

21 世纪高职基础课系列教材

$$\sin x = \frac{2u}{1+u^2}, \quad \cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2}, \quad u = \tan \frac{x}{2}, \quad dx = \frac{2du}{1+u^2}$$

主 编 李德才 张文军 骆汝九

主 审 徐汝琦

高等数学

下 册

$$\text{双曲正弦 } \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\text{双曲余弦 } \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\text{双曲正切 } \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

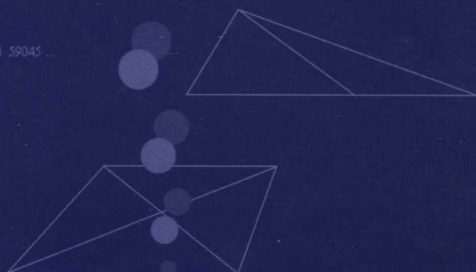
$$\operatorname{arsh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$$

$$\operatorname{arch} x = \pm \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$$

$$\operatorname{arth} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{x})^x = e = 2.7182818284 \dots 59045 \dots$$



中国大地出版社

21 世纪高职基础课系列教材

高等数学

(下册)

主 编	李德才	张文军	骆汝九		
副主编	张信昌	杨 毅	杨天明	马 敏	
	胡海员	袁建华	纪 峰		
主 审	徐汝琦				

中国大地出版社

• 北 京 •

《高等数学》编写委员会组成单位

南京交通职业技术学院
扬州环境资源职业技术学院
江苏畜牧兽医职业技术学院
江苏信息职业技术学院
南通农业职业技术学院
江西信息应用职业技术学院
蓝天职业技术学院

南京铁道职业技术学院
连云港职业技术学院
江苏食品职业技术学院
扬州工业职业技术学院
江苏农林职业技术学院
浙江东方职业技术学院
西安思源职业学院

主 编 李德才 张文军 骆洛九

副主编 张信昌 杨 毅 杨天明 马 敏
胡海员 袁建华 纪 峰

主 审 徐汝琦

编 委 (按姓氏笔画为序)

万绍汤	马 敏	安 震	纪 峰
李德才	毕朝晖	张文军	张信昌
杨天明	杨 毅	胡海员	骆汝九
袁建华	徐雪平	黄开兴	黄志祥
梁其中	蒋永峰	葛传斌	

前 言

高等数学是高等职业技术教育的必修课。随着经济、社会和科学技术的高速发展,数学的内容、思想、方法以及语言在科学技术、经济建设以及生活实践中得到广泛的应用,并成为现代文化的重要组成部分。我们根据教育部有关文件精神,以“结合实际,深化概念,加强计算,注重应用”为宗旨,“以应用为目的,以必需够用为度,适当提高”为原则,编写了本教材。

根据培养目标和课程大纲,在编写时,我们尽力做到深入浅出,通俗易懂,并兼顾不同行业的需要,用较多的实例引入问题,以反映数学的应用,培养学生运用数学知识解决实际问题的能力。

为了体现以学生为主体,根据不同对象与要求,将基本要求与拓宽知识相结合的精神,本教材采用分层制。A层是根据教学的基本要求,按照“必需够用为度”而编写,为高职高专学生必须掌握的内容;B层是适应部分学生“专升本”、“专转本”,继续深造的需要,其内容略有加深。

特别提示:本教材B层的内容是用小五号字编排的。

鉴于计算机的广泛应用和数学软件的日臻完善,为了促进教学手段的改革与创新,提高学生使用计算机解决数学问题的意识和能力,同时,为激发学生学习数学的兴趣,并强化应用,我们在本书上、下册的附录中分别编写了“高等数学实验指导”,供师生们选择使用。

本教材系高职高专教材,也可作为“专升本”及学历文凭考试的教材或参考书。

限于编者的水平,加之时间仓促,书中难免有缺点和不当之处,敬请专家、同仁以及广大读者批评指正。

编 者

目 录

第一章 函数 极限 连续	1
§ 1 函数	1
1.1 常量与变量	1
1.2 函数	2
1.3 初等函数	8
习题 1-1	11
§ 2 极限的概念	13
2.1 数列的极限	14
2.2 函数的极限	15
2.3 无穷小量与无穷大量	18
习题 1-2	21
§ 3 极限的运算法则	23
习题 1-3	28
§ 4 两个重要极限	30
习题 1-4	36
§ 5 函数的连续性	37
5.1 连续的概念	37
5.2 闭区间上连续函数的性质	42
习题 1-5	44
本章要点	45
复习题一	47
第二章 导数与微分	53
§ 1 导数的概念	53
1.1 导数的概念	53

