left(\frac{T}{3}\right)=-\frac{2\pi^2 r}{T^2}(\sqrt{3}\,\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j})$$

(2)

$$\Delta\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}\left(\frac{1}{3}T\right)-\boldsymbol{r}(0)=\frac{\sqrt{3}}{2}r\boldsymbol{i}+\frac{3}{2}r\boldsymbol{j}$$

$$\bar{\boldsymbol{v}}=\frac{\Delta\boldsymbol{r}}{\frac{1}{3}T-0}=\frac{3r}{T}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\boldsymbol{i}+\frac{3}{2}\boldsymbol{j}\right)$$

$$\boldsymbol{v}(0)=\frac{2\pi r}{T}\boldsymbol{i}$$

$$\bar{\boldsymbol{a}}=\frac{\boldsymbol{v}\left(\frac{1}{3}T\right)-\boldsymbol{v}(0)}{\frac{1}{3}T-0}=-\frac{3\pi r}{T^2}(3\boldsymbol{i}-\sqrt{3}\,\boldsymbol{j})$$

1.1.4　一质点从位矢为 $\boldsymbol{r}(0)=4\boldsymbol{j}$ 的位置以初速度 $\boldsymbol{v}(0)=4\boldsymbol{i}$ 开始运动，其加速度与时间的关系为 $\boldsymbol{a}=3t\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}$. 所有的长度以米计，时间以秒计. 求：

(1) 经过多长时间质点到达 x 轴；

(2) 到达 x 轴时的位置.

解

$$\boldsymbol{v}(t)=\int_0^t \boldsymbol{a}(t)\mathrm{d}t+\boldsymbol{v}(0)=\left(4+\frac{3}{2}t^2\right)\boldsymbol{i}-2t\boldsymbol{j}$$

$$\boldsymbol{r}(t)=\boldsymbol{r}(0)+\int_0^t \boldsymbol{v}(t)\mathrm{d}t=\left(4t+\frac{1}{2}t^3\right)\boldsymbol{i}+(4-t^2)\boldsymbol{j}$$

(1) 当 $4-t^2=0$，即 $t=2\mathrm{s}$ 时，到达 x 轴.

(2) $t=2\mathrm{s}$ 到达 x 轴时，位矢为

$$\boldsymbol{r}(2)=12\boldsymbol{i}$$

即质点到达 x 轴时的位置为 $x=12\mathrm{m}$，$y=0$.

1.1.5　质点沿直线从静止开始运动，其加速度与时间的关系如图 1.1 所示，作出速度与时间的关系及位置与时间关系图.

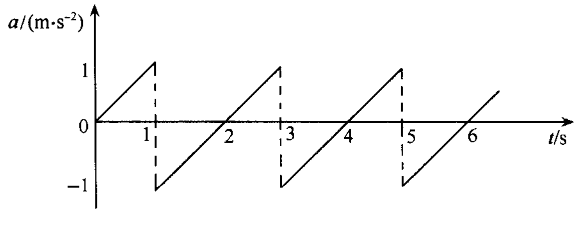

图 1.1

解

$$a(t)=\begin{cases} t & 0\leqslant t<1 \\ -2+t & 1<t<3 \\ -4+t & 3<t<5 \\ -6+t & 5<t<7 \\ \cdots \end{cases}$$

$a(t)$可以是不连续的曲线,$v(t)$、$x(t)$的曲线一定是连续的,由此可定出积分常数.其结果如下:

$$v(t)=\begin{cases} \frac{1}{2}t^2 & 0\leqslant t\leqslant 1 \\ 2-2t+\frac{1}{2}t^2 & 1\leqslant t\leqslant 3 \\ 8-4t+\frac{1}{2}t^2 & 3\leqslant t\leqslant 5 \\ 18-6t+\frac{1}{2}t^2 & 5\leqslant t\leqslant 7 \\ \cdots \end{cases}$$

$$x(t)=\begin{cases} \frac{1}{6}t^3 & 0\leqslant t\leqslant 1 \\ -1+2t-t^2+\frac{1}{6}t^3 & 1\leqslant t\leqslant 3 \\ -10+8t-2t^2+\frac{1}{6}t^3 & 3\leqslant t\leqslant 5 \\ -35+18t-3t^2+\frac{1}{6}t^3 & 5\leqslant t\leqslant 7 \\ \cdots \end{cases}$$

v-t 和 x-t 曲线可由上述 $v(t)$、$x(t)$的表达式逐点画出(略).

