数学课程与教学研究丛书

微分几何

WEIFEN JIHE

应裕林/编著

WF JH

四川大学出版社

微分几何

WEIFEN JIHE

应裕林 / 编著

四川大学出版社

责任编辑:李川娜
责任校对:王　锋
封面设计:罗　光
责任印制:杨丽贤

图书在版编目(CIP)数据

微分几何 / 应裕林编著. —成都: 四川大学出版社, 2005.4
(大学数学课程与教学研究丛书 / 赵焕光,林长胜主编)
ISBN 7-5614-3007-8

Ⅰ.微... Ⅱ.应... Ⅲ.微分几何-教学研究-高等学校 Ⅳ.O186.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2005) 第 026222 号

书　名　**微分几何**

编　著	应裕林
出　版	四川大学出版社
地　址	成都市一环路南一段 24 号 (610065)
发　行	四川大学出版社
印　刷	华西医科大学印刷厂
成品尺寸	140 mm×202 mm
印　张	5.375
字　数	130 千字
版　次	2005 年 4 月第 1 版
印　次	2006 年 1 月第 2 次印刷
印　数	1 001~3 000 册
定　价	17.00 元

◆读者邮购本书,请与本社发行科联系。电 话:85408408/85401670/85408023　邮政编码:610065
◆本社图书如有印装质量问题,请寄回出版社调换。
◆网址:www.scupress.com.cn

内 容 提 要

本书分曲线论和曲面论两章，讲述三维欧氏空间中的经典微分几何的局部理论，主要内容包括：空间曲线的曲率和挠率，空间曲线论的基本公式和基本定理；空间曲面的第一、第二基本形式，法曲率和渐近线，测地曲率和测地线，曲面论的基本公式和基本定理.

本书可作为高等师范院校微分几何课程的学习参考书，也可作为高等教育自学考试的自学指导书.

序　言

微分几何是以微积分为工具，研究曲线和曲面的性质及其推广的几何分支. 对曲线和曲面的知识探索是研究物理问题的理论基础，这是因为物体运动经过的路径都是曲线，而物体表面则是由曲面构成的三维图形. 经典微分几何是研究曲线和曲面逐点变化的那些性质的，因此只有运用微积分的技巧才能掌握. 微分几何在很大程度上是微积分本身问题的自然产物. 数学分析中对曲线的切线、法线、拐点和曲率的研究实际上就是平面曲线的微分几何. "微分几何"这个术语是 Luigi Bianchi (1856—1894) 在 1894 年第一次使用的，显然，它是随着解析几何及微分几何的创立而产生的.

现代微分几何广泛地引用数学的各种知识为工具. 可以这么说，微分几何是基础数学里面应用性、综合性的分支. 其基本工具是微积分、代数学、拓扑学、微分方程，基本研究对象为曲线、曲面等抽象空间.

本书主要介绍经典微分几何的一些基本概念、方法和性质，全书分为曲线论和曲面论两章. 学习本课程需要微积分、解析几何和高等代数的基础知识. 另外，为了方便学生学习，在附录 1 中介绍了一些平面曲线的整体性质，在附录 2 中提供了少量的预备知识，在附录 3 中给出了大部分习题的参考答案或提示.

第 1 章以弧长、曲率和挠率的计算及应用为中心，主要内容有：正则曲线，奇异点；弧长的计算，曲线的切线和法平面方程；曲线的主法线、副法线、密切平面和从切平面的方程；曲线的曲率和挠率公式以及性质；曲线在一点邻近的形状；Frenet 公式及其应

用，空间曲线论基本定理，平面曲线的弧长、切线、法线、曲率、Frenet 公式和平面曲线论基本定理.

第 2 章以曲面的第一、第二基本形式为中心，主要内容有：正则曲面，坐标网；曲面上曲线的弧长，第一基本形式和内蕴性质；曲面的第二基本形式及其基本性质，法曲率，主曲率；曲面上曲线的测地曲率，可展曲面，曲面论的基本公式和基本定理.

本书原是我们在教学过程中为学生准备的教学辅导材料，经整理、补充而成. 我们在编写时尽量做到所涉及的范围尽可能小，仅保留微分几何最基本的知识和只使用最基础的数学知识. 我们的主要目的是以帮助学生了解微分几何基本知识和基本研究任务，提高学生分析问题和解决问题的能力为宗旨，鼓励学生充分利用已有的知识解决问题，为以后的学习、工作打下良好的基础.