1.2 导数的几何意义	56
1.3 可导与连续的关系	56
1.4 求导举例	58
习题 2-1	60
§ 2 求导法则	60
2.1 函数的和、差、积、商的求导法则	61
2.2 反函数求导法则	64
2.3 复合函数求导法则	65
2.4 基本导数公式和求导法则	68
习题 2-2	69
§ 3 高阶导数	70
3.1 高阶导数的概念	70
习题 2-3	73
§ 4 隐函数的导数	74
4.1 隐函数的导数	74
4.2 对数求导法	76
习题 2-4	76
§ 5 函数的微分	77
5.1 微分的概念	77
5.2 微分的几何意义	80
5.3 微分公式与微分的运算法则	80
习题 2-5	85
本章要点	87
复习题二	89
第三章 导数的应用	94
§ 1 中值定理	94
1.1 罗尔定理	94
1.2 拉格朗日中值定理	95
1.3 柯西中值定理	97

习题 3-1	97
§ 2 洛必达法则	98
习题 3-2	103
§ 3 函数的极值与最值	104
3.1 函数的单调性	104
3.2 函数的极值	108
3.3 函数的最值	111
习题 3-3	114
§ 4 曲线的凹凸性和拐点及函数图形的描绘	116
4.1 曲线的凹凸性和拐点	116
4.2 函数图形的描绘	119
习题 3-4	122
§ 5 导数在经济中的应用	123
5.1 边际函数	123
5.2 函数的弹性	126
习题 3-5	127
本章要点	128
复习题三	130
第四章 不定积分	135
§ 1 不定积分	135
1.1 原函数与不定积分的概念	135
1.2 不定积分的几何意义和物理意义	137
1.3 基本积分公式	139
1.4 不定积分的性质	140
习题 4-1	143
§ 2 换元积分法	144
2.1 第一类换元积分法	145
2.2 第二类换元积分法	150
习题 4-2	154

§ 3 分部积分法	157
习题 4-3	162
§ 4 简单有理函数的不定积分	163
4.1 几个简单的例子	163
4.2 有理函数的积分	165
习题 4-4	169
§ 5 积分表的使用	170
5.1 在积分表中能直接查到的积分	170
5.2 需要先进行恒等变形或变量代换再查积分表的	171
5.3 用递推公式的积分	172
习题 4-5	173
本章要点	174
复习题四	176
第五章 定积分及其应用	179
§ 1 定积分的概念	179
1.1 实例分析	179
1.2 定积分的概念	182
1.3 定积分的几何意义	183
习题 5-1	185
§ 2 定积分的性质	186
习题 5-2	189
§ 3 微积分基本公式	190
3.1 积分上限函数及其导数	190
3.2 微积分基本公式	194
习题 5-3	196
§ 4 定积分的计算	197
4.1 定积分的换元积分法	198
4.2 定积分的分部积分法	203
习题 5-4(1)	206

习题 5-4(2)	208
§ 5 广义积分	208
5.1 无限区间上的广义积分	209
5.2 无界函数的广义积分(瑕积分)	211
习题 5-5	213
§ 6 定积分的微元法	214
§ 7 定积分在几何上的应用	216
7.1 平面图形的面积	216
7.2 立体的体积	222
7.3 平面曲线的弧长	225
习题 5-7	227
§ 8 定积分在物理上的应用	228
8.1 功	228
8.2 液体的压力	229
8.3 平均值	229
8.4 静力矩与质心	231
8.5 转动惯量	233
习题 5-8	233
本章要点	234
复习题五	236
附录 1 积分表	241
附录 2 高等数学实验指导(上)	252
附录 3 习题与复习题参考答案	262
第六章 常微分方程	289
§ 1 微分方程的概念	289
习题 6-1	292
§ 2 一阶微分方程	293
2.1 可分离变量的微分方程	293