1.1.6　一质点以恒定的径向速度分量$\dot{r}=4\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$、横向速度分量与矢径成正比,比例系数为 3rad/s,在一平面内运动.当质点离出发点 4m 时,它的速度及加速度的大小为何值?

解　$\dot{r}=4,r\dot{\varphi}=3r$

取 $t=0$ 时 $r=0$、$\varphi=0$,积得

$$r=4t,\qquad \varphi=3t$$
$$x=r\cos\varphi=4t\cos 3t$$
$$y=r\sin\varphi=4t\sin 3t$$
$$\dot{x}=4\cos 3t-12t\sin 3t$$
$$\dot{y}=4\sin 3t+12t\cos 3t$$
$$\ddot{x}=-24\sin 3t-36t\cos 3t$$
$$\ddot{y}=24\cos 3t-36t\sin 3t$$

当质点离出发点直线距离为 4m 时,

$$x^2+y^2=4^2=16$$

而由 $x(t)$、$y(t)$ 得

$$x^2+y^2=16t^2$$

两式相比得 $t=1\text{s}$.

$$v(1)=\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\Big|_{t=1}=\sqrt{16+144t^2}\,|_{t=1}=4\sqrt{10}\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$$

$$a(1)=\sqrt{\ddot{x}^2+\ddot{y}^2}\Big|_{t=1}=\sqrt{(24)^2+(36t)^2}\,|_{t=1}=12\sqrt{13}\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$$

如 4m 是指沿轨道的距离，则需由

$$s=\int_0^t v(t)\mathrm{d}t=\int_0^t\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\mathrm{d}t\text{ 或}\int_0^t\sqrt{\dot{r}^2+r^2\dot{\varphi}^2}\mathrm{d}t$$

求出 $s(t)$. 再由 $s(t_1)=4$ 求出 t_1，然后再求 $v(t_1)$、$a(t_1)$.

1.1.7 质点的运动学方程为：(1) $\boldsymbol{r}=(4t+5t^2)\boldsymbol{i}-5\boldsymbol{j}$；(2) $\boldsymbol{r}=(2+3t)\boldsymbol{i}-(2t-3t^2)\boldsymbol{j}$. 求两运动的轨迹.

解 (1) $x=4t+5t^2$，$y=-5$

运动轨迹为 $y=-5$

(2) $x=2+3t$，$y=-(2t-3t^2)$

两式消去 t，即得轨迹方程为

$$(x-2)^2-2(x-2)-3y=0.$$

1.1.8 一质点沿直线运动，其速度为 $v=At-Bx$，其中 A、B 均为常数. 当 $t=0$ 时，$x=0$. 试求位置坐标与 t 的函数关系式及 $t=0$ 时的加速度 a_0.

解 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=At-Bx$

先解齐次线性方程 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-Bx$，

$$\frac{\mathrm{d}x}{x}=-B\mathrm{d}t$$

$$x=Ce^{-Bt}$$

用常数变易法解原非齐次线性方程

$$x=C(t)e^{-Bt}$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}t}e^{-Bt}-BCe^{-Bt}$$

$$\frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}t}e^{-Bt}-BCe^{-Bt}=At-BCe^{-Bt}$$

$$\mathrm{d}C=Ate^{Bt}\mathrm{d}t$$

积分得

$$C(t)=\frac{A}{B}\left(t-\frac{1}{B}\right)e^{Bt}+D$$

$$x=\left[\frac{A}{B}\left(t-\frac{1}{B}\right)e^{Bt}+D\right]e^{-Bt}=\frac{A}{B}\left(t-\frac{1}{B}\right)+De^{-Bt}$$

由 $t=0$ 时 $x=0$ 定 D，得 $D=\dfrac{A}{B^2}$.

$$x = \frac{A}{B^2}(e^{-Bt} - 1) + \frac{A}{B}t$$

$$v = -\frac{A}{B}e^{-Bt} + \frac{A}{B}$$

$$a = \frac{dv}{dt} = Ae^{-Bt}$$

$t=0$ 时,$a=a_0=A$.