应裕林

2004 年 10 月

目　录

第1章 曲线论

问题是科学的生命.切线和弧长的研究主要源自运动学,物体在运动中的速度方向、经过的路程是最直接的问题.运动物体在它的轨迹上任一点处的运动方向,是轨迹在该点的切线方向.实际上,即使"切线"本身的意义也是一个没有解决的问题.对于圆锥曲线把切线定义为和曲线只接触于一点而且位于曲线的一边的直线就足够了,这个定义古希腊人曾经用过.但是对于17世纪所用的较复杂的曲线它就不适用了.另外,光学和声音的研究,特别是对透镜表面的研究,也要求了解切线的知识.要研究光线通过透镜的通道,必须知道光线射入透镜的角度以便应用反射定律,重要的角是光线同曲面法线间的夹角,而法线是垂直于切线的.所以问题在于求出法线或者是求出切线.弧长和切线问题的进一步讨论也推动了分析学研究的许多分支的发展.令人注意的地方还有:切向量是局部的概念,弧长是整体的概念,弧长公式沟通了两者.此外,切线的几何性质也非常直观,如切线是与曲线"距离"最近的直线、平面曲线与其切线之间不能"插入"其他射线.对空间曲线的进一步研究便自然地要考虑离曲线最近的平面即密切平面,密切平面是曲线上三点决定的平面的极限位置,关于密切平面的知识也是相当丰富多彩的.而曲线离开切线和密切平面的速率就导出了曲率和挠率.曲率和挠率为单位切向量和副法向量关于弧长的变化率,它们还可以看成是切向量和副法向量的球面像的长度关于弧长的导数.

1731年,年仅18岁的法国数学家 Alexis Claude Clairaut 创立了空间曲线论,Clairaut 把空间曲线叫做"双曲率曲线",并考虑

了空间曲线在两个垂直平面上的投影. 在几何上，他把一条空间曲线看成两个曲面的交线；在分析上，他把每个曲面方程表示为一个三变量方程. Clairaut 的空间曲线有两个曲率，其中一个已被Euler标准化，即

$$R=\frac{\mathrm{d}s^2}{\sqrt{(\mathrm{d}^2x)^2+(\mathrm{d}^2y)^2+(\mathrm{d}^2z)^2}}\left[=\frac{1}{\sqrt{\ddot{x}^2+\ddot{y}^2+\ddot{z}^2}}\right]$$

Euler 是微分几何的奠基人之一，他将曲率定义为切线方向对弧长的变化率. 另一个曲率，现在称为"挠率"，几何上表示一条曲线离开密切平面的速率，是由 Michel Ange Lancret（1774—1807）用分析的方法求出它的显式表示的. Lancret 是 Monge 的学生，而且按 Monge 的思想进行研究工作. 他在曲线的任一点处选出了三个主方向，把曲率和挠率作为切向量和副法向量的变化率. 尽管当时的数学家在微分几何上取得了许多漂亮的成果，但形式上与我们现在所使用的理论相去甚远. 现代几何理论基本上是 Cauchy 整理的，他在《无穷小计算在几何上的应用教程》中改进了对某些概念的陈述，而且澄清了空间曲线理论中的许多问题，给出了著名的 Serret-Frenet 公式中的第一和第三式. 曲率和挠率的意义在于它们是空间曲线的两个根本性质，也就是说，曲率和挠率完全决定了空间曲线的一切. Frenet 公式的重要性无需多言，它是微分几何空间曲线理论的基石.

平面曲线的研究是微分几何的第一步，有着比空间曲线更丰富的内容. 在微分几何的历史上，最早研究的问题是平面曲线的渐伸线. Christian Huygens 对光线研究和摆钟设计的兴趣推动了他在这方面的工作. 首先，他引进了平面曲线的渐伸线，他知道曲线的切线族的每一条正交轨线都是曲线的渐伸线，并证明了各条渐伸线不可能接触；其次，讨论了渐屈线. 他把曲率中心看作是临近法线交点的极限位置，计算出曲率半径，证明了摆线的渐屈线还是摆线，以及摆线的等时性，引进了后来用微积分方法来处理的几个

概念. 他用的是纯几何方法. 但如今我们把 Frenet 公式限制在平面上进行讨论,使用相对曲率会更加方便,学习这一部分内容时须了解曲率与相对曲率的区别. 学习一般螺线的重点在于掌握好三个等价定义.

本章主要以微积分为基础,以研究空间曲线的弧长、切线、曲率和挠率为中心,以 Frenet 公式为主要定理,讨论曲线 Frenet 标架的主要方法. 本章讨论的形式大多为以下三种:

(1)已知曲线的类型或方程,讨论曲线所具有的几何性质;

(2)已知曲线的某些几何性质,求曲线的方程或类型;

(3)已知曲线的某些性质,求证它的另一些性质.