2.2 一阶线性微分方程	297
习题 6-2	304
§ 3 可降阶的二阶微分方程	305
习题 6-3	308
§ 4 二阶线性微分方程解的结构	309
习题 6-4	312
§ 5 二阶常系数线性齐次微分方程	313
习题 6-5	316
§ 6 二阶常系数线性非齐次微分方程	317
6.1 $f(x) = P_n(x)$ ($P_n(x)$ 是 n 次多项式) 的情形	318
6.2 $f(x) = P_n(x)e^{\lambda x}$ ($P_n(x)$ 是 n 次多项式, λ 是常数) 的情形	319
6.3 $f(x) = a\cos \omega x + b\sin \omega x$ (a, b, ω 是常数) 的情形	322
习题 6-6	325
§ 7 微分方程的简单应用	326
习题 6-7	330
本章要点	330
复习题六	332
第七章 向量代数与空间解析几何	334
§ 1 空间直角坐标系	334
1.1 空间直角坐标系	334
1.2 空间两点间的距离	336
习题 7-1	338
§ 2 向量及其线性运算	338
2.1 向量的概念	338
2.2 向量的线性运算	340
2.3 向量的坐标表示法	343
习题 7-2	350

§ 3 向量的数量积与向量积	351
3.1 向量的数量积	351
3.2 向量的向量积	354
习题 7-3	357
§ 4 平面与空间直线	358
4.1 平面	358
4.2 空间直线	364
习题 7-4	370
§ 5 曲面与空间曲线	372
5.1 曲面与方程的概念	372
5.2 几种常见的曲面	373
5.3 二次曲面	378
5.4 空间曲线	382
习题 7-5	385
本章要点	388
复习题七	390
第八章 多元函数微分学	393
§ 1 多元函数	393
1.1 平面点集和区域	393
1.2 多元函数的定义	396
1.3 二元函数的几何表示	397
1.4 二元函数的极限	398
1.5 二元函数连续的概念	399
1.6 有界闭区域上的二元连续函数的性质	400
习题 8-1	401
§ 2 偏导数	402
2.1 多元函数的偏导数	402
2.2 高阶偏导数	405
习题 8-2	407

§ 3 全微分	408
3.1 全微分	408
3.2 全微分在近似计算中的应用	410
习题 8-3	411
§ 4 多元复合函数与隐函数的微分法	412
4.1 多元复合函数的求导法则	412
4.2 隐函数的求导法	415
习题 8-4	416
§ 5 偏导数的几何应用	417
5.1 空间曲线的切线和法平面	417
5.2 曲面的切平面和法线	419
习题 8-5	421
§ 6 多元函数的极值和最值	421
6.1 多元函数的极值	422
6.2 多元函数的最值	424
6.3 条件极值、拉格朗日乘数法	426
习题 8-6	428
本章要点	429
复习题八	433
第九章 二重积分	435
§ 1 二重积分的概念与性质	435
1.1 二重积分的概念	435
1.2 二重积分的几何意义	438
1.3 二重积分的性质	438
习题 9-1	440
§ 2 二重积分的计算法	441
2.1 二重积分在直角坐标系下的计算法	441
2.2 二重积分在极坐标系下的计算法	449
习题 9-2	453

§ 3 二重积分的应用	455
3.1 二重积分在几何上的应用	455
3.2 二重积分在物理上的应用	459
习题 9-3	463
本章要点	464
复习题九	467
第十章 无穷级数	472
§ 1 常数项级数的基本概念及性质	472
1.1 常数项级数的基本概念	472
1.2 级数的基本性质	476
1.3 级数收敛的必要条件	479
习题 10-1	479
§ 2 常数项级数的审敛法	481
2.1 正项级数	481
2.2 交错级数	486
2.3 绝对收敛与条件收敛	489
习题 10-2	492
§ 3 幂级数	493
3.1 幂级数及其收敛性	495
3.2 幂级数的性质	499
3.3 函数展开成幂级数	501
3.4 函数的幂级数展开式在近似计算中的应用	506
习题 10-3	508
§ 4 傅里叶级数	509
4.1 三角级数	509
4.2 傅里叶级数	510
4.3 奇函数和偶函数的傅里叶级数	515
习题 10-4	517
本章要点	518

复习题十.....	519
附录 1 高等数学实验指导(下)	523
附录 2 习题与复习题参考答案	535

第六章

常微分方程

在不定积分中,如果已知函数的导数,就有可能求出这个函数.现在进一步讨论,如果只知道函数的导数或微分所满足的方程,怎样确定这个函数?这就是微分方程以及解微分方程问题.