也可直接从 $v=At-Bx$ 对 t 求导,代入 $t=0$ 时的值得

$$a_0 = \left.\frac{dv}{dt}\right|_{t=0} = A - B\left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=0}$$
$$= A - B(At - Bx)|_{t=0,x=0} = A$$

1.1.9 某固体燃料火箭的垂直加速度为

$$a = ke^{-bt} - cv - g$$

式中 b、c、k 均为常数,v 是获得的垂直速度,g 是重力加速度. 在大气中运行时,g 被视为常量. 试求火箭发射后 t 秒时的垂直速度.

解 先解齐次线性常微分方程

$$\ddot{x} + c\,\dot{x} = 0$$

即
$$\dot{v} + cv = 0$$

得
$$v = Ae^{-ct}$$

用常数变易法解

$$\dot{v} + cv = ke^{-bt} - g$$

$$\dot{v} = \dot{A}\,e^{-ct} - cAe^{-ct}$$

$$\dot{A}\,e^{-ct} - cAe^{-ct} + cAe^{-ct} = ke^{-bt} - g$$

$$dA = [ke^{(c-b)t} - ge^{ct}]dt$$

$$A = \frac{k}{c-b}e^{(c-b)t} - \frac{g}{c}e^{ct} + B$$

$$v = \frac{k}{c-b}e^{-bt} - \frac{g}{c} + Be^{-ct}$$

由 $t=0$ 时 $v=0$ 定出

$$B = \frac{g}{c} - \frac{k}{c-b}$$

$$v = \frac{g}{c}(e^{-ct} - 1) + \frac{k}{c-b}(e^{-bt} - e^{-ct})$$

解此非齐次线性微分方程也可用积分因子法,也可用相应的齐次线性微分方程的通解加非齐次方程的特解的方法,可以直接写出非齐次方程的特解为

$$v = Ae^{-bt} - \frac{g}{c}$$

代入方程定出

$$A = \frac{k}{c-b}$$

1.1.10　图 1.2 中机构包括一根固定的弯成曲线的杆和一根用轴钉可绕 O 点转动的动杆 OC. 弯杆曲线的方程为 $r=20\sin 2\varphi$. 木块 A 和 B 钉在一起, A、B 分别沿弯杆和直杆 OC 滑动. 若 OC 以恒定角速度 5rad/s 做逆时针转动. 求木块 A、B 在 $r=10\text{cm}$ 处时的速度和加速度.

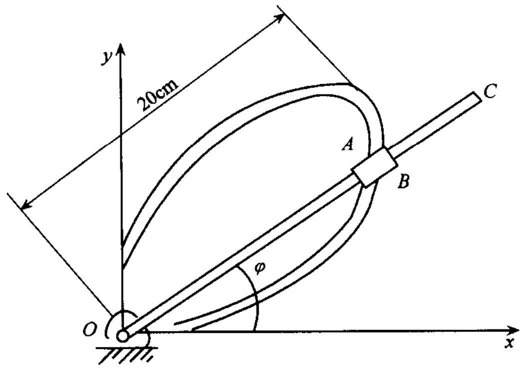

图 1.2

解　轨道方程为

$$r = 20\sin 2\varphi$$

$r=10\text{cm}$ 时, $2\varphi=\arcsin\dfrac{10}{20}=\dfrac{\pi}{6}$ 及 $\dfrac{5\pi}{6}$

$$\dot{\varphi}= 5\text{rad/s},\ddot{\varphi} = 0$$

$$\dot{r}= 40\cos 2\varphi \cdot \dot{\varphi}$$

$$\ddot{r} = - 80\sin 2\varphi\dot{\varphi}^2 + 40\cos 2\varphi\ddot{\varphi} = - 80\sin 2\varphi \cdot \dot{\varphi}^2$$