关键概念:弧长、Frenet 标架、曲率、挠率.

本章要求:

(1)掌握如何计算曲线段的弧长;

(2)掌握如何求曲线在一点处的基本三棱形、曲率和挠率;

(3)熟悉参数与基本三棱形、曲率和挠率的关系;

(4)熟悉空间曲线的基本公式——Frenet 公式;

(5)掌握 Frenet 公式的简单应用;

(6)了解空间曲线论基本定理;

(7)熟悉平面曲线,特别是渐屈线和渐伸线的方程;

(8)了解一般螺线的基本性质.

1.1 切线和弧长

1.1.1 学习要求

通过本节的学习应掌握以下几点:

(1)正则曲线是如何定义的;

(2)曲线的切线是如何定义的,其方程是怎样的;

(3)曲线的弧长是如何定义的,掌握其计算方法;

(4)弧长参数的特点.

1.1.2 主要概念

1.1.2.1 曲线的概念

由于空间曲线论研究的基本对象是曲线,故曲线的概念是本章最基本的概念,基于体系的不同,各教材对曲线的定义也有细微差别,一般从三个不同角度描述.比较直观的是用矢量函数来描述曲线,也有用开线段的同胚像定义曲线,还有采用等价类的方法来定义曲线.在运动学中,曲线被认为是质点运动的轨迹,时间是描述运动的参数.根据解析几何的方法,曲线上的动点 $P(x,y,z)$ 的三个坐标可以表示为参数 t 的函数,即

$$\begin{cases} x=x(t), \\ y=y(t), \\ z=z(t). \end{cases}$$

若考虑矢径$\overrightarrow{OP}$的表达式,则有以下定义:

定义(参数曲线) 给定矢量函数

$$\vec{r}(t)=\{x(t),y(t),z(t)\} \quad (t_1\leqslant t\leqslant t_2). \qquad (1.1.1)$$

若把 $\vec{r}(t)$看成空间一点 $P(t)$的径矢,则当 t 变动时,$P(t)$的轨迹称为参数曲线,矢量函数(1.1.1)称为曲线的参数表示,t 称为点 $P(t)$的参数坐标.

显然,一条曲线可以有多种参数表示.

C^k 曲线:曲线的参数表示为 C^k 函数.

光滑曲线:C^1 曲线(有些教材定义成 C^∞ 曲线).

正则点:在参数 t_0 处有 $\vec{r}\,'(t_0)\neq\vec{0}$.

奇点:在参数 t_0 处有 $\vec{r}\,'(t_0)=\vec{0}$.

正则表示：曲线的参数表示中无奇点.

正则曲线：曲线存在一种正则表示.

简单曲线：曲线的参数表示为一一对应.

注 多数曲线可以分段使之为简单、光滑、正则的，在本书中的曲线若不加特殊说明都指正则曲线.

1.1.2.2 切线及法平面(见图 1.1.1)

切线：记曲线上的点 P 和邻近点 Q 的所连直线为 l，当 $Q\to P$ 时，直线 l 的极限位置称为曲线在 P 点处的切线，点 P 称为切点，直线 l 的方向称为切方向.

法平面：经过切点与切线垂直的平面.

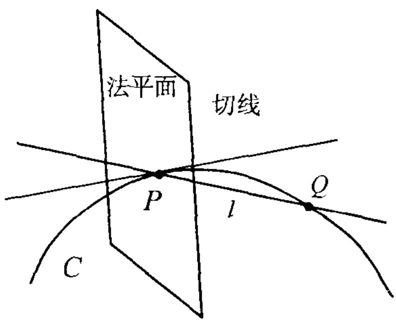

图 1.1.1

1.1.2.3 弧长

弧长：设 $C:\vec{r}=r(t)$，$(a\leqslant t\leqslant b)$ 为 C^1 曲线，任取区间 $[a,b]$ 的分划 χ 为 $\{a=t_1<t_2<\cdots<t_n<t_{n+1}=b\}$，相应的有 $P(t_i)=P_i$，记

$$d(\chi)=\sup\{|t_{i+1}-t_i|,i=1,2,\cdots,n\},$$

$$L(\chi)=\sum_{i=1}^{n}|P_iP_{i+1}|, \qquad (1.1.2)$$

则存在 L 使得对任何 $\varepsilon>0$ 有 $\delta>0$；当 $d(\chi)<\delta$ 时，有

$$|L(\chi)-L|<\varepsilon,$$

L 便称为曲线 C 的弧长.