§ 1 微分方程的概念

我们先通过两个实际例子来介绍微分方程的一些基本概念.

例 1 设质量为 m 的质点在力 F 的作用下做直线运动,求质点的运动规律 $s(t)$.

解 根据牛顿第二定律,质点的运动规律满足方程

$$m \frac{d^2 s}{dt^2} = F \quad (6.1)$$

常见的作用力 F 有以下几种情况:

(1) 在重力作用下质点做自由落体运动. 重力 $F = mg$ 代入 (6.1) 可得

$$\frac{d^2 s}{dt^2} = g \quad (6.2)$$

(2) 质点受到与运动方向相反的阻力. 假设阻力的大小与速度成正比,即 $F = -kv = -k \frac{ds}{dt}$, (6.1) 式即为

$$m \frac{d^2 s}{dt^2} = -k \frac{ds}{dt} \quad (6.3)$$

(3) 质点受弹性恢复力的作用. 假设弹性恢复力的大小与位移成正比,其方向与位移相反,即 $F = -ks$, (6.1) 式即为

$$m \frac{d^2 s}{dt^2} = -ks \quad (6.4)$$

(6.2), (6.3), (6.4) 式均为 $s(t)$ 的导数所满足的关系式, 是典型的微分方程.

例 2 已知一曲线经过点 $(1, 1)$, 且在曲线上任意一点 $M(x, y)$ 处的切线斜率等于 $3x^2$, 求该曲线的方程.

解 设所求曲线的方程为 $y = f(x)$, 根据题意, 有

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 \quad (6.5)$$

(6.5) 式是函数 $y = f(x)$ 的导数所满足的关系式, 也是微分方程.

在研究某些实际问题时, 我们根据问题的几何或物理意义得到含有未知函数的导数或微分所满足的方程.

现给出常微分方程的概念.

定义 含有未知函数的导数(或微分)的方程, 称为微分方程.

未知函数是一元函数的微分方程称为常微分方程, 简称为微分方程. 如

$$y' = \frac{y}{x} - \sin x,$$

$$(x^2 + 2y)dx + (2x - e^y)dy = 0.$$

未知函数是多元函数的微分方程称为偏微分方程.

本章只讨论常微分方程.

常微分方程中出现的未知函数导数的最高阶数称为常微分方程的阶.

例如(6.5)是一阶微分方程, (6.2)、(6.3)、(6.4) 都是二阶微分方程. 二阶和二阶以上阶微分方程称为高阶微分方程.

未知函数及其各阶导数都是一次且两两不相乘的微分方程, 称为线性微分方程. 如

$$\begin{aligned} y' + y \sin x &= e^x, \\ y^{(5)} + xy'' - y' \ln x &= x^2 y, \end{aligned}$$

而 $y' - \sin y = 0$ 不是线性微分方程.

如果将某一函数代入微分方程中,能使等式成立,则称此函数为微分方程的解.

例 3 解例 2 中的微分方程 $\frac{dy}{dx} = 3x^2, y(1) = 1$.

解 方程变形为

$$dy = 3x^2 dx,$$

两端求不定积分,得

$$y = x^3 + C,$$

因为曲线过点 $(1, 1)$, 故

$$1 = 1^3 + C, C = 0,$$

从而,所求曲线的方程为

$$y = x^3.$$

从这个问题可以看到,常微分方程的解有一般形式的解和满足某一特定条件的解两种.

若微分方程的解中含有任意常数,且独立的任意常数个数与该方程的阶数相同,那么称此解为微分方程的通解;若解中任意常数已确定,那么称此解为微分方程的特解.

用于确定通解中任意常数的附加条件,称为微分方程的初始条件,初始条件的个数与微分方程的阶数相同.

带有初始条件的微分方程,称为微分方程的初值问题.

微分方程的每一个特解在几何上表示一条平面曲线,称为微分方程的积分曲线;微分方程的通解在几何上表示一族曲线,称为微分方程的积分曲线族.

例 4 验证函数 $y = C_1 \sin 2t + C_2 \cos 2t$ 是微分方程

$$y'' + 4y = 0$$

的通解,并求出满足初始条件 $y|_{t=0} = 1$ 和 $y'|_{t=0} = -1$ 的特解.

解 因为

$$y = C_1 \sin 2t + C_2 \cos 2t,$$