在 $r=10\text{cm}$、$2\varphi=\dfrac{\pi}{6}$ 处时, 木块 A、B 的速度和加速度分别为

$$\boldsymbol{v} = \dot{r}\,\boldsymbol{e}_r + r\dot{\varphi}\boldsymbol{e}_\varphi$$

$$= 40\cos\frac{\pi}{6} \times 5\boldsymbol{e}_r + 10 \times 5\boldsymbol{e}_\varphi = 100\sqrt{3}\,\boldsymbol{e}_r + 50\boldsymbol{e}_\varphi$$

$$\boldsymbol{a}= (\ddot{r} - r\,\dot{\varphi}^2)\boldsymbol{e}_r + (r\ddot{\varphi} + 2\,\dot{r}\,\dot{\varphi})\boldsymbol{e}_\varphi$$

$$= \left(- 80\sin\frac{\pi}{6} \times 5^2 - 10 \times 5^2\right)\boldsymbol{e}_r + \left(10 \times 0 + 2 \times 40\cos\frac{\pi}{6} \cdot 5 \times 5\right)\boldsymbol{e}_\varphi$$

$$=- 1250\boldsymbol{e}_r + 1000\sqrt{3}\,\boldsymbol{e}_\varphi$$

在 $r=10\text{cm}$、$2\varphi=\dfrac{5\pi}{6}$ 处时, 木块 A、B 的速度、加速度分别为

$$\boldsymbol{v} = 40\cos\frac{5\pi}{6} \times 5\boldsymbol{e}_r + 10 \times 5\boldsymbol{e}_\varphi =- 100\sqrt{3}\,\boldsymbol{e}_r + 50\boldsymbol{e}_\varphi$$

$$\boldsymbol{a}= \left(- 80\sin\frac{5\pi}{6} \times 5^2 - 10 \times 5^2\right)\boldsymbol{e}_r + \left(10 \times 0 + 2 \times 40\cos\frac{5\pi}{6}5 \times 5\right)\boldsymbol{e}_\varphi$$

$$=- 1250\boldsymbol{e}_r - 1000\sqrt{3}\,\boldsymbol{e}_\varphi$$

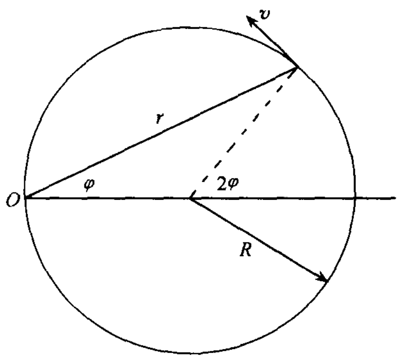

图 1.3

1.1.11　质点以恒定速率 v 沿图示的半径为 R 的圆形轨道运动，用图 1.3 示的极坐标写出质点在 $0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi$ 的各个位置时的速度和加速度.

解　由图 1.3 示的轨道可写出轨道方程为

$$r = 2R|\cos\varphi|$$

即

$$r=\begin{cases}2R\cos\varphi & 0\leqslant\varphi\leqslant\dfrac{\pi}{2}\\ -2R\cos\varphi & \dfrac{\pi}{2}\leqslant\varphi\leqslant\dfrac{3\pi}{2}\\ 2R\cos\varphi & \dfrac{3\pi}{2}\leqslant\varphi\leqslant 2\pi\end{cases}$$

$$\dot r=\begin{cases}-2R\sin\varphi\dot\varphi & 0\leqslant\varphi<\dfrac{\pi}{2}\\ 2R\sin\varphi\dot\varphi & \dfrac{\pi}{2}<\varphi<\dfrac{3\pi}{2}\\ -2R\sin\varphi\dot\varphi & \dfrac{3\pi}{2}<\varphi\leqslant 2\pi\end{cases}$$

由恒定速率 v，可写出

$$\frac{v}{R}=2\dot\varphi \qquad 即 \qquad \dot\varphi=\frac{v}{2R}$$

$$2\ddot\varphi=0, \qquad 故 \qquad \ddot\varphi=0$$

$$\ddot r=\begin{cases}-2R\cos\varphi\dot\varphi^2 & 0\leqslant\varphi<\dfrac{\pi}{2}\\ 2R\cos\varphi\dot\varphi^2 & \dfrac{\pi}{2}<\varphi<\dfrac{3\pi}{2}\\ -2R\cos\varphi\dot\varphi^2 & \dfrac{3\pi}{2}<\varphi\leqslant 2\pi\end{cases}$$

注意：在 $\varphi=\frac{\pi}{2}$ 及 $\varphi=\frac{3\pi}{2}$，$\dot r$、$\ddot r$ 无定义，这里的速度、加速度不能用其极坐标表达式，但这里 $\dot r^2$ 是有定义的，速率仍是连续的. 用自然坐标描述加速度，在这两处，$a_\tau=0$，$a_n=\infty$.