自然参数:在曲线上任取一点 P_0,规定曲线的一个正向,沿此方向的每一点的参数为从 P_0 到该点的弧长,沿相反方向的每一点的参数为从 P_0 到该点的弧长的相反数,曲线以此方法定义的参数称为曲线的自然参数,也叫做弧长参数.

在曲线上建立自然参数相当于把曲线视为弯曲的数轴,它同样地具有原点、单位和方向三个要素.

1.1.3 主要结论

由于直 PQ 线的方程为

$$[\vec{r}-\vec{r}(t_0)]\times[\vec{r}(t_0+\Delta t)-\vec{r}(t_0)]=\vec{0},$$

利用 Taylor 公式得

$$[\vec{r}-\vec{r}(t_0)]\times\{\vec{r}'(t_0)+\frac{\Delta t}{2!}[\vec{r}''(t_0)+\vec{\varepsilon}(t_0,\Delta t)]\}=\vec{0}.$$

令 $\Delta t\to 0$ 得切线方程

$$[\vec{r}-\vec{r}(t_0)]\times\vec{r}'(t_0)=\vec{0}. \tag{1.1.3}$$

结论 1 切向量:曲线 $\vec{r}(t)=\{x(t),y(t),z(t)\}$ 在点 $t=t_0$ 处的切方向为 $\vec{r}'(t_0)$,也称 $\vec{r}'(t_0)$ 为该点的切向量.

结论 2 曲线 $\vec{r}(t)=\{x(t),y(t),z(t)\}$ 在点 $t=t_0$ 处的切线方程为

$$\vec{r}=\vec{r}(t_0)+v\vec{r}'(t_0), \tag{1.1.4}$$

$$\frac{x-x(t_0)}{x'(t_0)}=\frac{y-y(t_0)}{y'(t_0)}=\frac{z-z(t_0)}{z'(t_0)}. \tag{1.1.5}$$

结论 3 曲线 $\vec{r}(t)=\{x(t),y(t),z(t)\}$ 在点 $t=t_0$ 处的法平面方程为

$$[\vec{r}-\vec{r}(t_0)]\cdot\vec{r}'(t_0)=0, \tag{1.1.6}$$

$$x'(t_0)[x-x_0]+y'(t_0)[y-y_0]+z'(t_0)[z-z_0]=0. \tag{1.1.7}$$

由式(1.1.2),$|P_iP_{i+1}|=|\vec{r}'(\xi_i)|(t_{i+1}-t_i)(t_i\leqslant\xi_i\leqslant t_{i+1})$,有

结论 4 成立.

结论 4 曲线 $\vec{r}=\vec{r}(t)$ 从 $t=t_1$ 到 $t=t_2$ 的弧长为

$$L=\int_{t_1}^{t_2}|\vec{r}'(t)|\,\mathrm{d}t \tag{1.1.8}$$

(弧长也就是运动学上的路程,等于速度关于时间的积分).

结论 5 曲线 $\vec{r}=\vec{r}(t)$ 的参数为自然参数当且仅当

$$|\vec{r}'(t)|\equiv 1.$$

约定:在一个量(向量)上加几点就表示对曲线的弧长参数求几阶导数. 例如 $\dot{f}=\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}s}$ 表示对孤长 s 求一阶导数;$\ddot{\vec{r}}=\dfrac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}s^2}$ 表示对孤长 s 求二阶导数.

结论 6 化曲线 $\vec{r}=\vec{r}(t)$ 为自然参数表示的方法:

首先,在定义域内(任意)选取适当的 $t=t_0$,计算积分

$$s=\int_{t_0}^{t}|\vec{r}'(t)|\,\mathrm{d}t=s(t); \tag{1.1.9}$$

然后,求出 $s=s(t)$ 的反函数 $t=t(s)$;

最后,代入 $\vec{r}=\vec{r}(t)$,得曲线的自然参数表示 $\vec{r}=\vec{r}(t(s))$.

对(1.1.9)式求导可得到结论 7.

结论 7 切向量模长的几何意义为切向量的模长是弧长关于参数的导数,即

$$|\vec{r}'(t)|=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}. \tag{1.1.10}$$

结论 8 曲线的参数表示是否正则与参数选取有关.

例如直线 $x=y=z$ 的两种表示:

$$\vec{r}_1(t)=\{t,t,t\};$$

$$\vec{r}_2(t)=\{t^3,t^3,t^3\}.$$

参数表示 $\vec{r}=\vec{r}_1(t)$ 无奇异点,而 $t=0$ 为参数表示 $\vec{r}=\vec{r}_2(t)$ 的奇异点.

注 用等价类定义正则曲线要相对严密,它与参数的选择无