在 $0\leqslant\varphi<\frac{\pi}{2}$，$\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{3\pi}{2}$，$\frac{3\pi}{2}<\varphi\leqslant 2\pi$ 的 $\boldsymbol{v}$、$\boldsymbol{a}$ 的极坐标表达式的计算略.

显然，此题借助于速度、加速度的自然坐标表达式来写它们的极坐标表达式更简便.

1.1.12　一质点沿心脏线 $r=2(1+\cos\varphi)$ 运动，在 $0<\varphi<180°$ 期间，$\dot r=-2$. 求在此期间质点的速度和加速度.

解
$$r=2(1+\cos\varphi), \qquad \dot r=-2, \qquad \ddot r=0$$

$$\dot r=-2\sin\varphi\cdot\dot\varphi=-2, \qquad \dot\varphi=\frac{1}{\sin\varphi}$$

$$\ddot\varphi=-\frac{1}{\sin^2\varphi}\cos\varphi\cdot\dot\varphi=-\frac{\cos\varphi}{\sin^3\varphi}$$

$$v = \dot{r}\, e_r + r\dot{\varphi} e_\varphi = -2e_r + \frac{2(1+\cos\varphi)}{\sin\varphi} e_\varphi$$

$$\begin{aligned} a &= (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)e_r + (r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi})e_\varphi \\ &= \left[0 - 2(1+\cos\varphi)\frac{1}{\sin^2\varphi}\right]e_r \\ &\quad + \left[2(1+\cos\varphi)\left(-\frac{\cos\varphi}{\sin^3\varphi}\right) + 2\cdot(-2)\frac{1}{\sin\varphi}\right]e_\varphi \\ &= -\frac{2}{1-\cos\varphi}e_r - \frac{2(2-\cos\varphi)}{(1-\cos\varphi)\sin\varphi}e_\varphi \end{aligned}$$

1.1.13 对于上题所述的质点运动，求速度平行于 x 轴时的 φ 值及在此位置时的速度、加速度的大小.

解 速度平行于 x 轴时，$\dot{y}=0$，

$$y = r\sin\varphi = 2(1+\cos\varphi)\sin\varphi$$

$$\begin{aligned} \dot{y} &= 2(1+\cos\varphi)\cos\varphi\dot{\varphi} - 2\sin^2\varphi\dot{\varphi} \\ &= 2(2\cos^2\varphi + \cos\varphi - 1)\dot{\varphi} = 0 \end{aligned}$$

因为 $\dot{\varphi} = -2 \neq 0$，$\therefore 2\cos^2\varphi + \cos\varphi - 1 = 0$

得 $\varphi = 60°$ 及 $180°$.

180°不在所述运动范围内，应舍去.

在 $\varphi=60°$，用上题结果得

$$v = -2e_r + \frac{2(1+\cos 60°)}{\sin 60°}e_\varphi = -2e_r + 2\sqrt{3}\,e_\varphi$$

$$v = \sqrt{(-2)^2 + (2\sqrt{3})^2} = 4$$

$$a = -\frac{2}{1-\cos 60°}e_r - \frac{2(2-\cos 60°)}{(1-\cos 60°)\sin 60°}e_\varphi = -4e_r - 4\sqrt{3}\,e_\varphi$$

$$a = \sqrt{(-4)^2 + (-4\sqrt{3})^2} = 8$$

1.1.14 离水面高度为 h 的岸上用绳索拉船靠岸，人以恒定的速率 v_0 拉绳，将船的速度、加速度表示成船离岸的水平距离 L 的函数.

解 方法一：直线运动即已知轨道，又知道速度的一些信息的解法.

$$r^2 = h^2 + L^2$$

$$2r\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = 2L\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t}$$

今知 $\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = -v_0$，所以

$$v = -\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} = -\frac{r}{L}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = \frac{\sqrt{h^2+L^2}}{L}v_0 \qquad \text{（向左为正）}$$

$$\begin{aligned} a &= \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -\frac{\sqrt{h^2+L^2}}{L^2}v_0\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} + \frac{v_0}{L}\frac{2L}{2\sqrt{h^2+L^2}}\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} \\ &= -\frac{h^2}{L^2\sqrt{h^2+L^2}}v_0\left(-\frac{\sqrt{h^2+L^2}}{L}v_0\right) = \frac{h^2 v_0^2}{L^3} \end{aligned}$$

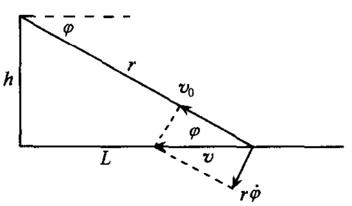

图 1.4

方法二：作为平面运动，已知轨道和速度的一个分量的解法.

由图 1.4 可知，$r\dot{\varphi}=v_0\tan\varphi$，已知$\dot{r}=-v_0$，所以

$$v=\sqrt{\dot{r}^2+(r\dot{\varphi})^2}=v_0\sec\varphi=\frac{\sqrt{h^2+L^2}}{L}v_0$$

$$\ddot{r}=0$$

$$\dot{\varphi}=\frac{v_0}{r}\tan\varphi$$

$$\ddot{\varphi}=-\frac{v_0}{r^2}\dot{r}\tan\varphi+\frac{v_0}{r}\sec^2\varphi\cdot\dot{\varphi}$$

代入$\dot{\varphi}$，经计算可得

$$\ddot{\varphi}=\frac{v_0^2}{r^2}\tan\varphi(2+\tan^2\varphi)$$

$$a=\sqrt{(\ddot{r}-r\dot{\varphi}^2)^2+(r\ddot{\varphi}+2\dot{r}\dot{\varphi})^2}$$

代入$\ddot{r}$、$\dot{\varphi}$、$\dot{r}$、$r=\sqrt{h^2+L^2}$，$\tan\varphi=\dfrac{h}{L}$，可得

$$a=\frac{v_0^2h^2}{L^3}$$

1.1.15　杆以匀角速 ω_0 绕过其固定端 O 且垂直于杆的轴转动，在 $t=0$ 时，位于 O 点的小珠从相对于杆静止开始沿杆做相对于杆的加速度为 a_0 的匀加速运动. 求小珠相对于静系的速度、加速度与时间的关系.

解

$$r=\frac{1}{2}a_0t^2,\quad \dot{\varphi}=\omega_0$$

$$\dot{r}=a_0t,\qquad \ddot{r}=a_0,\qquad \ddot{\varphi}=0$$

$$\boldsymbol{v}=\dot{r}\,\boldsymbol{e}_r+r\,\dot{\varphi}\,\boldsymbol{e}_\varphi=a_0t\boldsymbol{e}_r+\frac{1}{2}a_0\omega_0t^2\boldsymbol{e}_\varphi$$

$$\boldsymbol{a}=(\ddot{r}-r\,\dot{\varphi}^2)\boldsymbol{e}_r+(r\ddot{\varphi}+2\,\dot{r}\,\dot{\varphi})\boldsymbol{e}_\varphi$$

$$=\left(a_0-\frac{1}{2}a_0\omega_0^2t^2\right)\boldsymbol{e}_r+2a_0\omega_0t\boldsymbol{e}_\varphi$$

1.1.16　在同一竖直面内的同一水平线上的 A、B 两点分别以 30°、60°为发射角同时抛出两小球，欲使两小球相遇时都在自己轨道的最高点，已知在 A 点发射的小球发射速率 $v_{AO}=9.8\text{m/s}$，求 A、B 两点之间的距离 L.

解　$v_{AO}\sin30°-gt=0$

$v_{BO}\sin60°-gt=0$

其中 t 为相遇时间，$v_{AO}=9.8\text{m/s}$，$g=9.8\text{m/s}^2$

$$L=(v_{AO}\cos30°-v_{BO}\cos60°)t$$

解出

$$v_{BO}=\frac{v_{AO}\sin30°}{\sin60°}=5.7\text{m/s}$$

$$t=\frac{v_{AO}\sin30°}{g}=0.5\text{s}$$